# Límite funcional

Representaremos por $I$ un intervalo; $a$ será un punto de $I$, y $f$ será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo $I$ lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

**Definición.** Se dice que $f$ tiene límite en el punto $a$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de $f$ en $a$** y escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L$.

Como la condición $0 < |x-a| < \delta$ implica que $x \neq a$, la existencia del límite es independiente de que $f$ esté o no definida en $a$ y, en caso de estarlo, del valor que $f$ pueda tener en $a$.

Una consecuencia inmediata de la definición dada de límite y de la definición de continuidad, es el siguiente resultado.

**Proposición.** Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) $f$ es continua en $a$.

ii) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f(a)$.

En la recta real es posible distinguir si nos acercamos "por la derecha" o "por la izquierda" a un punto. Ello conduce de forma natural a la consideración de los *límites laterales* que pasamos a definir.

**Límites laterales de una función en un punto.**

- Supongamos que el conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que $f$ tiene *límite por la derecha* en $a$, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} a < x < a + \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de $f$ en $a$** y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x) = \alpha$.

- Supongamos que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que $f$ tiene *límite por la izquierda* en $a$, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \quad \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de $f$ en $a$** y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x) = \beta$.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas, es inmediato que:

- Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x<a}} f(x)$.
- Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x\to a \\ x>a}} f(x)$.

- Si $a$ no es un extremo de $I$, entonces

$$\lim_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = L$$

**Funciones divergentes en un punto.**

Se dice que $f$ **es positivamente divergente** en $a$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$.

Se dice que $f$ **es positivamente divergente por la izquierda** en $a$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \ \left.\begin{array}{c} a-\delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = +\infty$.

Se dice que $f$ **es positivamente divergente por la derecha** en $a$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists \delta \in \mathbb{R}^+ : \ \left.\begin{array}{c} a < x < a+\delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "$f$ **es negativamente divergente** en $a$". Simbólicamente $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$.
- "$f$ **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en $a$". Simbólicamente $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = -\infty$

Gráficamente, el hecho de que una función sea divergente en un punto $a$, se traduce en que la recta de ecuación $x = a$ es una *asíntota vertical* de su gráfica.

**Límites en infinito.**

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* $I$. Se dice que $f$ tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists K \in \mathbb{R}^+ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama límite de $f$ en $+\infty$ y escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Gráficamente, el hecho de que una función tenga límite igual a $L$ en $+\infty$ o en $-\infty$, se traduce en que la recta de ecuación $y = L$ es una *asíntota horizontal* de su gráfica.

**Funciones divergentes en infinito.**

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* $I$. Se dice que $f$ es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \ \ \exists K \in \mathbb{R}^+ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Llegados aquí, no debes tener dificultad en precisar el significado de:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty.$$

Es evidente que la existencia del límite de una función en un punto $a$ depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto $a$, es decir, el concepto de límite, al igual que el de continuidad en un punto, es un concepto local. Para calcular un límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, podemos restringir la función $f$ a un intervalo *abierto* que contenga al punto $a$. Eso es lo que se afirma en el siguiente resultado que es de comprobación inmediata.

**Proposición.** Sea $J$ un intervalo abierto que contiene al punto $a$. Entonces se verifica que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x\to a} f_{|J}(x) = L$.

**Álgebra de límites.**

Supongamos que $f$ y $g$ tienen límite en $a$ donde aceptamos que $a$ puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y $fg$ tienen límite en $a$ y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x), \quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = \lim\limits_{x\to a} f(x) \lim\limits_{x\to a} g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = \dfrac{1}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$.

iii) Si $f(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a} f(x) \leqslant \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

iv) Supongamos que $f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x)$ para todo $x \in I$, $x \neq a$ y $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = L$. Entonces se verifica que $h$ tiene límite en $a$ y $\lim\limits_{x\to a} h(x) = L$.

**Divergencia de una suma o de un producto.**

Supongamos que $f$ es positivamente divergente en $a$, $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$, donde aceptamos que $a$ puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x) = +\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M > 0$ tal que $g(x) \geqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x) = +\infty$.

Observa que la condición en *i)* se cumple si $g$ tiene límite en $a$ o diverge positivamente en $a$; y la condición *ii)* se cumple si $g$ tiene límite *positivo* en $a$ o diverge positivamente en $a$.

**El producto de una función con límite cero por una función acotada tiene límite cero**.

Con frecuencia este resultado se aplica cuando la función $g$ es alguna de las funciones seno, coseno, arcoseno, arcocoseno o arcotangente. Todas ellas son, como debes saber, funciones acotadas.

**La continuidad permuta con el paso al límite.**

Supongamos que $f$ tiene límite en el punto $a$ y sea $L = \lim_{x \to a} f(x)$. Sea $g$ una función continua en $L$. Entonces se verifica que la función compuesta $g \circ f$ tiene límite en $a$ igual a $g(L)$, esto es, $\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(L)$. Simbólicamente:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to a} f(x))$$

**Definición.**

Se dice que dos funciones $f$ y $g$ son **asintóticamente equivalentes** en un punto $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$, y escribimos $f(x) \sim g(x) (x \to a)$, cuando $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

**Para calcular el límite de un producto o de un cociente de funciones podemos sustituir una de ellas por otra asintóticamente equivalente**.

**Clasificación de las discontinuidades.**

Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si $f$ tiene límite en $a$ y $\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de $f$ en $a$ existen y son distintos:
  $$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
  se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad de salto**.
- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que $f$ tiene en el punto $a$ una **discontinuidad esencial**.

Se dice que una función $f : I \to \mathbb{R}$ es **continua por la izquierda** en un punto $a \in I$ si $\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a)$; y se dice que es **continua por la derecha** en un punto $a \in I$ si $\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = f(a)$.

**Límites de una función monótona.** Sea $f$ una función creciente definida en un intervalo $I$.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de $I$ se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}, \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de $I$, entonces:

  a) Si $f$ está minorada en $I$ es $\lim_{x \to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

  b) Si $f$ no está minorada en $I$ es $\lim_{x \to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de $I$, entonces:

  a) Si $f$ está mayorada en $I$ es $\lim_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

  b) Si $f$ no está mayorada en $I$ es $\lim_{x \to a} f(x) = +\infty$.

**Discontinuidades de las funciones monótonas.** Sea $f$ una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, $f$ solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, $f$ puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

**Toda función monótona cuya imagen es un intervalo es continua.**

**La función inversa de una función estrictamente monótona definida en un intervalo es continua.**

**Toda función continua e inyectiva en un intervalo es estrictamente monótona.**

**Límites de exponenciales y logaritmos.**

Sea $a$ un número real o $a = +\infty$ o $a = -\infty$. En los apartados b1), b2) y b3) se supone que $f(x) > 0$.

a1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = \mathrm{e}^{L}$.

a2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = +\infty$.

a3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \mathrm{e}^{f(x)} = 0$.

b1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = L > 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = \ln L$.

b2) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = +\infty$.

b3) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = 0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x\to a} \ln f(x) = -\infty$.

En el siguiente resultado se comparan los "*órdenes de crecimiento*" de las funciones logaritmo, potencias y exponenciales.

**Proposición.**

a) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{|\ln x|^{\mu}}{x^{\alpha}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0} |x|^{\alpha} \big| \ln|x| \big|^{\mu} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{\mathrm{e}^{\mu x}} = 0$ para todos $\alpha > 0$ y $\mu > 0$.

**Indeterminaciones en el cálculo de límites.**

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas que hemos visto anteriormente no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f + g$, $fg$, no está determinado por el de $f$ y $g$. Por ejemplo, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto $a$ de la función $f + g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a} (f + g)(x)$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x) = -\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo** "$\infty - \infty$".

Análogamente, si sabemos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y que la función $g$ es divergente (positivamente o negativamente) en el punto $a$, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función $fg$ en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "** $0\,\infty$**"**. Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, es decir, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "$\infty/\infty$", "$0/0$", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "$0\,\infty$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde $f$ es una función que toma valores positivos y $g$ es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)} = \exp(g(x)\ln f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim_{x\to a} g(x)\ln f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto $a$ de las funciones $f$ y $g$, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

- $\lim_{x\to a} f(x) = 1,\ \lim_{x\to a} |g(x)| = +\infty$ (indeterminación "$1^{\infty}$")
- $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "$\infty^{0}$")
- $\lim_{x\to a} f(x) = 0,\ \lim_{x\to a} g(x) = 0$ (indeterminación "$0^{0}$")

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones", ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Es un hecho que la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados. Cuando estudiemos las derivadas obtendremos técnicas que en muchos casos permitirán calcular con comodidad dichos límites.