Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.

Grado en Ingeniería Civil

Universidad de Granada

Matemáticas I

Curso 2013-2014

Juan Carlos Cabello Píñar

Departamento de Análisis Matemático

Índice general

Capítulo 1

Funciones de una variable: límite y continuidad.

1.1. El conjunto de los números reales.

Sumario

En esta lección estudiaremos las propiedades más importantes de los números reales. La estrategia que seguiremos en esta primera lección será la de exponer una lista de propiedades fundamentales de los números reales, que son enunciadas bajo la forma de " axiomas ", y posteriormente enunciar sus sconsecuencias más importantes. Destacaremos, de entre todos los axiomas, el que llamaremos axioma del supremo. Éste no se verifica en ninguno de los conjuntos numéricos más pequeños, ni siquiera en el conjunto de los números racionales, y por tanto, esta propiedad confiere al conjunto de los números reales su identidad y primacía. Cualquier otra propiedad de los números reales se deduce de éste y del resto de los axiomas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.1.1. Estructura algebraica

Axioma I: Existe un conjunto, que notaremos por $\mathbb{R}$, en el que se puede definir una operación suma $(+)$, verificando:

1. Propiedad asociativa:

$$(x+y)+z = x+(y+z) \quad (x,y,z \in \mathbb{R})$$

   (esto es, no es necesario escribir paréntesis si sólo aparece la operación suma).

2. Propiedad conmutativa:

$$x+y = y+x \quad (x,y \in \mathbb{R}).$$

3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

   Existe un elemento $0 \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x+0 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento simétrico:

   Dado cualquier número real x existe otro número real $-x$ tal que

$$x+(-x) = 0.$$

Axioma II: En el conjunto $\mathbb{R}$ se puede definir también una segunda operación, llamada producto (.), que notaremos por yuxtaposición, verificando:

1. Propiedad asociativa:

$$(xy)z = x(yz) \quad (x,y,z \in \mathbb{R}),$$

   (esto es, no es necesario escribir paréntesis si sólo aparece la operación producto).

2. Propiedad conmutativa:

$$xy = yx \quad (x,y \in \mathbb{R}).$$

3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

   Existe un número real $1 \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene

$$x1 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento inverso:

   Dado cualquier número real $x \neq 0$ existe otro número real $1/x$ tal que

$$x\ 1/x = 1.$$

Ambas operaciones se relacionan entre sí de la siguiente manera

Axioma III:

Propiedad distributiva:

$$(x+y)z = xz + yz \quad (x, y, z \in \mathbb{R}).$$

1.1.2. Estructura ordenada

Axioma IV: Existe una relación binaria $(\leq)$), verificando:

1. Propiedad reflexiva: $x \leq x \quad (x \in \mathbb{R})$.
2. Propiedad antisimétrica: Si $x \leq y$ e $y \leq x$, entonces $x = y$ $(x, y \in \mathbb{R})$.
3. Propiedad transitiva: Si $x \leq y$ e $y \leq z$, entonces $x \leq z$ $(x, y, z \in \mathbb{R})$.

Estas tres propiedades se resumen diciendo que la relación $(\leq)$) es una relación de orden.

De hecho, el orden es total ya que:

Axioma V:

Dados dos números reales x e y, ocurre que ó bien $x \leq y$ ó bien $y \leq x$.

Además el orden tiene un buen comportamiento con respecto a la suma

Axioma VI:

Sean x, y, z tres números reales arbitrarios. Si $x \leq y$, entonces $x + z \leq y + z$.

y también respecto al producto

Axioma VII:

Sean x, y dos números reales arbitrarios y $z \geq 0$. Si $x \leq y$, entonces $xz \leq yz$.

Las propiedades enunciadas anteriormente suelen resumirse diciendo que el conjunto $\mathbb{R}$ dotado con las operaciones $+, .$ y el orden $\leq$ tiene estructura de **cuerpo ordenado**.

Notación

Notaremos por:
- $x \geq y$ a la expresión $y \leq x$,
- $x < y$, el hecho de que $x \leq y$ y $x \neq y$,
- $x > y$ a la expresión $y < x$,
- $x - y = x + (-y)$,
- $x/y = x\ 1/y$.

y también por

$$\mathbb{R}^+ := \{x \in \mathbb{R};\ 0 < x\},$$

$$\mathbb{R}^- := \{x \in \mathbb{R};\ x < 0\},$$

$$\mathbb{R}_0^+ := \{x \in \mathbb{R};\ 0 \leq x\},$$

$$\mathbb{R}^* := \{x \in \mathbb{R};\ x \neq 0\}.$$

Antes de continuar vamos a resaltar algunas propiedades que son consecuencia de los axiomas anteriores.

Proposición 1.1.1. *Sean x, y, z tres números reales.*

1. $x\ 0 = 0$.
2. $x\ (-y) = -xy$. *(Regla de los signos)*
3. $x \leq y + z \Longleftrightarrow x - z \leq y$.
4. *Si* $z > 0$, *entonces* $x \leq yz \Longleftrightarrow x/z \leq y$.
5. *Si* $z < 0$, *entonces* $x \leq yz \Longleftrightarrow x/z \geq y$.
6. *Si* $0 < x < y$, *entonces* $0 < 1/y < 1/x$.
7. $x \leq y$ *si, y sólo si* $x \leq y + z$, *para todo* $z \in \mathbb{R}^+$.

1.1.3. Axioma del supremo.

Es claro que el conjunto de los números racionales $\mathbb{Q}$ cumple todas las propiedades exhibidas hasta el momento. Sin embargo, como ya hemos advertido, en este conjunto no se encuentran suficientes elementos como para medir por ejemplo la diagonal de un cuadrado de lado 1. Debe haber pues alguna otra propiedad, exclusiva del conjunto $\mathbb{R}$, que asegure que contiene estos nuevos elementos. Para poder enunciar esta propiedad necesitamos introducir algunos conceptos.

Sea A un subconjunto de números reales no vacío y $z \in \mathbb{R}$. Se dice que z es un **mayorante** o **cota superior** de A si verifica que, para cada $x \in A$,

$$x \leq z.$$

Se dice que z es el **supremo** de A si es el menor de los mayorantes de A. Si el supremo pertenece al conjunto, se dice que z es el **máximo** de A.

Invirtiendo el orden en las definiciones anteriores, encontramos los conceptos de **minorante** o **cota inferior** y de **ínfimo**. Si el ínfimo pertenece al conjunto, se dice que es el **mínimo** de A.

Se dirá que un subconjunto A de números reales está **mayorado** (resp. **minorado**) si tiene mayorantes (resp. minorantes).

Se dirá que un subconjunto A de números reales está **acotado** si tiene mayorantes y minorantes. Esto es, si está mayorado y minorado.

Ya podemos enunciar el axioma distintivo del conjunto $\mathbb{R}$, conocido como el axioma del supremo

Axioma VIII:

Todo subconjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.

Este axioma nos permite incluir, por ejemplo, $\sqrt{2}$ en el conjunto $\mathbb{R}$, ya que es fácil probar que

$$\sqrt{2} = Sup\{x \in \mathbb{Q};\ x^2 < 2\}.$$

Por otra parte, es consecuencia inmediata del axioma del supremo, que todo subconjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo. Este hecho nos permite ver que el número e es también un número real, ya que éste puede verse como

$$e = Inf\{(1 + 1/n)^{n+1};\ n \in \mathbb{N}\},$$

aunque también

$$e = Sup\{s_n = 1 + 1 + 1/2 + ... + 1/n!;\ n \in \mathbb{N}\}.$$

Otras consecuencias, algunas sorprendentes, de éste axioma se recogen en el siguiente resultado:

Teorema 1.1.2.

1. *El conjunto de los números naturales no está mayorado.*
2. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ y para cada $y \in \mathbb{R}^+$ existe un (único) número real positivo $x = \sqrt[n]{y}$ tal que $x^n = y$*

3. *Dados dos números reales $x < y$, existe un número irracional β tal que $x < \beta < y$.*

4. *Dados dos números reales $x < y$, existe un número racional r tal que $x < r < y$.*

5. *Si $P(n)$ es una propiedad relativa a un número natural n y se verifica que $P(1)$ es cierta y que siempre que lo sean $P(1), P(2), ..., P(n)$ lo sea también $P(n+1)$, entonces dicha propiedad es cierta para todos los números naturales.*

La recta real: representación gráfica del conjunto $\mathbb{R}$

Para tener una idea intuitiva del conjunto, los números reales suelen representarse como los puntos de una recta. Para dicha representación fijamos dos puntos sobre una recta horizontal que llamamos origen y punto unidad, y les asignamos los números 0 y 1, respectivamente. El segmento entre 0 y 1 es tomado como unidad de medida y, llevado hacia la derecha del 1, nos permite representar los diferentes números naturales. Llevando la misma unidad de medida hacia la izquierda de cero, se obtiene el resto de los números enteros. Los huecos serán rellenados por el resto de los números racionales e irracionales teniendo en cuenta los apartados 3) y 4) del teorema 1.1.2. Así, el hecho de que $x \leq y$ se interpreta como que el " punto " x se encuentra situado a la izquierda del " punto " y.

1.1.4. Valor absoluto de un número real

Dado un número real x, se define su **valor absoluto** por la siguiente regla

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

Conviene destacar algunas de sus propiedades:

Proposición Sean x e y dos números reales, entonces

1. $|x| = 0$ si, y sólo si $x = 0$.

2. Si $x \neq 0$, entonces $|x| > 0$.

3. $|x| = |-x|$, $|xy| = |x||y|$.

4. $x^2 = |x|^2$, $\sqrt{x^2} = |x|$.

5. $|x| \leq y$ si, y sólo si $-y \leq x \leq y$.

6. $|x+y| \leq |x| + |y|$,

7. $||x| - |y|| \leq |x - y|$.

1.1.5. Intervalos

Otros subconjuntos especialmente interesantes son los llamados intervalos, esto es, hablando rudamente, los conjuntos que no tienen agujeros.

Dados dos números reales a y b, con $a \leq b$, se llamará

Intervalo abierto de extremos a y b, al conjunto

$$]a, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x < b\}.$$

Intervalo cerrado de extremos a y b, al conjunto

$$[a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x \leq b\}.$$

Intervalo cerrado en a y abierto en b, al conjunto

$$[a, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x < b\}.$$

Intervalo abierto en a y cerrado en b, al conjunto

$$]a, b] := \{x \in \mathbb{R};\ a < x \leq b\}.$$

Semirrecta abierta de origen a al conjunto

$$]a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ a < x\}.$$

Semirrecta cerrada de origen a al conjunto

$$[a, +\infty[:= \{x \in \mathbb{R};\ a \leq x\}.$$

Semirrecta abierta de extremo b al conjunto

$$]-\infty, b[:= \{x \in \mathbb{R};\ x < b\}.$$

Semirrecta cerrada de extremo b al conjunto

$$]-\infty, b] := \{x \in \mathbb{R};\ x \leq b\}.$$

Estos ocho tipos de conjuntos junto con el propio $\mathbb{R}$ son los únicos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que no tienen " agujeros ", esto es, dicho de forma más rigurosa, son los únicos subconjuntos I de números reales que verifican que, para cada dos puntos $x, y \in I$, se tiene que el intervalo $[x, y]$ está contenido en I.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Se dice que x_0 es un **punto de acumulación** de A,

"si todo intervalo centrado en x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A,

lo que a su vez en lenguaje formal se expresa:

$$x_0 \in A' \Longleftrightarrow]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A \backslash \{x_0\} \neq \emptyset, \ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Denominaremos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A

Se dice que un punto $a \in A$ es un **punto aislado de** A si no es un punto de acumulación.

1.1.6. Expresión decimal de un número real

A los elementos del conjunto $D = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ se les denomina números **dígitos**. LLamaremos expresión decimal de un número real dado x a una lista de números dígitos que está unívocamente determinada por dicho número. Para construir la expresiÑn decimal necesitamos el concepto de parte entera.

Se llama **parte entera** de un número real x al número entero $E(x)$ dado por

$$E(x) = Max\{p \in \mathbb{Z}; \ p \leq x\}.$$

Es inmediato comprobar que para cada $x \in \mathbb{R}$: $E(x) \leq x < E(x) + 1$,

A partir de aquí, si x es no negativo, suele escribirse la expresiÑn

$$x = E(x)'a_1a_2...a_n....$$

(Si $x \in \mathbb{R}^-$, suele escribirse $x = -E(-x)'a_1a_2...a_n...$)

Una tal expresión recibe el nombre de **expresión decimal del número** x.

Así por ejemplo, la expresión decimal del número 1/6 es

$$1/6 = 0'1666..,6...$$

Si la expresión decimal de x es tal que $a_n = 0$ a partir de un cierto valor p, diremos que la expresión decimal de x es **finita** o que x **admite un desarrollo decimal finito** y en tal caso escribiremos

$$x = E(x)'a_1a_2...a_p.$$

Merece la pena destacar que en este caso, claramente, x es un número racional.

Sin embargo, **puede ocurrir** que un número **racional no admita un desarrollo decimal finito**, si bien, en tal caso se advierte que existe una lista de dígitos que se repite periódicamente. Si $E(x)'a_1a_2...a_n...$ es la expresión decimal de un número racional positivo x, donde $\{a_p, a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_q\}$ es una lista de dígitos que se repite de forma continuada, suele escribirse

$$x = E(x)'a_1a_2...a_{p-1}, (\widehat{a_pa_{p+1}a_{p+2}...a_q}).$$

Una tal expresión recibe el nombre de **expresión decimal periódica**.

Así, por ejemplo $\frac{4}{3} = 1'a_1a_2...a_n...$, donde, para cada $n \in \mathbb{N}$, se tiene que, $a_n = 3$. En tal caso escribiremos $4/3 = 1'\widehat{3}$.

La expresión decimal de un número **irracional ni es finita ni es periódica**.

Sea x un número real positivo, y sea $E(x)'a_1a_2...a_n...$ su expresión decimal. Al valor $E(x)'a_1a_2...a_n$ se le denomina **aproximación decimal de x con n cifras exactas.**

En los cálculos con números irracionales suele usarse la aproximación decimal con cifras exactas, teniendo en cuenta que para ello la última cifra que aparece es fruto del redondeo y que el número de cifras exactas a usar en cada caso dependerá de la precisión que necesitemos. Por ejemplo en lugar de

$$e = 2'718281828459045235360287471352662497757247...,$$

puede escribirse, si en los cálculos sólo necesitamos contar con seis decimales,

$$e \approx 2'718282.$$

1.1.7. Relación de ejercicios

1. Supuesto que $\dfrac{s}{t} < \dfrac{x}{y}$, donde $s, x \in \mathbb{R}$, $t, y \in \mathbb{R}^+$, pruébese que

$$\frac{s}{t} < \frac{s+x}{t+y} < \frac{x}{y}.$$

2. Dados los números reales x, y, discútase la validez de las siguientes afirmaciones.

   a) $|2x - 1| \leq 5$,

   b) $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$ $(x \neq -2)$,

   c) $|x - 5| < |x + 1|$,

   d) $|x| - |y| = |x - y|$.

3. Calcúlense, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de números reales:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 \geq 0\}$,
   b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 < 0\}$,
   c) $C = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{2\};\ x + 2/x - 2 < 0\}$
   d) $D = \{x \in \mathbb{R}\backslash\{2\};\ x + 2/x - 2 \leq 0\}$
   e) $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

4. Pruébese que $\sqrt{3}$ es irracional.

1.2. Funciones elementales

Sumario

Como ya hemos advertido, el núcleo del curso está constituido por el estudio de aquellas aplicaciones en el que tanto el dominio como la imagen son subconjuntos de números reales. En esta lección estudiaremos los ejemplos más importantes de éstas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.2.1. Aplicaciones

Con el fin de hacer una definición rigurosa necesitamos recordar algunos conceptos:

Dados dos conjuntos A y B se dice que una correspondencia f entre los elementos de A y de B es una **aplicación entre** A **y** B si a cada elemento del conjunto A corresponde un sólo elemento del conjunto B. Este hecho suele notarse

$$f : A \longrightarrow B.$$

Al conjunto A se le suele llamar **dominio de la aplicación** f y al conjunto B **conjunto final de la aplicación** f.

Así pues, una aplicación viene determinada por

1. su dominio A,
2. el cojunto B donde toma valores,

   y
3. la ley de correspondencia, $x \longmapsto f(x)$.

Por otra parte, se dice que una aplicación $f : A \longrightarrow B$ es

1. **inyectiva** si, para cualesquiera dos elementos $x, y \in A$ tales que $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$), ó equivalentemente si $f(x) = f(y)$ implica que $x = y$.
2. **sobreyectiva** si el **conjunto imagen de** f,$f(A)$, que no es otro que el conjunto

   $$f(A) = \{y \in \mathbb{R};\ \text{existe}\ \ x \in A, \ \ \text{tal que}\ \ y = f(x)\},$$

   coincide con el conjunto donde toma valores la función,
3. **biyectiva** si es inyectiva y sobreyectiva.

Sea $f : A \longrightarrow B$ es una aplicación inyectiva. A la aplicación cuyo dominio es $f(A)$, cuyo rango es A y que viene definida por la ley $f(x) \longmapsto x$ se le denomina **aplicación inversa** de f y es denotada por f^{-1}.

Obsérvese que la función inversa $f^{-1} : f(A) \longrightarrow A$ es una aplicación biyectiva.

Dada una aplicación $f : A \longrightarrow B$ y dado un subconjunto C de A, llamaremos **restricción de** f **al conjunto** C, f/C, a una nueva aplicación cuyo dominio es C, que toma valores en C y cuya ley de correspondencia viene dada por

$$(f/C)(x) = f(x) \ \ (\ x \in C).$$

Llamaremos **función real de variable real** a toda aplicación definida en un subconjunto de números reales y con valores en $\mathbb{R}$, esto es, a toda función $f : A \longrightarrow B$, donde A y B son subconjuntos no vacíos de números reales.

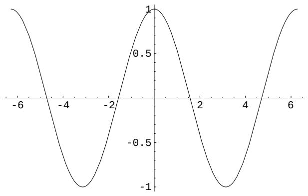
1.2.2. Gráfica de una función

En ocasiones resulta útil tener una " imagen fotográfica " de las funciones, esto se consigue mediante la **gráfica** de dicha función. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se define la gráfica de f, como el conjunto

$$Graf(f) : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = f(x),\ x \in A\}.$$

Es claro que el conjunto $Graf(f)$ es un subconjunto de $\mathbb{R}^2$. Al igual que usamos como representación gráfica de $\mathbb{R}$ la recta real, podremos usar el plano como representación gráfica del conjunto $\mathbb{R}^2$ y, por ende, la gráfica de una función real de variable real podrá representarse como un subconjunto de éste.

La idea que ahora queremos resaltar es que la forma de la gráfica revela muchas de las propiedades de la función correspondiente.



1.2.3. Algunas propiedades elementales: Monotonía, simetría y periodicidad

Sea A un subconjunto de números reales y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.

MONOTONÍA

Se dice que f es

1. **creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$.

2. **estrictamente creciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$.

3. **decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$.

4. **estrictamente decreciente** en A si siempre que $x, y \in A$ con $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$.

5. **monótona** (resp. **estrictamente monótona** en A si es creciente o decreciente (resp. estrictamente creciente o decreciente).

SIMETRÍA

Se dice que f es

1. **par** en A si $f(x) = f(-x)$, siempre que A verifique $x \in A \iff -x \in A$.

2. **impar** en A si $f(x) = -f(-x)$, siempre que A verifique $x \in A \iff -x \in A$.

3. **periódica** en A si existe un número real positivo T tal que para todo $x \in A$, se verifica que $x + T \in A$ y
$$f(x+T) = f(x).$$
Un tal número real T recibe el nombre de **periodo de la función** f.

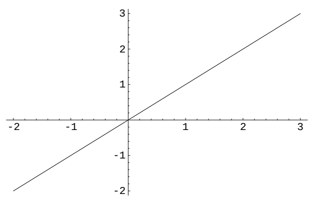
1.2.4. Funciones racionales

Veamos algunos ejemplos importantes de funciones reales de variable real.

1. **Función identidad**

Dada A un subconjunto de números reales, se define la función identidad en A, I_A, como aquella función $I_A : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por
$$I_A(x) = x, \ \forall x \in A.$$
Dicha función es estrictamente creciente y su gráfica
$$Graf(I_A) = \{(x,x); \ x \in A\}.$$
es un subconjunto de la diagonal principal
$$D := \{(x,x); \ x \in \mathbb{A}\}.$$

Si $A = [-2, 3]$, entonces su gráfica puede ser representada por



2. **Funciones constantes**

Dada A un subconjunto de números reales y dado $a \in \mathbb{R}$, se define la función **constante** restringida al conjunto A, C_a, como la función $C_a : A \longrightarrow \mathbb{R}$ que viene definida por

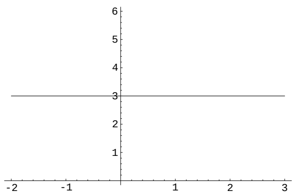
$$C_a(x) = a, \quad \forall x \in A.$$

La gráfica de dicha función

$$Graf(C_a) = \{(x, a);\ x \in \mathbb{R}\}$$

puede verse como un subconjunto de la recta horizontal $y = a$:

Si $A = [-2, 3]$ y $a = 3$, entonces su gráfica puede ser representada por

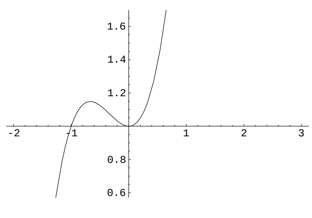


3. **Funciones polinómicas**

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **polinómica** si existen $a_0, a_1, a_2, ..., a_n$ números reales tales que $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0$ para cada $x \in A$.

La función identidad y toda función constante son ejemplos sencillos de funciones polinómicas.

Si $A = [-2, 3]$ y $f(x) = x^3 + x^2 + 1$, entonces la gráfica de la función polinómica f puede ser representada por la siguiente figura.



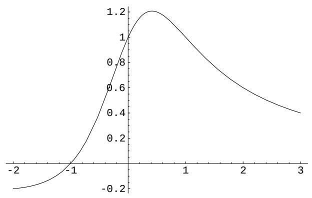
4. **Funciones racionales**

Una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice ser **racional** si existen sendas funciones polinómicas f_1 y f_2, con $f_2(x) \neq 0$, para cada $x \in A$ y tales que, para cada $x \in A$

$$f(x) = f_1(x)/f_2(x).$$

Es claro que todos los ejemplos anteriores lo son de funciones racionales.

Si $A = [-2,3]$ y $f(x) = \frac{x+1}{x^2+1}$, entonces la gráfica de la función racional f puede ser representada por

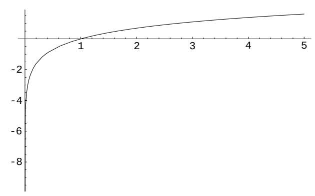


1.2.5. Función logaritmo.

Se define la función **Logaritmo neperiano**, log, como la única biyección estrictamente creciente, que existe de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, verificando:
- $log(1) = 0$
- $log(e) = 1$
- $log(xy) = log(x) + log(y)$.

Como consecuencia, se pueden obtener algunas propiedades tales como que:
- $log(x^p) = plog(x)$, para cada $x \in \mathbb{R}^+$ y para cada $p \in \mathbb{N}$.
- $log(x/y) = log(x) - log(y)$, para cada $x, y \in \mathbb{R}^+$.

Si $A =]0,5]$ entonces la gráfica de la restricción de la función logaritmo neperiano al conjunto A puede ser representada por



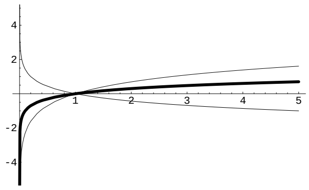
Función logaritmo de base a

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, se llama **función logaritmo de base** a, log_a, a la función definida en $\mathbb{R}^+$ mediante la ley

$$log_a(x) = log(x)/log(a).$$

Si $a > 1$, entonces la función logaritmo de base a es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$, mientras que si $a < 1$ entonces es una biyección estrictamente decreciente de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}$.

Así por ejemplo, para $A =]0, 5]$ y para $a = 10$ y a=0,2 las gráficas de las correspondientes restricciones de la función logaritmo al conjunto A pueden ser comparadas con la anterior



1.2.6. Operaciones con funciones.

Antes de seguir con el listado de las funciones elementales conviene hacer algunas precisiones.

1. <u>Algebra de funciones</u>

   En primer lugar hacemos notar que dadas dos funciones fy g definidas sobre un mismo subconjunto de números reales A, se pueden definir las siguientes funciones:

   a) **Función suma**: $f + g$.

   La función suma es una nueva función $f + g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
   $$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

   Asociadas a cada función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, podemos considerar la llamada **función opuesta**,$-f$, esto es, la función
   $$-f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$
   definida, para cada $x \in A$, por
   $$(-f)(x) = -f(x).$$

   b) **Función producto**: $f.g$:

   La función producto es una nueva función $f.g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida, para cada $x \in A$, por
   $$(f.g)(x) = f(x)g(x).$$

Siempre $0 \notin f(A)$, podemos definir la **función inversa para el producto**, $1/f$, como la función

$$1/f : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

dada, para cada $x \in A$, por

$$(1/f)(x) = \frac{1}{f(x)}.$$

c) **Función producto por un escalar** a, af:

Para cada $a \in \mathbb{R}$, la función , af, es una nueva función de A en $\mathbb{R}$ que viene definida, para cada $x \in A$, por

$$(af)(x) = af(x).$$

La función , af puede verse como el producto de la función constante $x \longmapsto a$ con la función f.

2. <u>Composición de funciones</u>

Supongamos ahora que dadas dos funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ de manera que el conjunto B contiene a $f(A)$. Podemos definir la **función composición** de ambas, $g \circ f$, como la función

$$g \circ f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

definida, para cada $x \in A$, por

$$(g \circ f)(x) = g[f(x)].$$

Recordemos que asociada a toda función inyectiva $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ podemos considerar la función inversa, f^{-1}, definida en $f(A)$, con valores en A y que viene definida mediante la ley :

$$f^{-1}(f(x)) = x \quad (x \in A),$$

esto es,

$$f^{-1} \circ f = I_A.$$

Además es claro que

$$f \circ f^{-1} = I_{f(A)}.$$

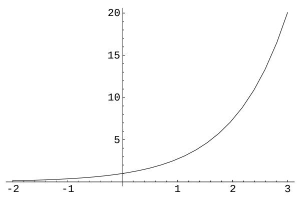
Es fácil probar, usando estas últimas consideraciones, que toda aplicación estrictamente monótona es inyectiva y que su inversa es igualmente estrictamente monótona y del mismo tipo (creciente ó decreciente).

1.2.7. Función exponencial.

Ya podemos continuar con la lista de ejemplos

Llamaremos **función exponencial**, e^x, a la función inversa del logaritmo neperiano, será por tanto, una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ tal que:
- $e^0 = 1$
- $e^1 = e$
- $e^{x+y} = e^x e^y$, para cada $x, y \in \mathbb{R}$.
- $e^{logx} = x$
- $log(e^x) = x$.

Su gráfica se puede representar como sigue:



Dados $x \in \mathbb{R}^+$ e $y \in \mathbb{R}$, convendremos en que

$$x^y = e^{ylogx},$$

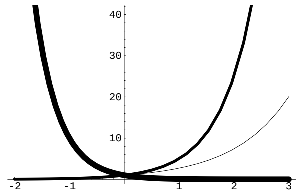
en particular se obtiene que:

$$log(x^y) = ylogx,$$

Función exponencial de base a

Dado $a > 0$, $a \neq 1$, la función $h_a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $h_a(x) = a^x$, se denomina **función exponencial de base** a, y se notará por a^x.
Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $a > 1$ (resp. $a < 1$) de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:
- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^{x+y} = a^x a^y$.

Sus gráficas para $a = 0,1$ y $a = 5$ se pueden representar como siguen:

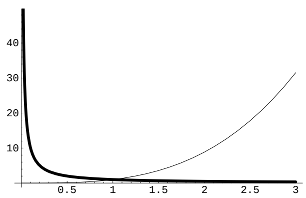


Función potencial

Dado $b \neq 0$, la función $p_b : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}^+$ definida por $p_b(x) = x^b$, se denomina **función potencial de exponente** b, y se notará por x^b.

Dicha función es estrictamente creciente (resp. decreciente) si $b > 0$ (resp. si $b < 0$) de $\mathbb{R}^+$ en $\mathbb{R}^+$ y verifica las siguientes propiedades:
- $1^b = 1$
- $(xy)^b = x^b y^b$.

Sus gráficas (para $b = \pi$ y $b = -1$) se pueden representar como sigue:



1.2.8. Funciones definidas a trozos. Funciones parte entera y valor absoluto.

Supongamos que tenemos un subconjunto A de números reales y dos subconjuntos disjuntos de éste B y C tales que $A = B \cup C$. Dispongamos además de sendas funciones reales de variable real g y h definidas respectivamente en B y C. A partir de aquí podemos definir una nueva función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \in B \\ h(x) & \text{si } x \in C. \end{cases}$$

Decimos que una tal función es una **función definida a trozos**. Es evidente que las propiedades de la nueva función dependerán de las propiedades de las funciones que la definen y de la forma en que los subconjuntos se complementan.

Como ejemplos más sencillos veremos los dos siguientes:

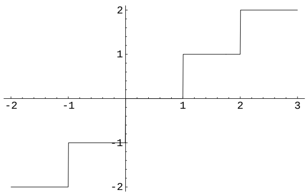
Función parte entera:

Se define la función **Parte entera**, E, como la función $E : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$E(x) = Max\{p \in \mathbb{Z};\ p \leq x\}.$$

Dicha función es creciente y su gráfica puede representarse como una escalera " infinita " cuyos peldaños son intervalos de longitud uno, y que, en cada número entero, tiene un " salto " de altura uno.

Si $A = [-2, 3]$, entonces la gráfica de la función $E(x)$ restringida al conjunto A puede ser representada por

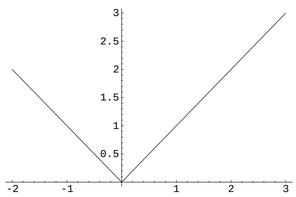


Función valor absoluto.

Se define la función **valor absoluto** como la función $|.| : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida para cada $x \in \mathbb{R}$ por

$$|x| = \begin{cases} x & si\ x \geq 0 \\ -x & si\ x < 0 \end{cases}$$

La gráfica puede representarse como la unión de las bisectrices del primer y segundo cuadrante.



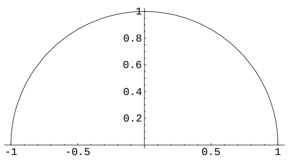
1.2.9. Funciones arcocoseno, coseno y seno

Vamos a estudiar ahora las funciones trigonométricas cuya importancia radica en que permiten expresar las distintas relaciones entre los lados y los ángulos de un triángulo, y porque sus propiedades le confieren una especial disposición para expresar muchos fenómenos naturales. Estas dos facetas hacen que su empleo en la Física y en la Ingeniería sea muy frecuente.

Consideremos la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \sqrt{1 - x^2}, \quad \forall x \in [-1, 1].$$

La gráfica de esta función recibe el nombre de **semicircunferencia unidad**.



Pues bien, es sabido que la longitud de dicha gráfica es el $\pi \simeq 3,141592$.

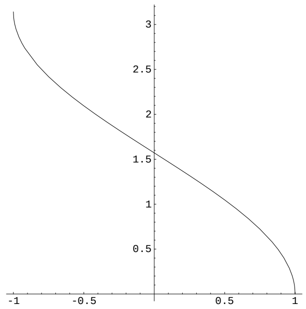
Definimos la función **arcocoseno**, $arc\ cosx$, como la función biyectiva y estrictamente decreciente del intervalo $[-1, 1]$ en el intervalo $[0, \pi]$ definida por la ley

$$arc\ cosx = \text{longitud arco semicircunferencia entre los puntos } (1, 0) \text{ y } (x, f(x)).$$

Se puede probar que:

1. $arc\ cos(1) = 0$.
2. $arc\ cos(-1) = \pi$.
3. $arc\ cos(0) = \frac{\pi}{2}$.
4. $arc\ cos(x) + arc\ cos(-x) = \pi$.

Y su gráfica puede ser representada como sigue



Función coseno

Se llama **función coseno** y se nota por <u>$cosx$</u> a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ par y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0, \pi]$ es tal que

$$cos(x) = (arc\ cos)^{-1}(x),$$

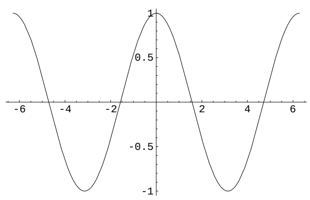
y por tanto, para cada $x \in [0, \pi]$,

$$arccos(cosx) = x,$$

y para cada $y \in [-1, 1]$,

$$cos(arcosy) = y.$$

La gráfica de la función coseno es como sigue

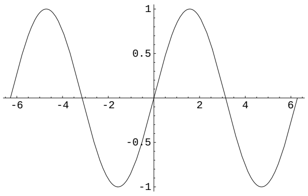


Función seno

Se llama **función seno**, <u>$senx$</u>, a la única función de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ impar y periódica con periodo 2π cuya restricción a $[0, \pi]$ es tal que

$$sen(x) = \sqrt{1 - cos^2(x)}.$$

La gráfica de la función seno es como sigue



Las siguientes propiedades determinan de forma única a las funciones seno y coseno.

Teorema 1.2.1.

1. *$sen^2x + cos^2x = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$.*

2. *La restricción de la función coseno al intervalo $[0,\pi]$ es una biyección estrictamente decreciente de éste en el intervalo $[-1,1]$, con*

$$cos0 = 1, \quad cos\frac{\pi}{2} = 0, \quad cos\pi = -1, \quad cos\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \quad cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

3. *La restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ es una biyección estrictamente creciente de éste en el intervalo $[-1,1]$, con*

$$sen0 = 0, \quad sen(-\frac{\pi}{2}) = -1, \quad sen\frac{\pi}{2} = 1, \quad sen\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

$$sen\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad sen\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}.$$

4. *La imagen de ambas funciones es el intervalo $[-1,1]$.*

5. *La función coseno es una función par y periódica de periodo 2π:*

$$cosx = cos(-x), \quad cos(x+2\pi) = cosx, \quad (x \in \mathbb{R}),$$

mientras que la función seno es impar y periódica:

$$sen(-x) = -senx, \quad sen(x+2\pi) = senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

6.
$$cos(x+\pi) = -cosx, \quad sen(x+\pi) = -senx \quad (x \in \mathbb{R}).$$

7. *$cos(x+y) = cosxcosy - senxseny. \qquad sen(x+y) = senxcosy + cosxseny.$*

8. *Dados dos números reales a,b, verificando que $a^2+b^2 = 1$, existe un único número real x tal que $x \in]-\pi,\pi]$, $cosx = a$ y $senx = b$.*

9. *Sean $x,y \in \mathbb{R}$ tales que $senx = seny$ y $cosx = cosy$, entonces existe un único número entero p tal que $x = y + 2p\pi$.*

10. *$\{x \in \mathbb{R};\ cosx = 0\} = \{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}. \qquad \{x \in \mathbb{R};\ senx = 0\} = \{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$*

1.2.10. Función tangente

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función tangente**, $\underline{tgx}$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$tg(x) = \frac{senx}{cosx}.$$

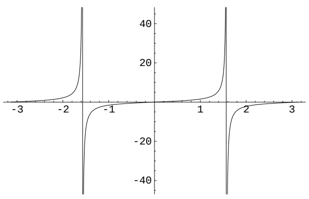
Algunas de sus propiedades pueden verse en el siguiente resultado

Proposición 1.2.2. *1. La función tangente es una función impar y periódica de periodo π, esto es, para cada $x \in A$,*

$$tg(x + \pi) = tg(x).$$

2. La función tangente restringida al intervalo $]\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, es una biyección estrictamente creciente de dicho intervalo en $\mathbb{R}$.

3. La gráfica de la función tangente restringida al conjunto $A = [-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:

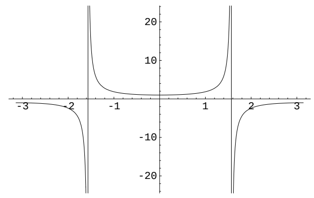


1.2.11. Funciones secante, cosecante y cotangente

Sea $A = \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función secante**, $secx$, a la función de A en $\mathbb{R}$ definida por

$$sec(x) = \frac{1}{cosx}.$$

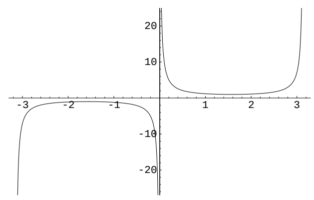
La gráfica de la función secante restringida al conjunto $A = [-\pi, \pi]\backslash\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Sea $B = \mathbb{R}\backslash\{k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}$. Se llama **función cosecante**, *cosecx* , a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

$$cosec(x) = \frac{1}{senx}.$$

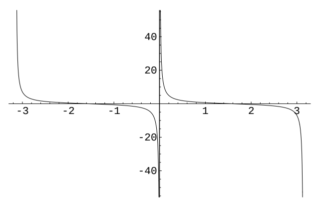
La gráfica de la función cosecante restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse de la siguiente forma:



Llamaremos **función cotangente**, *cotgx* , a la función de B en $\mathbb{R}$ definida por

$$cotg(x) = \frac{cosx}{senx}.$$

La gráfica de la función cotangente restringida al conjunto $A =]-\pi, \pi[/\{0\}$ puede representarse de la siguiente forma:



1.2.12. Funciones arcoseno y arcotangente.

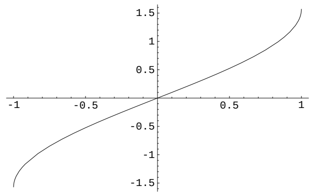
Llamaremos **función arcoseno**, *arc senx*, a la función inversa de la restricción de la función seno al intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, esto es,

$$arc\ sen[sen(x)] = x,\ (x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) \quad sen[arc\ sen(y)] = y \ \ (y \in [-1, 1]).$$

Dicha función es pues una biyección estrictamente creciente de $[-1,1]$ en $[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}]$ con

$$arc\ sen(-1) = -\frac{\pi}{2} \quad arc\ sen(0) = 0, \quad arc\ sen(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Su gráfica es como sigue:



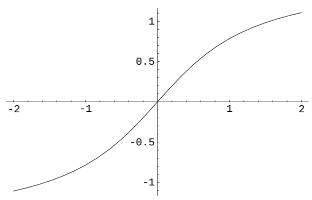
Llamaremos **función arcotangente**, $arc\ tgx$ a la inversa de la res-tricción de la función tangente al intervalo $]-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}[$, esto es,

$$arc\ tg[tg(x)] = x, \quad tg[arc\ tg(y)] = y.$$

Dicha función es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ en dicho intervalo con

$$arc\ tg(0) = 0.$$

Su gráfica de es como sigue:



1.2.13. Identidades Trigonométricas.

Usando las propiedades antes descritas de las funciones trigonométricas pueden deducirse otras muchas conocidas como identidades trigonométricas. A continuación damos algunas de ellas. Dados dos números reales x e y en el dominio correspondiente, obtenemos que:

1. Identidades pitagóricas

$$tg^2(x) + 1 = sec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

$$cotg^2(x) + 1 = cosec^2(x), \quad \text{ó si se quiere} \quad sen(x) = \frac{tg(x)}{\sqrt{1 + tg^2(x)}}.$$

2. $$tg(x \pm y) = \frac{tgx \pm tgy}{1 \mp tgx\ tgy}.$$

3. ángulo doble

$$sen2x = 2senxcosx, \quad cos2x = 2cos^2x - 1 = 1 - 2sen^2x.$$

4. ángulo mitad

$$sen^2x = \frac{1}{2}(1 - cos2x), \quad cos^2x = \frac{1}{2}(1 + cos2x),$$

$$tg(\frac{x}{2}) = \frac{1 - cosx}{senx} = \frac{senx}{1 + cosx}.$$

5. producto

$$senxseny = \frac{1}{2}[cos(x - y) - cos(x + y)],$$

$$cosxcosy = \frac{1}{2}[cos(x - y) + cos(x + y)],$$

$$senxcosy = \frac{1}{2}[sen(x + y) + sen(x - y)].$$

1.2.14. Funciones Hiperbólicas.

Se define la función **coseno hiperbólico**, $coshx$, como la función $cosh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$coshx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

Se define la función **seno hiperbólico**, $senhx$, como la función $senh : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

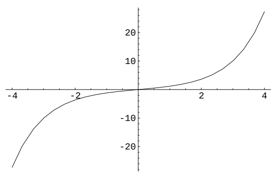
$$senhx = \frac{e^x - e^{-x}}{2}.$$

El siguiente resultado resume algunas propiedades del seno y coseno hiperbólicos.

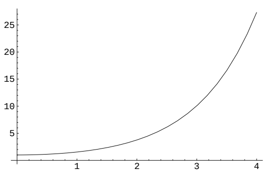
Proposición 1.2.3.

1. *La función coseno hiperbólico es una función par y la función seno hiperbólico es una función impar.*
2. *La función seno hiperbólico es una biyección estrictamente creciente de* $\mathbb{R}$ *en* $\mathbb{R}$.
3. *La restricción de la función coseno hiperbólico a* $\mathbb{R}_0^+$ *(resp.* $\mathbb{R}_0^-$*) es una biyección estrictamente creciente (resp. decreciente) de* $\mathbb{R}_0^+$ *(resp.* $\mathbb{R}_0^-$*) sobre* $[1, +\infty[$.
4. $$cosh^2x - senh^2x = 1.$$
5. $$cosh(x + y) = coshx\ coshy + senhx\ senhy.$$
$$senh(x + y) = senhx\ coshy\ +\ coshx\ senhy.$$

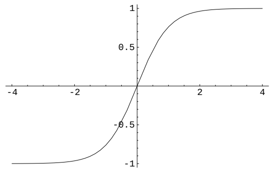
La gráfica del seno hiperbólico es como sigue:



La gráfica de la función coseno hiperbólico restringida a $\mathbb{R}_0^+$ es como sigue

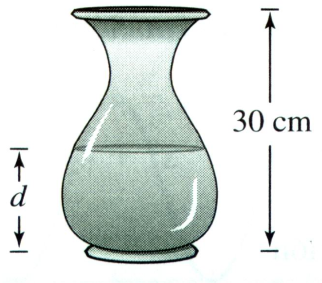


Finalmente, diremos que, por analogía con las funciones trigonométricas, podemos hablar de **tangente hiperbólica**, tgh, la cual es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ sobre $]-1, 1[$ y su gráfica es como sigue:



1.2.15. Relación de ejercicios.

1. En una vasija de 30 cm de altura entra agua a ritmo constante. Se llena en 5 segundos.Usad esta información y la forma de la vasija para responder a las siguientes cuestiones:



   a) Si d representa la profundidad del agua medida en centímetros y t el tiempo transcurrido en segundos, explicad por qué d es función de t.

   b) Hallad el dominio y el recorrido de dicha función.

   c) Esbozad una posible gráfica de la función.

2. Sean las leyes $f(x) = 1/x$ y $g(x) = 1/\sqrt{x}$ correspondientes a dos funciones reales de variable real f y g. ¿Cuáles son los dominios naturales de f,g,$f+g$,fg,$f \circ g$ y $g \circ f$?

3. Calcúlense los dominios naturales de las funciones correspondientes reales de variable real en cada uno de los casos siguientes:

   a) $x \longmapsto 1/1 + x$.

   b) $x \longmapsto 1/1 + x^2$.

   c) $x \longmapsto 1/1 + \sqrt{x}$.

4. ¿Qué se puede decir acerca de la gráfica de una función par?,¿ y de una función impar? Dense ejemplos de funciones par, impar y no par ni impar.

5. Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de variable real. Se dice que f está **acotada** (resp. **acotada superiormente / inferiormente**) si su conjunto imagen $f(A)$ es un subconjunto de números reales acotado (resp. superiormente / inferiormente acotado). Prúebese que f está acotada si, y sólo si, existe $M \in \mathbb{R}$, tal que, para cada $x \in A$, se verifica que $|f(x)| \leq M$.

6. ¿Qué funciones componen la función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos?

$$1)\ f(x) = (log^2 x)e^{x^2}, \qquad 2)\ f(x) = (\sqrt{x+1})^{log(x^3)}.$$

   Dense otros ejemplos de composición de funciones.

7. Pruébese que en toda reunión de personas existen al menos dos que conocen exactamente el mismo número de asistentes.

8. Hállese la función inversa de

   a) $senhx$.

   b) $coshx/_{\mathbb{R}_0^+}$.

9. Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow]-\pi, \pi[$ la función definida por $g(y) = 2arctgy$. Hállese en función de y,

   a) $seng(y)$.

   b) $cosg(y)$.

1.3. Sucesiones de números reales

Sumario

Introduciremos en esta lección, a vuelo pluma, unas herramientas muy interesantes del análisis matemático: las sucesiones. Este concepto nos facilitará la comprensión de los conceptos de continuidad, límite e integrabilidad. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.3.1. Acotación, monotonía y convergencia de sucesiones

Una sucesión de elementos de un cierto conjunto A no es más que una "lista ordenada"de elementos de A o dicho de forma más rigurosa: una **sucesión de elementos** de A es una aplicación $f : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

En lugar de escribir $f(n)$ se suele escribir x_n, mientras que la sucesión f suele notarse por $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ó simplemente $\{x_n\}$. A x_n se le denominará término n-ésimo de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Una **sucesión de números reales** no es más que una sucesión en la que $A = \mathbb{R}$.

Dada una sucesión $\{x_n\}$, al conjunto imagen $\{x_n : \ n \in \mathbb{N}\}$ se le denomina conjunto de los términos de la sucesión $\{x_n\}$. Así por ejemplo si consideramos la sucesión $\{1, 0, 1, 0, 1, ...\}$ su conjunto de los términos está formado por sólo dos elementos, a saber $\{0, 1\}$.

Veamos ahora algunas propiedades que pueden tener las sucesiones.

Se dice que una sucesión de números reales $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$

1. está **mayorada**, si existe un número real M tal que $x_n \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
2. está **minorada**, si existe un número real M tal que $x_n \geq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$,
3. está **acotada** si está mayorada y minorada. Es fácil probar que una sucesión está acotada si, y sólo si, existe un número real positivo M tal que $|x_n| \leq M$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

4. es **creciente** si, para para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, se tiene que $x_n \leq x_m$.

5. es **decreciente** si, para cualesquiera $n, m \in \mathbb{N}$ con $n \leq m$, se tiene que $x_n \geq x_m$.

   Es fácil probar por inducción que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es creciente (resp. decreciente) si, para cada natural n, $x_n \leq x_{n+1}$ (resp. $x_n \geq x_{n+1}$).

6. es **convergente** si existe un número real x verificando lo siguiente:

   "para cada intervalo centrado en x, existe un término de la sucesión, a partir del cual, todos los restantes términos están incluidos en dicho intervalo ",

   o escrito en lenguaje formal

$$\forall\varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que } \text{ para todo } n \geq N \text{ se verifica que } |x_n - x| < \varepsilon.$$

   En tal caso x es único y se dice que el **límite** de la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ó que la sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **converge a** x, y suele notarse por

$$x = lim_n x_n \qquad \text{ó} \qquad \{x_n\} \longrightarrow x.$$

Es fácil ver que toda sucesión convergente está acotada. Sin embargo, la sucesión $\{1, 0, 1, 0, ...\}$ que está mayorada por 1 y minorada por 0, luego acotada, demuestra que existen sucesiones acotadas que no son convergentes.

En el siguiente resultado recogemos más propiedades importantes de las sucesiones.

Proposición 1.3.1.

1.- Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números reales, $x \in \mathbb{R}$ y $p \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ es convergente a x si, y sólo si, la sucesión $\{x_{n+p}\}$ converge también a x

2.- La sucesión $\{x_n\}$ converge a cero, si y sólo si la sucesión $\{|x_n|\}$converge a cero.

3.- Toda sucesión creciente y mayorada $\{x_n\}$ es convergente a $x = Sup\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

4.- Toda sucesión decreciente y minorada $\{x_n\}$ es convergente a $x = Inf\{x_n;\ n \in \mathbb{N}\}$. En particular la sucesión $\{1/n^\alpha\}$ converge a cero para todo $\alpha > 0$.

5.- Sean $x, y \in \mathbb{R}$ y sea $\{x_n\}$ una sucesión convergente a x. Si para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq y$, entonces $x \geq y$. En particular si $\{y_n\}$ y $\{z_n\}$ son dos sucesiones de números reales tales que,

   a*) para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n \leq z_n$,*

   b*) $lim_n z_n = x$,*

   entonces la sucesión $\{y_n\}$ converge también a x.

6.- *Si* $\{x_n\}$*e* $\{y_n\}$ *son dos sucesiones convergentes respectivamente a* x *e* y*, entonces la sucesión*

a) **suma**, *esto es, la sucesión* $\{x_n + y_n\}$ *converge a* $x + y$.

b) **producto**, *esto es, la sucesión* $\{x_n y_n\}$ *converge a* xy.

c) **cociente**, *esto es, la sucesión* $\{x_n/y_n\}$, *converge a* x/y *siempre que* $y \neq 0$ *e* $y_n \neq 0$, *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

7.- *El producto de una sucesión acotada por una convergente a cero es una sucesión convergente a cero.*

Ejemplo:

Pruébese que si $|x| < 1$, entonces la sucesión $\{x^n\}$ converge a cero.

1.3.2. Sucesiones divergentes

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge positivamente** si

$$\forall M, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que para todo } n \geq N \text{ se verifica que } x_n > M.$$

Este hecho suele notarse por

$$lim_n x_n = +\infty$$

ó

$$\{x_n\} \longrightarrow +\infty.$$

Se dice que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ **diverge negativamente** si

$$\forall M < 0, \exists N \in \mathbb{N}, \text{ tal que para todo } n \geq N \text{ se verifica que } x_n < M.$$

Este hecho suele notarse por

$$lim_n x_n = -\infty$$

ó

$$\{x_n\} \longrightarrow -\infty.$$

Diremos que una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es **divergente** si lo es positivamente o lo es negativamente.

Veamos ahora algunas propiedades de las sucesiones divergentes.

Proposición 1.3.2.

1.- Sean $\{x_n\}$ una sucesión de números reales y $p \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente si, y sólo si, la sucesión $\{x_{n+p}\}$ diverge positivamente.

2.- Toda sucesión creciente y no mayorada diverge positivamente. En particular la sucesión $\{r^n\}$ diverge positivamente si $r > 1$.

3.- Toda sucesión decreciente y no minorada diverge negativamente.

4.- Sean $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ dos sucesiones de números reales tales que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq y_n$. Si la sucesión $\{x_n\}$ diverge positivamente, entonces la sucesión $\{y_n\}$ también diverge positivamente.

5.- Si $\{x_n\}$ es una sucesión de términos positivos entonces converge a cero si, y sólo si, la sucesión $\{1/x_n\}$ divergente positivamente. En particular la sucesión $\{n^\alpha\}$ diverge positivamente para todo $\alpha > 0$.

1.3.3. Relación de ejercicios

1. Pruébse que si $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ son dos sucesiones acotadas, entonces $\{x_n + y_n\}$ y $\{x_n y_n\}$ también lo son.
2. Estúdiese la convergencia de la sucesión $\{x_n\}$ en los siguientes casos:
   a) $x_1 = \sqrt{2}, x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
   b) $x_1 = 1, x_{n+1} = \sqrt{2x_n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$.
3. Estúdiese la convergencia de las siguientes sucesiones:
   a) $\{sen(n)/n\}$.
   b) $\{cos(n^2 + 1)/n\}$.

1.4. Límite Funcional.

Sumario

Esta lección trata del concepto de límite funcional, uno de los más importantes de toda la matemática. De forma intuitiva, una función tiene límite L en un punto x_0 si en todo punto próximo a x_0 la función toma un valor próximo a L. Para una formulación más rigurosa introduciremos previamente el concepto de punto de acumulación de un conjunto. Finalmente diremos que el concepto de límite funcional está muy relacionado con los conceptos de continuidad y de derivación de una función real de variable real. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.4.1. Puntos de acumulación.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales. Se dice que x_0 es un **punto de acumulación** de A,

"si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, distintos de x_0, y convergente al propio x_0,

ó, escrito en lenguaje de intervalos,

"si todo intervalo centrado en x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A,

lo que a su vez en lenguaje formal se expresa:

$$x_0 \in A' \Longleftrightarrow]x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon[\cap A\backslash\{x_0\} \neq \emptyset, \ \forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+.$$

Denominaremos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A

Diremos que x_0 es un **punto de acumulación de A por la derecha** si $x_0 \in (A^+_{x_0})'$, donde

$$A^+_{x_0} = \{x \in A;\ x > x_0\},$$

lo que en lenguaje de sucesiones puede escribirse,
" *si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, mayores que x_0, y convergente al propio x_0.* "

ó, escrito en lenguaje de intervalos,

" *si todo intervalo de extremo inferior x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A.* "

Diremos que x_0 es un **punto de acumulación de A por la izquierda** si $x_0 \in (A^-_{x_0})'$, donde

$$A^-_{x_0} = \{x \in A;\ x < x_0\},$$

lo que en lenguaje de sucesiones puede escribirse,

" *si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de elementos de A, menores que x_0, y convergente al propio x_0.*"

ó, escrito en lenguaje de intervalos,

" *si todo intervalo cuyo extremo superior es x_0 tiene algún punto, distinto del propio x_0, en común con A,* "

Es fácil probar que $x_0 \in A'$ si, y sólo si $x_0 \in (A^-_{x_0})' \cup (A^+_{x_0})'$

1.4.2. Límite funcional y límites laterales.

Límite funcional:

Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en el punto** x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, distintos de x_0, convergente a x_0, la sucesión imagen $\{f(x_n)\}$ converge a L".

o en lenguaje más formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A \ 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

El tal valor L, si existe es único y recibe el nombre de **límite** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \ \text{ ó } f(x)_{x \to x_0} \longrightarrow L.$$

Observación 1.4.1. Es importante hacer notar que la igualdad anterior encierra dos afirmaciones: que f tiene límite en el punto x_0 y que dicho límite vale L.

Límites laterales:

Supongamos que $x_0 \in (A^+_{x_0})'$. Se dice que f tiene **límite por la derecha** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, mayores que x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó en lenguaje formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, \ 0 < x - x_0 < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si tal L existe, entonces es único y diremos que L es el **límite por la derecha** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$

Supongamos que $x_0 \in (A^-_{x_0})'$. Se dice que f tiene **límite por la izquierda** en el punto x_0 si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A, menores que x_0, convergente a x_0, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L".

ó en lenguaje formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, \ 0 < x_0 - x < \delta \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Si tal L existe, entonces es único y diremos que L es el **límite por la izquierda** de f en el punto x_0 y escribiremos:

$$L = lim_{x \to x_0^-} f(x).$$

Relación entre el límite ordinario y los límites laterales

Proposición 1.4.2. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $x_0 \in A'$, $L \in \mathbb{R}$ y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función.*

1. *Si $x_0 \notin (A^-_{x_0})'$, entonces*
$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x \to x_0^+} f(x).$$
2. *Si $x_0 \notin (A^+_{x_0})'$, entonces*
$$L = lim_{x \to x_0} f(x) \text{ si, y sólo si, } L = lim_{x \to x_0^-} f(x).$$
3. *Si $x_0 \in (A^-_{x_0})' \bigcap (A^+_{x_0})'$, entonces*
$$lim_{x \to x_0} f(x) = L \text{ si, y sólo si, } lim_{x \to x_0^+} f(x) = lim_{x \to x_0^-} f(x) = L.$$

1.4.3. Límites en el infinito.

Sea A un subconjunto no vacío de números reales no mayorado y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que f **tiene límite en** $+\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

"Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que diverge positivamente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L",

ó dicho en lenguaje más formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \text{ tal que si } x \in A,\ x > M \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

El tal límite L, caso de existir, es único. Diremos que L es el **límite en** $+\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x \to +\infty} f(x).$$

Nota

Nótese que si $\mathbb{N} \subseteq A$ y $L = lim_{x \to +\infty} f(x)$, en particular, el límite de la sucesión $\{f(n)\}$ es L. Este hecho nos proporciona un nuevo método para el cálculo de límite de sucesiones.

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no minorado, se dice que f **tiene límite en** $-\infty$ si existe un número real L con la siguiente propiedad:

" Para cada sucesión $\{x_n\}$ de elementos de A que diverge negativamente, la sucesión $\{f(x_n)\}$ converge a L ".

ó dicho en lenguaje más formal:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists M, \text{ tal que si } x \in A,\ x < M, \text{entonces } |f(x) - L| < \varepsilon.$$

En todo caso diremos que L es el **límite en** $-\infty$ de f y escribiremos:

$$L = lim_{x \to -\infty} f(x).$$

1.4.4. Funciones divergentes

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $x_0 \in A'$. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

" *Para cada sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de A, distintos de* x_0*, convergente a* x_0*, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *diverge positivamente,*"

dicho en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A \text{y} 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } f(x) > M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty.$$

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $x_0 \in A'$. Se dice que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge negativamente en el punto** x_0 si verifica la siguiente propiedad:

"*Para cada sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de A, distintos de* x_0*, convergente a* x_0*, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *diverge negativamente,*"

dicho en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A \text{ y} 0 < |x - x_0| < \delta, \text{ entonces } f(x) < M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty.$$

Si A es un subconjunto no vacío de números reales no mayorado. Diremos que la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ **diverge positivamente en** $+\infty$ si verifica la siguiente propiedad:

" *Para cada sucesión* $\{x_n\}$ *de elementos de A que diverge positivamente, la sucesión* $\{f(x_n)\}$ *diverge positivamente.*"

dicho en lenguaje más formal:

$$\forall M, \exists N, \text{ tal que si } x \in A \text{ y} N < x \text{ entonces } f(x) > M.$$

Y escribiremos:

$$lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

Análogamente se pueden definir las funciones divergentes negativamente en $+\infty$ y las funciones divergentes negativa y positivamente en $-\infty$.

Antes de finalizar esta sección queremos recordar el comportamiento de algunas funciones elementales en infinito o en los puntos extremos del dominio.

Proposición 1.4.3.

1.- $lim_{x\to+\infty}\ e^x = +\infty,$

2.- $lim_{x\to-\infty}\ e^x = 0$

3.- $lim_{x\to+\infty}\ log(x) = +\infty,$

4.- $lim_{x\to0^+}\ log(x) = -\infty,$

5.- $lim_{x\to\pm\pi/2}\ tg(x) = \pm\infty,$

6.- $lim_{x\to\pm\infty}\ arctg(x) = \pm\pi/2.$

1.4.5. Algebra de límites.

Necesitamos ahora expresar qué ocurre con los límites de funciones cuando sumo, multiplico o divido funciones que tienen límite o son divergentes.

Teorema 1.4.4. *(de la suma de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in A'$. *Supongamos que* $lim_{x\to x_0}f(x) = L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$ *y que* $lim_{x\to x_0}g(x) = M \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. *Entonces la función suma* $f + g$ *converge o diverge en* x_0 *según lo expresado en la siguiente tabla:*

$lim(f+g)$	$L \in \mathbb{R}$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}$	$L + M$	$+\infty$	$-\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$-\infty$

Teorema 1.4.5. *(del producto de funciones)*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *y sea* $x_0 \in A'$. *Supongamos que* $lim_{x\to x_0}f(x) = L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$ *y que* $lim_{x\to x_0}g(x) = M \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. *Entonces la función producto* $f.g$ *converge o diverge en* x_0 *según lo expresado en la siguiente tabla:*

$lim(f.g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	LM	0	LM	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0$	0	0	0	?	?
$M \in \mathbb{R}^-$	LM	0	LM	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = -\infty$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

Además si $L = 0$ *y* g *es una función acotada, entonces*

$$lim_{x\to x_0}f(x).g(x) = 0.$$

Teorema 1.4.6. *(del cociente de funciones)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $g(x) \neq 0$ y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función cociente f/g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$lim(f/g)$	$L \in \mathbb{R}^+$	$L = 0$	$L \in \mathbb{R}^-$	$L = +\infty$	$L = -\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	L/M	0	L/M	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) > 0$	$+\infty$	?	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$M = 0,\ g(x) < 0$	$-\infty$	?	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$M \in \mathbb{R}^-$	L/M	0	L/M	$-\infty$	$+\infty$
$M = +\infty$	0	0	0	?	?
$M = -\infty$	0	0	0	?	?

Observación 1.4.7. El símbolo ? que aparece en las tablas indica que el resultado depende de las funciones f y g concretas.

1.4.6. Límites de funciones de tipo exponencial

Necesitamos ahora conocer qué ocurre con los límites de funciones de tipo exponencial. La idea que subyace en todo lo que sigue es la continuidad de la funciones logaritmo y exponencial.

Teorema 1.4.8. *(f^g)*

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$, y sea $x_0 \in A'$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}_0^+ \bigcup \{+\infty\}$ y que $lim_{x \to x_0} g(x) = M \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces la función f^g converge o diverge en x_0 según lo expresado en la siguiente tabla:

$limf^g$	$L = 0$	$0 < L < 1$	$L = 1$	$L > 1$	$L = +\infty$
$M \in \mathbb{R}^+$	0	L^M	1	L^M	$+\infty$
$M = 0$	?	1	1	1	?
$M \in \mathbb{R}^-$	$+\infty$	L^M	1	L^M	0
$M = +\infty$	0	0	?	$+\infty$	$+\infty$
$M = -\infty$	$+\infty$	$+\infty$	?	0	0

Las posibles indeterminaciones son de la forma: 0^0, 1^∞ e ∞^0. Éstas se resolverán intentando traducirlas en términos de cocientes, para luego aplicar las prometidas reglas de L+Hopital, de la siguiente forma:

Proposición 1.4.9. *Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$. Sean $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty, -\infty\}$. Supongamos que $lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty, 0$ (resp. 1) y que $lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ (resp. $\pm\infty$). Entonces*

$$lim_{x \to x_0} f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x \to x_0} g(x) log(f(x)).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to+\infty}x^{1/x}$.

Además, para la indeterminación del tipo 1^{∞}, se tiene la siguiente técnica propia:

Proposición 1.4.10. *(1^{∞})*
Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ tales que, para cada $x \in A$, $f(x) > 0$. Sean $x_0 \in A'$ y $L \in \mathbb{R}\bigcup\{+\infty, -\infty\}$. Supongamos que $lim_{x\to x_0}f(x) = 1$ y que $lim_{x\to x_0}g(x) = +\infty$. Entonces

$$lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)} = e^L \Longleftrightarrow L = lim_{x\to x_0}g(x)(f(x) - 1).$$

Como ejemplo podemos calcular $lim_{x\to+\infty}(1 + 1/x)^x$.

1.4.7. Indeterminaciones

Estos resultados inciertos reciben el nombre de **indeterminaciones**. Así pues, vistos los teoremas anteriores, las posibles indeterminaciones de la forma: $\infty - \infty$, $0.\infty$, $0/0$ e ∞/∞.

En las siguientes lecciones veremos cómo resolver algunas de estas indeterminaciones. Basten ahora algunos ejemplos y comentarios.

1.) Límite en el infinito de un polinomio

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, entonces

$lim_{x\to+\infty}p(x) =$signo$(a_n)\infty$.

$lim_{x\to-\infty}p(x) = (-1)^n$signo$(a_n)$ ∞.

2.) Límite en el infinito de un cociente de polinomios.

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1 + a_0$, y $q(x) = b_p x^p + b_{p-1}x^{p-1} + ... + b_1 + b_0$, entonces

$$lim_{x\to+\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} signo(a_n/b_p)\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

$$lim_{x\to-\infty}\frac{p(x)}{q(x)} = \begin{cases} signo(a_n/b_p)(-1)^{n-p}\infty & si\ n > p \\ a_n/b_p & si\ n = p \\ 0 & si\ n < p \end{cases}$$

3.) En general, las indeterminaciones ∞/∞, $0.\infty$ y $0/0$ se resolverán con las reglas de L+Hôpital que veremos más adelante. No obstante adelantamos la siguiente escala de infinitos que ratificaremos en su momento con las susodichas reglas. En este sentido podemos decir que:

$$x^x \succ e^x \succ x^a \succ (log x)^b,$$

donde $f(x) \succ g(x)$ significa que

$$lim_{x\to+\infty}[f(x)/g(x)] = +\infty.$$

Como ejemplo, podemos calcular $lim_{x\to+\infty}\frac{1+logx+e^x}{x^5}$

1.4.8. Funciones asintóticamente equivalentes.

Sería útil, para calcular límites, sustituir funciones de aspecto complejo por otras funciones más sencillas. Este proceso puede llevarse a cabo considerando funciones cuyo cociente converge a uno.

Dadas dos funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, y dado $x_0 \in A'$. Se dice que ambas funciones son **asintóticamente equivalentes en** x_0 si

$$lim_{x\to x_0} f(x)/g(x) = 1.$$

Ejemplos de funciones asintóticamente equivalentes en $x_0 = 0$ son $senx$, tgx, $log(1 + x)$ y x, esto es,

$$lim_{x\to 0}[sen(x)/x] = 1 = lim_{x\to}[tg(x)/log(1 + x)] = lim_{x\to 0}[tg(x)/x] = 1.$$

1.4.9. Relación de ejercicios

1. Estúdiense los siguientes límites funcionales:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{7x+4}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{5x+3}{2x^2+1},$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{x^2+4}{x-2}, \qquad \lim_{x\to 2}\frac{x^2+4}{x-2},$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}, \qquad \lim_{x\to-\infty}\frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}},$$

1.5. Funciones continuas

Sumario

En esta lección tratamos del concepto de continuidad, una de las ideas más fascinantes de toda la matemática. Aquí daremos la definición de función continua y su relación con el concepto de límite funcional. También mostraremos algunas de las propiedades que hacen que las funciones continuas sean tan interesantes. Así mismo observaremos que las funciones elementales son funciones continuas. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

1.5.1. Continuidad

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $a \in A$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función continua en** a si verifica la siguiente propiedad:

" *para cada intervalo J centrado en $f(a)$, existe un intervalo I centrado en a tal que $f(I \cap A) \subseteq J$,* "

esto es, en lenguaje más formal

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, |x-a| \leq \delta \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Dado $B \subseteq A$, se dice que f es **continua en B** si lo es en todos los puntos de B.

Es pues claro que la función identidad, las funciones constantes y la función valor absoluto son funciones continuas en $\mathbb{R}$.

Veamos que la continuidad está estrechamente relacionada con el límite funcional.

Proposición 1.5.1. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función . Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. *Si a es un punto aislado de A, entonces f es una función continua en a.*
2. *Si $a \in A \bigcap A'$, entonces f es continua en a si, y sólo si, $lim_{x \to a} f(x) = f(a)$.*

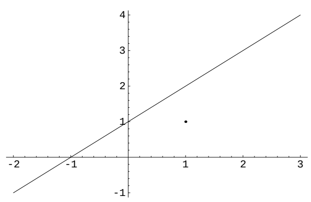
Observación 1.5.2. Obsérvese que si $a \notin A$ no tiene sentido hablar de continuidad, Así pues, puede ocurrir que una función tenga límite en un punto $a \in A'$ y que no tenga sentido hablar de continuidad en a ($a \notin A$). Por otra parte, obsérvese que si una función es continua en un punto de acumulación, la función y el límite "conmutan".

1.5.2. Ejemplos

1. La función $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la siguiente expresión:

$$f(x) = \begin{cases} x+1 & \text{si } x \neq 1 \\ 1 & \text{si } x = 1. \end{cases}$$

presenta una discontinuidad en 1, lo cual podía haberse adivinado si hubiésemos pintado previamente su gráfica



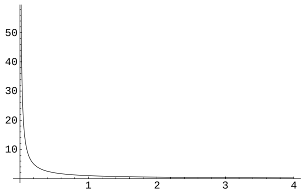
2. La función parte entera presenta una discontinuidad en todos los números enteros.
3. La función $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida mediante la expresión:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x & \text{si } x \in \mathbb{R}^+ \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

presenta una discontinuidad esencial en 0.

Este hecho puede adivinarse cuando observamos su gráfica:

4. Las funciones logaritmo neperiano, seno y coseno son continuas en sus dominios.



Además se tiene

Proposición 1.5.3. *Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas en a. Entonces $f+g$, $f.g$ son dos funciones continuas en a. Si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también continua en a.*

Como consecuencia obtenemos que las funciones racionales y la función tangente son también continuas en sus dominios correspondientes.

Proposición 1.5.4. *Sea I un intervalo de números reales y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua e inyectiva en I. Entonces la función inversa f^{-1} es continua en $f(I)$.*

Como consecuencia obtenemos que las funciones exponencial, arcocoseno, arcoseno y arcotangente son continuas en sus correspondientes dominios.

Proposición 1.5.5. *Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en $f(a)$. Entonces $g \circ f$, es una función continua en a.*

Como consecuencia obtenemos que las funciones exponenciales y potenciales son continuas en $\mathbb{R}$ y $\mathbb{R}^+$ respectivamente.

1.5.3. Propiedades de las funciones continuas: Teoremas de Bolzano, del valor intermedio y de conservación de la compacidad.

Enunciemos ahora algunas de las propiedades más emblemáticas de las funciones continuas.

Proposición 1.5.6. *(La continuidad es una propiedad local)*

Sean A un subconjunto de numeros reales, B un subconjunto de A, $a \in B$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces

1. *Si f es continua en a, entonces $f/_B$ es una función continua en a.*

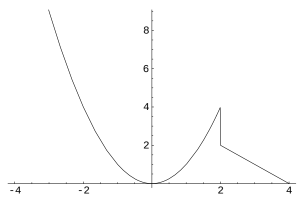
2. *Si* $f/_B$ *es continua en* a *y existe un intervalo centrado en* a*,* I*, tal que* $I \bigcap A \subseteq B$*, entonces* f *es una función continua en* a*.*

Observación 1.5.7. La proposición anterior es muy útil para estudiar la continuidad de una función definida a trozos.

Como ejemplo estudiemos la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+4 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue:



Dado que la función x^2 es continua en $\mathbb{R}$, entonces $f/_{]-\infty,2]} = x^2/_{]-\infty,2]}$ es continua en todos los puntos del intervalo $]-\infty, 2]$, luego por el apartado (2), f es continua en $]\infty, 2[$. Idéntico razonamiento puede seguirse para el intervalo $]2, +\infty[$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta una discontinuidad de salto. Compruébese. Obsérvese además que en cambio la función $f/]-\infty, 2]$ es continua en 2.

Proposición 1.5.8. *(propiedad de conservación del signo)*
Sean A *un subconjunto de numeros reales,* $a \in A$ *y* $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua en* a*. Si* $f(a) \neq 0$ *Entonces existe un intervalo centrado en* a*,* I*, tal que para cada* $x \in I \bigcap A$*,* $f(x)f(a) > 0$*.*

Teorema 1.5.9. *(de los ceros de Bolzano)*
Sean $[a, b]$ *un intervalo de numeros reales, y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua. Si* $f(a).f(b) < 0$*, entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f(c) = 0$*.*

Enunciemos finalmente las dos propiedades más importantes y que más usaremos en adelante.

Teorema 1.5.10. *(del valor intermedio)*

Sean I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.

Teorema 1.5.11. *(de conservación de la compacidad)*

Sean $[a, b]$ un intervalo de numeros reales, y $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f está acotada y alcanza sus valores máximo y mínimo.

Recuérdese que f está acotada si el conjunto imagen $f([a, b])$ está acotado. Así pues, la tesis del último teorema puede expresarse diciendo que existen $c, d \in \mathbb{R}$ tales que $f([a, b]) = [c, d]$.

1.5.4. Resolución Numérica de Ecuaciones.

El teorema de Bolzno nos proporciona dos métodos útiles para localizar las raíces de una ecuación, llamados **método de la bisección** y el **método de la secante** ó **método regula falsi".**

El primer método consiste en evaluar la función en los extremos del intervalo, si hay cambio de signo se considera el centro del intervalo como un nuevo extremo de los dos subintervalos de igual longitud en que queda divido el intervalo inicial. En aquel subintervalo en el que los valores de f en sus extremos sean de signo diferente se vuelve a partir en dos, para volver a empezar. De esta manera cada vez que realizamos esta partición, la solución queda localizada en un intervalo de menor longitud.

El segundo método es muy similar al primero. Se evalúa la función en los extremos del intervalo, si hay cambio de signo, se traza la recta que une los puntos extremos de la gráfica. Ésta debe cortar al eje x en un nuevo punto. Se construyen ahora los subintervalos formados por el extremo correspondiente y este nuevo punto. En aquel subintervalo en el que los valores de f en sus extremos sean de signo diferente se vuelve a partir en dos siguiendo la misma construcción, y así sucesivamente.

1.5.5. Relación de Ejercicios

1. Estúdiese la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

   a) $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \quad \forall x \in \mathbb{R}.$

   b) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^{1/x}}, & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}$

   c) $f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x}, & \text{si} \quad x < 0 \\ x, & \text{si} \quad 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x}, & \text{si} \quad x \geq 1 \end{cases}$

2. Dése un ejemplo de función ...

   a) continua cuya imagen no es un intervalo.

   b) no continua en un intervalo y cuya imagen es un intervalo.

   c) continua en $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un intervalo acotado.

   d) continua en $[0, 1[$ cuya imagen no es acotada.

   e) continua en un intervalo abierto acotado cuya imagen es un intervalo cerrado y acotado.

3. Para cada una de las siguientes funciones polinómicas f, hállese un entero n tal que $f(x) = 0$ para algún x entre n y $n + 1$.

   i) $f(x) = x^3 + x + 3$

   ii) $f(x) = x^5 + 5x^4 + 2x + 1$

   iii) $f(x) = x^5 + x + 1$

   iv) $f(x) = 4x^2 - 4x + 1$.

4. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

5. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.

6. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua en $[0, 1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo, es decir, que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

7. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

8. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el Sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del Domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del Domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del Sábado.

9. Un corredor recorre 6 Km. en 30 minutos. Pruébese que existe un intervalo de 5 minutos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.

Capítulo 2

Cálculo diferencial en una variable

2.1. Funciones derivables

Sumario

La idea de derivada fue originada por el problema de dibujar una tangente a una curva. Fermat, en el siglo XVII, tratando de determinar los máximos y mínimos de ciertas funciones, observó que si la gráfica de dichas funciones, en un determinado punto, tiene asociada una recta tangente horizontal, dicho punto es un candidato a máximo o mínimo. Estas ideas desembocaron en el concepto de derivada e inmediatamente se observó que era un instrumento válido también para el cálculo de velocidades, y en general, para el estudio de la variación de una función. En esta lección introduciremos el concepto de función derivable, prestaremos atención al problema original de determinar la tangente a una curva dada y estudiaremos algunas de sus propiedades; Enunciaremos el teorema del valor medio y obtendremos algunas consecuencias muy importantes: La relación entre monotonía y derivabilidad, la derivación de la función inversa y las reglas de LťHôpital para la resolución de algunas indeterminaciones en el cálculo de límites. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.1.1. Derivada. Recta tangente

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $a \in A \cap A'$. Se dice que $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función derivable en** a si existe el siguiente límite:

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El límite recibe el nombre de **derivada de f en el punto** a y se nota por $f'(a)$.

Dado un subconjunto B de $A\cap A'$, se dice que f **es derivable en** B si es derivable en todos los puntos de B.

Es claro que la función identidad I y toda función constante,C, son funciones derivables en todo $\mathbb{R}$, con $I'=1$ y $C'=0$, mientras que la función valor absoluto es derivable en todos los puntos de $\mathbb{R}$ salvo en cero, y para cada $x\in\mathbb{R}^*$,

$$(|x|)'=|x|/x.$$

El siguiente resultado nos da la relación entre los conceptos de continuidad y de derivación.

Proposición 2.1.1. *Sean A un subconjunto no vacío de números reales, $a\in A\bigcap A'$ y una función $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *f es derivable en a.*

2. *f es continua en a y existe una función afín g tal que*

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)-g(x)}{x-a}=0.$$

2.1.2. Recta tangente

Vamos ahora a interpretar geométricamente la existencia de esta función afín.

Obsérvese que cualquier recta que pase por el punto $(a,f(a))$ tiene la forma

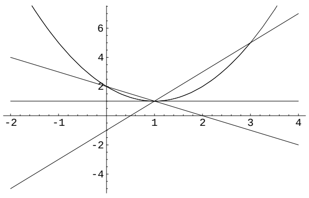
$$y=m(x-a)+f(a).$$

Es claro que manipulando la igualdad del apartado b) obtenemos que

$$g(x)=f'(a)(x-a)+f(a)$$

y por tanto su gráfica es una recta del tipo anterior con $m=f'(a)$; la condición sobre el límite del cociente del apartado 2) nos asegura que la gráfica de la función afín g es la que mejor se aproxima a la gráfica de la función f en las proximidades del punto a.

Así por ejemplo si consideramos la función $f(x)=(x-1)^2+1$ y el punto $(1,1)$, se tiene que



y por tanto es visible que la recta horizontal es la que mayor "parecido"tiene con la parábola en las ”proximidades” del punto $(1, 1)$.

La recta $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ recibe el nombre de **recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(a, f(a))$

Ejemplos

Las funciones logaritmo neperiano, seno y coseno son derivables en sus respectivos dominios. Además para cada x del dominio correspondiente,

$$log'(x) = 1/x, \quad sen'(x) = cos(x), \quad cos'(x) = -sen(x).$$

También la suma, el producto y el cociente de funciones derivables es una función derivable.

Proposición 2.1.2. *Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables en a. Entonces $f + g$ y $f.g$ son dos funciones derivables en a, y se tiene que*

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a), \quad (f.g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

Si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces f/g es también derivable en a y se tiene que

$$(f/g)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Como consecuencia obtenemos que las funciones racionales y la función tangente son también derivables en su dominio. De hecho, para cada $x \in \mathbb{R} \backslash \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$,

$$tg'(x) = 1 + tg^2(x).$$

También las cosas van bien cuando componemos dos funciones derivables.

Teorema 2.1.3. *(regla de la cadena)*

Sean A un subconjunto de números reales, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en a. Sean ahora $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $f(a)$. Entonces $g \circ f$, es una función derivable en a y se tiene que

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)).f'(a).$$

Como consecuencia obtenemos que

Corolario 2.1.4. *Si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^+$ es una función derivable en a, entonces*

$$(log f(a))' = \frac{f'(a)}{f(a)}.$$

2.1.3. Propiedades de las funciones derivables: Teoremas de Rolle y del valor medio, y reglas de L+Hôpital.

Enunciemos ahora algunas propiedades y características de las funciones derivables.

Proposición 2.1.5. *(La derivabilidad es una propiedad local)*
Sean A un subconjunto de numeros reales, B un subconjunto de A, $a \in B \bigcap B'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Entonces

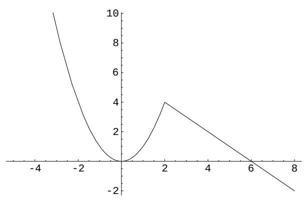
1. *Si f es derivable en a, entonces $f/_B$ es una función derivable en a y $f'(a) = (f/_B)'(a)$.*
2. *Si $f/_B$ es derivable en a y existe un intervalo centrado en a, I, tal que $I \bigcap A \subseteq B$, entonces f es una función derivable en a y $f'(a) = (f/_B)'(a)$.*

Observación 2.1.6. La proposición anterior es muy útil para estudiar la derivabilidad de una función definida en varias ramas.

Como ejemplo estudiemos la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x+6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

cuya gráfica es como sigue



Dado que la función x^2 es derivable en $\mathbb{R}$, entonces $f/_{]-\infty,2]} = x^2/_{]-\infty,2]}$ es derivable en todos los puntos del intervalo $]-\infty, 2]$, luego por el apartado (2), f es derivable en $]\infty, 2[$. Idéntico razonamiento puede seguirse para el intervalo $]2, +\infty[$.

¿Qué ocurre en el punto 2? Como se desprende de la observación de su gráfica, la función presenta un "pico", luego pensamos que no es derivable en 2. Compruébese. Obsérvese además que en cambio la función $f/]-\infty, 2]$ es derivable en 2.

En los siguientes resultados usaremos como dominios sólo intervalos, ya que en éstos todos los puntos, incluso sus extremos sean o no del intervalo, son puntos de acumulación.

Teorema 2.1.7. *(de Rolle)*
Sean $[a, b]$ *un intervalo de numeros reales, y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y derivable en* $]a, b[$ *verificando que* $f(a) = f(b)$. *Entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que* $f'(c) = 0$.

La demostración del teorema es consecuencia del siguiente resultado

Lema 2.1.8. *Sea* I *un intervalo de números reales. Si* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *es una función derivable en un punto interior* c *de* I *tal que* $f(x) \geq f(c)$ *ó* $f(x) \leq f(c)$, $\forall x \in I$, *entonces* $f'(c) = 0$.

Observación 2.1.9. La combinación de este teorema y del teorema de Bolzano es determinante a la hora de calcular el número de soluciones de una ecuación en un determinado intervalo. A este respecto resulta interesante releer el teorema de Rolle en la siguiente:

"*Si* f' *no se anula en el intervalo* $]a, b[$, *la ecuación* $f(x) = 0$ *tiene como mucho una única solución en el intervalo* $[a, b]$ ".

El siguiente resultado no es más que otra versión del teorema de Rolle.

Teorema 2.1.10. *(del valor medio)*
Sean $[a, b]$ *un intervalo de numeros reales, y* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función continua y derivable en* $]a, b[$. *Entonces existe* $c \in]a, b[$ *tal que*

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

Como primera consecuencia obtenemos la siguiente relación entre el signo de la derivada y la monotonía de la función:

Corolario 2.1.11. *(monotonía de una función derivable)*
Sea I *un intervalo de numeros reales, y* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función derivable. Entonces se verifican las siguientes afirmaciones:*

1. f *es creciente si, y sólo si* $f'(x) \geq 0$, $\forall x \in I$.
2. f *es decreciente si, y sólo si* $f'(x) \leq 0$, $\forall x \in I$.
3. *Si* $f'(x) = 0, \forall x \in I$, *si, y sólo* f *es constante.*
4. *Si* $f'(x) > 0$ $\forall x \in I$, *entonces* f *es estrictamente creciente.*
5. *Si* $f'(x) < 0$ $\forall x \in I$, *entonces* f *es estrictamente decreciente.*
6. *Si* $f'(x) \neq 0$ $\forall x \in I$, *entonces* f *es estrictamente monótona.*

Al igual que ocurre con el teorema de Rolle, la información dada en este último corolario es muy importante para la localización de las soluciones de una ecuación del tipo $f(x) = 0$, cuando la función f es derivable.

Como segunda consecuencia, obtenemos cuándo la función inversa es derivable y cuánto vale su derivada:

Corolario 2.1.12. *(derivación de la función inversa)*
Sea I un intervalo de numeros reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable tal que $f'(x) \neq 0$. Entonces f^{-1} es derivable en $f(I)$ y para cada $x \in I$, se tiene que

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

A partir de aquí, obtenemos que también las funciones exponencial, arcocoseno, arcoseno y arcotangente son derivables. De hecho, para cada x en el correspondiente dominio se tiene que

$$(e^x)' = e^x, \qquad (arctg)'(x) = \frac{1}{1+x^2},$$

$$(arc\ cos)'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}, \qquad (arc\ sen)'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Y si se quiere, usando la regla de la cadena, si $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable en a y tal que $f(A)$ está contenido en el correspondiente dominio, entonces

$$(e^{f(a)})' = f'(a)e^{f(a)}, \qquad (arctg)'(f(a)) = \frac{f'(a)}{1+f^2(a)},$$

$$(arc\ cos)'(f(a)) = \frac{-f'(a)}{\sqrt{1-f^2(a)}}, \qquad (arc\ sen)'(f(a)) = \frac{f'(a))}{\sqrt{1-f^2(a)}}.$$

Además si $f(A)$ está contenido en $\mathbb{R}^+$ y $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es otra función derivable también en a, entonces la función $h = f^g$ es derivable en a y

$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Para calcular derivadas tan complicadas como la anterior podemos usar la técnica logarítmica. El procedimiento es como sigue.

Técnica logarítmica

1. Tomamos logaritmos en la igualdad que define a h.

$$log(h(x)) = g(x)log(f(x)).$$

2. Derivamos ambas igualdades en el punto a

$$\frac{h'(a)}{h(a)} = g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}.$$

3. Finalmente despejamos y obtenemos que

$$h'(a) = f(a)^{g(a)}[g'(a)log(f(a)) + g(a)\frac{f'(a)}{f(a)}].$$

Como ejercicio calcúlese la función derivada de $f(x) = x^{x^x}$ en $\mathbb{R}^+$.

La tercera y última consecuencia a señalar en esta lección es una potente herramienta que nos va a permitir resolver muchas de las indeterminaciones presentadas en la lección I.5 relativas a la convergencia de las funciones.

Corolario 2.1.13. *(Reglas de L+Hôpital)*
Sea I un intervalo de números reales, $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ y $a \in I$ y supongamos que $f, g : I \backslash \{a\} \longrightarrow \mathbb{R}$ son dos funciones tales que

1. f y g son derivables,

2. $g'(x) \neq 0$,

a) **Primera Regla de L+Hôpital**

$$lim_{x\to a}f(x) = lim_{x\to a}g(x) = 0,$$

ó

b) **Segunda Regla de L+Hôpital**:
la función $|g|$ diverge positivamente en a,

Si $lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$. entonces

$$lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Observación 2.1.14. Las Reglas de L'Hôpital siguen permaneciendo válidas si, en el caso en que el intervalo I no esté mayorado, sustituimos los límites en a por límites en $+\infty$. Análogamente para límites en $-\infty$.

Finalmente damos una consecuencia práctica para calcular la derivada de algunas funciones definidas a trozos.

Corolario 2.1.15. *Sea I un intervalo, $a \in I$ y $h : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en a y derivable al menos en $I\backslash\{a\}$. Si h' tiene límite en el punto a entonces h es derivable en a y*

$$h'(a) = lim_{x\to a}h'(x).$$

2.1.4. Relación de ejercicios

1. Calcúlese la derivada de las siguientes funciones cuyas ley viene dada por:

   a) $f(x) = sen(x+3)$.
   b) $f(x) = cos^2(x^3)$.
   c) $f(x) = 1/cos(x)$.
   d) $f(x) = \sqrt{(1+x)/(1-x)}$.
   e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.
   f) $f(x) = (\sqrt[3]{x} - 1/\sqrt[5]{x})^5$.
   g) $f(x) = cos(cos(cos(x)))$.
   h) $f(x) = x^4 e^x log(x)$.
   i) $f(x) = x^x$.
   j) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

2. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ que es paralela al eje $0X$.

3. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $P = (3, 10)$.
   b) $f(x) = cos(x)$ en el punto $P = (\pi/2, 0)$.
   c) $f(x) = |x|$ en el punto $P = (1, 1)$.
   d) $f(x) = x/x^2 + 1$ en el punto $P = (0, 0)$.

4. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, estúdiese la continuidad y la derivabilidad en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.
   b) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.
   c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \frac{2x}{1+|x|}$.

5. Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 + \alpha x + \beta$. Encuéntrense los valores de α y , β que hacen que el punto $(2, 4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x - y = 0$.

6. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \frac{\log(1 - senx) - 2log(cosx)}{senx} \quad (x \neq 0) \qquad f(0) = a.$$

   Estúdiese para qué valor de a la función f es continua en cero.

7. Estúdiese la derivabilidad y la existencia de límites en $+\infty$ y $-\infty$ de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida en cada caso por

a)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{1+e^x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

b)

$$f(x) = \begin{cases} \frac{e^x}{x} & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ \sqrt[5]{x} & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

8. Demuéstrese que, para cada $x > 0$, se verifica que

$$\frac{x}{1+x} < log(1+x) < x.$$

9. Demuéstrese que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$|sen(ax) - sen(ay)| \leq |a||x-y|.$$

10. Demuéstrese que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$|arctg(x) - arctg(y)| \leq |x-y|.$$

11. Sea $a > 0$. Pruébese que

$$ea/x \leq e^{a/x}, \quad \forall x > 0$$

y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

12. Sea $a > 0$ un número real que verfica

$$a^{x/a} \geq x, \quad \forall x > 0.$$

Pruébese que $a = e$.

13. Calcúlese el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

14. Calcúlese el número de soluciones de la ecuación $3logx - x = 0$.

15. Pruébese que $0 < a < 1$ se verfica

$$(1+x)^a \leq 1 + ax, \quad \forall x \geq -1.$$

16. Sea $a > 1$. Probar que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

17. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = x + logx + arctgx$$

pruébese que la ecuación $f(x) = 0$ tiene una única solución.

18. Pruébese que la ecuación

$$x + e^x + arctgx = 0$$

tiene una única raíz real. Dese un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

19. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Pruébese que la ecuación

$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$

tiene una solución real única.

20. Determínese el número de raíces reales de la ecuación

$$2x^3 - 3x^2 - 12x = m$$

según el valor de m.

21. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \operatorname{arctg}\frac{1+x}{1-x}$$

Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

22. Estúdiese el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) = sen(3x)/x \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 0.$
   b) $A = \mathbb{R}\backslash\{\pi/2 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z} \quad f(x) = (2x - \pi)/cos(x) \quad \forall x \in A, \quad \alpha = \pi/2.$
   c) $A = \mathbb{R}\backslash\{2, -2\}$, $\quad f(x) = (\sqrt{x^2+5} - 3)/x^2 - 4 \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$
   d) $A =]2, +\infty[$, $\quad f(x) = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}+\sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2-4}} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 2.$
   e) $A = \mathbb{R}^+\backslash\{1\}$, $\quad f(x) = \frac{1}{logx} - \frac{1}{x-1} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$
   f) $A =]1, +\infty[$, $\quad f(x) = \frac{x^x - x}{1-x-logx} \quad \forall x \in A, \quad \alpha = 1.$
   g) $A = \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) = \frac{1}{x^4} - \frac{1}{6x^2} - \frac{senx}{x^5}, \quad \alpha = 0.$
   h) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = (\frac{1}{tgx})^{senx}, \quad \alpha = \pi/2.$
   i) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = (1 + senx)^{cotgx}, \quad \alpha = 0.$
   j) $A = \mathbb{R}^+\backslash\{e\}$, $\quad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}, \quad \alpha = e.$
   k) $A = \mathbb{R}^+$, $\quad f(x) = \frac{1}{x}(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}), \quad \alpha = 0.$

23. Estúdiese el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

   a) $A = \mathbb{R}^+$, $\quad f(x) = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in A.$
   b) $A = \mathbb{R}^*$, $\quad f(x) = \frac{1-cosx}{x^2}, \quad \forall x \in A.$
   c) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = (senx + cosx)^{1/x}, \quad \forall x \in A.$
   d) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = \left(\cos x + \frac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$
   e) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = (1 - tgx)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$
   f) $A = \mathbb{R}^+$, $\quad f(x) = x^{senx}, \quad \forall x \in A.$
   g) $A =]0, \pi/2[$, $\quad f(x) = \frac{x - arctgx}{sen^3x}, \quad \forall x \in A.$

h) $A =]0, \pi/2[, \qquad f(x) = (\frac{1}{tgx})^{senx}, \qquad \forall x \in A.$

i) $A = \mathbb{R}^+ \backslash \{e\}, \qquad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}, \qquad \forall x \in A.$

24. Estúdiese el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

a) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \frac{log(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}},$

b) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{1/x}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \quad a \in \mathbb{R}^+,$

c) $A =]1, +\infty[\quad f(x) = \frac{x(x^{1/x}-1)}{logx},$

d) $A = \mathbb{R}\backslash\{e\}, \quad f(x) = x^{\frac{1}{logx-1}}.$

25. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que fy f' tienen límite en $+\infty$. Pruébese que $lim_{x \mapsto \infty} f'(x) = 0$.

26. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un a función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que para cada $x \in [0, 1]$, $|f'(x)| \leq |f(x)|$. Pruébese que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0, 1]$.

2.2. Extremos relativos. Polinomio de Taylor

Sumario

En esta lección vamos a seguir extrayendo consecuencias del teorema del valor medio: estudiaremos condiciones necesarias y condiciones suficientes para que una función tenga extremos relativos. También definiremos el polinomio de Taylor asociado a una función en un punto y estudiaremos algunas de sus propiedades. método de Newton-Raphson para encontrar aproximaciones a las soluciones de una ecuación. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

2.2.1. Extremos de una función

Extremos absolutos

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que

a es un **máximo absoluto**, ó simplemente que es un máximo, de f, ó que f **alcanza su máximo en** a si se verifica que

$$f(a) \geq f(x), \ \forall x \in A.$$

a es un **mínimo absoluto** ó simplemente que es un mínimo, de f ó que f **alcanza su mínimo en** a si se verifica que

$$f(a) \leq f(x), \ \forall x \in A.$$

a es un **punto extremo** de f si ó bien es un máximo ó bien es un mínimo.

Extremos relativos

Siendo A,f y a como antes, se dice que:

a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

b) $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in]a-r, a+r[$.

a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq A$.

b) $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in]a-r, a+r[$.

a es un **extremo relativo** si o bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Con el siguiente ejemplo veremos qué no existe en general una relación entre extremo relativo y extremo absoluto.

Ejemplo:

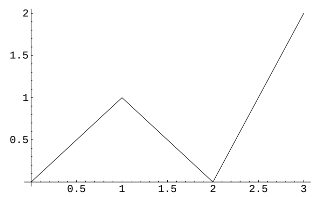
Estúdiense los extremos relativos y absolutos de la función

$$f : [0,3] \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ 2-x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 2x-4 & \text{si } 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$$

Observemos primero su gráfica:



y comprobemos que

1. 0 es un mínimo absoluto pero no relativo.
2. 1 es un máximo relativo pero no absoluto.
3. 2 es un mínimo relativo y absoluto
4. 3 es un máximo absoluto pero no relativo.

Nota Si a es un punto interior y f alcanza su máximo (resp. mínimo) absoluto en a, entonces f tiene un máximo (resp. mínimo) relativo en a.

2.2.2. Extremos relativos y derivabilidad

Comenzamos afirmando que en todo extremo relativo la derivada se anula.

Proposición 2.2.1. *(Lema I.7.9)(condición necesaria)*
Sea I un intervalo. Si $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es derivable en a y tiene un extremo relativo en $a \in I$, entonces $f'(a) = 0$.

Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para el cálculo de extremos.

Regla práctica para el cálculo de extremos absolutos

Sean A un subconjunto no vacío de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo absoluto en a, entonces a está **en una de las tres situaciones siguientes**:

1) No existe ningún intervalo centrado en a contenido en A.

2) Existe un intervalo centrado en a contenido en A y f no es derivable en a.

3) Existe un intervalo centrado en a contenido en A, f es derivable en a y $f'(a) = 0$.

Una vez detectados los candidatos, se nos puede presentar una de las dos siguientes situaciones:

1) El conjunto A es un intervalo cerrado y acotado y f es continua.

2) No se da alguna de las circunstancias del primer apartado.

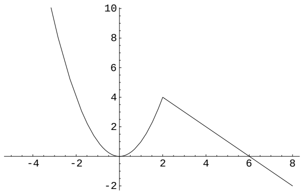
En el primer caso sabemos, por el teorema de Weiertrass sobre la conservación de la compacidad, que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos del intervalo, por lo que basta evaluar f en los candidatos de los tres tipos para determinar quiénes son los extremos absolutos. En el segundo caso, nos contentaremos con saber que de haber máximo ó mínimo éste está entre nuestros candidatos.

El siguiente resultado nos permite ver si los puntos del segundo y tercer tipo son al menos extremos relativos y de qué naturaleza son.

Proposición 2.2.2. *(condición suficiente)*
Sean $a \in \mathbb{R}$, $r > 0$ y notemos por $I =]a - r, a + r[$. Sea A un conjunto que contiene a I y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y derivable en $I \backslash \{a\}$.

1. *Si para cada $x \in I$ con $x < a$ se tiene que $f'(x) \geq 0$ y para cada $x \in I$ con $x > a$ se tiene que $f'(x) \leq 0$, entonces f alcanza un máximo relativo en a.*

2. *Si para cada $x \in I$, con $x < a$, se tiene que $f'(x) \leq 0$ y para cada $x \in I$, con $x > a$, se tiene que $f'(x) \geq 0$, entonces f alcanza un mínimo relativo en a.*



Ejemplo: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si\ x \leq 2 \\ -x + 6 & si\ x > 2 \end{cases}$$

Considérese previamente su gráfica

Confírmese que f tiene en 0 un mínimo relativo (no absoluto) y en 2 un máximo relativo (no absoluto) y que f no tiene extremos absolutos.

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función anterior restringida al intervalo $[0, 4]$.

2.2.3. Derivadas sucesivas

Sea A un subconjunto no vacío de números reales y sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función. Considérese el conjunto

$$A_1 = \{a \in A \cap A' : \ f \text{ es derivable en } a\}.$$

Si A_1 es un conjunto no vacío podemos construir la función que a cada punto de A_1 le hace corresponder la derivada de f en dicho punto. Dicha función, que notaremos por f', recibe el nombre de **función derivada** de f. Si $a \in A_1 \bigcap (A_1)'$ y f' es derivable en a, diremos que f es **dos veces derivable en** a y llamaremos **derivada segunda** de f en a a la derivada de f' en a, y la notaremos por $f''(a)$. Sea A_2 el subconjunto de puntos de $A_1 \bigcap (A_1)'$ en los que f es dos veces derivable. La función $f'' : A_2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por la ley $x \longmapsto f''(x)$ se llamará **derivada segunda** de f. Siguiendo este proceso podremos definir los conceptos de **función n veces derivable** y de la **función derivada n-ésima** de f, que notaremos por $f^{(n)}$.

Sea I un intervalo, $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función y n un número natural. Se dice que f es **de clase $\mathcal{C}^n$ en** I si f es n veces derivable en I y su derivada n-ésima, $f^{(n)}$, es continua en I.
Se dice que f es **de clase $\mathcal{C}^\infty$ en** I si f es de clase $\mathcal{C}^n$ para todo natural n.

Por ejemplo las funciones racionales y las funciones seno, coseno, tangente, arcotangente, arcoseno, arcocoseno, logaritmo neperiano y exponencial son funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ en sus correspondientes dominios.

2.2.4. Polinomio de Taylor

Sea A un subconjunto de números reales y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable en un punto $a \in A \bigcap A'$. Llamaremos **polinomio de Taylor de grado n de la función** f **en el punto** a a la función polinómica $P_{n,a} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$P_{n,a}(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + ... + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n.$$

Es inmediato comprobar que $P_{n,a}$ es la única función polinómica que verifica que:

$$P_{n,a}(a) = f(a),\ P'_{n,a}(a) = f'(a),\ ...\ P^{(n)}_{n,a}(a) = f^{(n)}(a).$$

Nótese que el polinomio de Taylor de grado uno no es más que la función afín g dada en la lección anterior y cuya gráfica llamábamos recta tangente. Cabe esperar que el polinomio de Taylor de grado n en el punto a nos dé una buena aproximación de la función f en las proximidades del punto a, y que deberá ser tanto mejor cuanto mayor sea el grado del polinomio. Este hecho queda probado en el siguiente resultado.

Teorema 2.2.3. *(fórmula infinitesimal del resto)*
Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable. Entonces

$$lim_{x \to a} \frac{f(x) - P_{n,a}(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Como primera consecuencia de este hecho obtenemos una regla práctica para el cálculo de extremos relativos.

Corolario 2.2.4. *Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función n veces derivable con*

$$f'(a) = ... = f^{(n-1)}(a) = 0 \ y \ f^{(n)}(a) \neq 0.$$

Entonces si

a) n es impar, f no tiene ningún extremo relativo en a.

b) n es par y

b1) $f^{(n)}(a) > 0$, f tiene un mínimo relativo en a.

b2) $f^{(n)}(a) < 0$, f tiene un máximo relativo en a.

Como ejercicio calcúlese el vértice de la parábola $y = x^2 + 3x - 2$.

En el ambiente del teorema, la función $R_{n,a} : I \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$R_{n,a}(x) = f(x) - P_{n,a}(x),$$

recibe el nombre de **Resto de Taylor de orden** n **de la función** f **en el punto** a.

Nuestro siguiente resultado nos va a proporcionar una expresión concreta del resto de Taylor que nos permitirá evaluar el error cometido cuando se sustituya una función por su correspondiente polinomio de Taylor.

Teorema 2.2.5. *(Fórmula de Taylor)*

Sea I un intervalo, $a \in I$, $n \in \mathbb{N}$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función $n+1$ veces derivable. Entonces, para cada $x \in I$, $x > a$ (respectivamente $x < a$), existe un punto $c \in]a, x[$ (resp. $c \in]x, a[$) tal que

$$R_{n,a}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}.$$

Ejercicio: Calcúlese el valor de $\sqrt{e}$ con tres decimales.

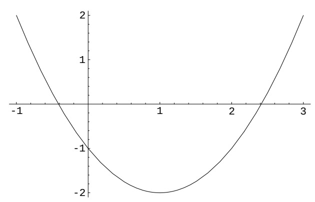
2.2.5. Resolución numérica de ecuaciones.

Veamos ahora cómo se interpreta geométricamente el hecho de que la derivada segunda sea no negativa.

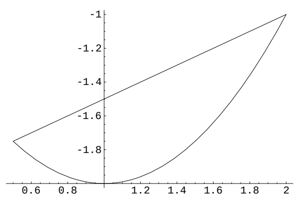
Sea I un intervalo. Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función convexa** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0, 1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \leq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = (x-1)^2 - 2$ es convexa ya que su gráfica,



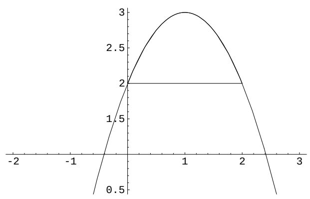
verifica que la imagen de cualquier intervalo contenido en $\mathbb{R}$ está por "debajo"del segmento que une las imágenes de los extremos. Considérese por ejemplo el intervalo $[1/2, 2]$) y el segmento $[(1/2, -3/4), (2, -1)]$ que une las imágenes de sus extremos, tal como vemos en la figura siguiente



Se dice $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una **función cóncava** cuando para cualesquiera dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ y para todo número real $t \in]0, 1[$ se verifica que

$$f((1-t)a + tb)) \geq (1-t)f(a) + tf(b).$$

Obsérvese que la función $f(x) = -(x-1)^2 + 3$ es cóncava ya que por ejemplo, la imagen del intervalo $[0, 2]$ está por encima del segmento $[(0, 2), (2, 2)]$ tal como se aprecia en la siguiente figura



Es claro que toda función afín es simultáneamente convexa y cóncava.

Finalmente veamos que existe una estrecha relación entre la convexidad y el signo de la segunda derivada.

Proposición 2.2.6. *Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en I. Entonces equivalen:*

1. *f es convexa.*
2. *$f''(x) \geq 0$ para todo $x \in I$.*

Es fácil ver ahora que la función exponencial es una función convexa y la función logaritmo neperiano es una función cóncava.

La última consecuencia que vamos a señalar en esta lección es un método muy rápido para localizar las soluciones de una ecuación.

Corolario 2.2.7. *(Método de Newton-Raphson)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función dos veces derivable verificando:

a) $f(a) < 0 < f(b)$.

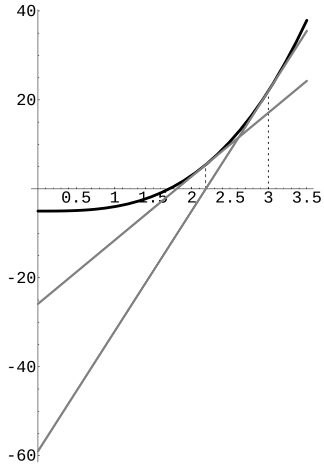
b) $f'(x) \neq 0$.

c) $f''(x)$ *no cambia de signo en* $[a, b]$.

Entonces la sucesión $\{x_n\}$, tal que $x_1 \in [a, b]$, y $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'_n(x)}$ es una sucesión que converge a la única raíz x_0 de la ecuación $f(x) = 0$.

Obsérvese que la condición c) hace alusión a que no hay cambio de convexidad o concavidad.

La forma de construir los distintos términos de la sucesión de aproximaciones es bastante sencilla y responde a una idea muy intuitiva. Una vez fijado un valor inicial x_1, el término x_2 se obtiene como el punto de corte de la recta tangente a f en x_1 con el eje OX. De la misma forma, obtenemos x_{n+1} como el punto de corte de la recta tangente a f en el punto x_n con el eje OX. Para comprender bien el algoritmo observemos el siguiente gráfico donde se ve cómo se generan los valores de las aproximaciones.



2.2.6. Relación de ejercicios

1. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hállense las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados **(a)** 10 y 10, **(b)** 12 y 18.

2. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcúlense las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

3. Se traza la tangente en un punto de la elipse $x^2/25+y^2/16 = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demuéstrese que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

4. Se inscribe un rectángulo en la elipse $x^2/400 + y^2/225 = 1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

5. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica sin suelo de un volumen determinado. Calcúlense sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

6. Demuéstrese que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

7. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?.

8. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?.

9. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m. de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?.

10. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

11. Demuéstrese que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

12. ¿Cuál es la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

13. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hállese el número de árboles que hace máxima la cosecha.

14. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v = Ar^2(r_0 - r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación. Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

15. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8.000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 EUROS por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 35 EUROS/hora.

    a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

    b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?

16. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

17. Pruébense que las funciones exponencial, seno y coseno son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$. Probar que
$$sen(x)^{(n)} = sen(x + n\frac{\pi}{2}), \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

18. Pruébese que la función logaritmo es de clase C^∞ en $\mathbb{R}^+$ y calcúlese, para cada $n \in \mathbb{N}$, la derivada n-ésima.

19. Calcúlese, haciendo uso de un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:
$$a)\alpha = \sqrt{e} = e^{1/2} \qquad b)\alpha = \sqrt{102} \qquad c)\alpha = sen\frac{1}{2}.$$

20. Exprésese el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $x - 2$

21. Estúdiense los posibles extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $f(x) = xlog|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$

    b) $f(x) = x^2 log|x|, \qquad \forall x \in \mathbb{R}^*, \qquad f(0) = 0.$

22. Estúdiense los posibles extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = cosh(x) + cos(x)$.

23. Calcúlese $Max\{\sqrt[n]{n} : \quad n \in \mathbb{N}\}$.

Capítulo 3

El conjunto $\mathbb{R}^n$. Funciones de varias variables.

3.1. Los números complejos

Sumario

Como último eslabón de las sucesivas ampliaciones que hemos hecho del conjunto de los números naturales, vamos a considerar el conjunto de los números complejos. Esta ampliación viene motivada por el hecho de que no existen números reales que satisfagan la sencilla ecuación $x^2 + 1 = 0$. En este nuevo conjunto se encontrarán todas las soluciones de cualquier ecuación polinómica. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.1.1. El conjunto $\mathbb{C}$

Consideremos el plano real, esto es, el conjunto $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ dotado con las siguientes operaciones:

1. **Suma**:

$$(x, y) + (t, s) = (x + t, y + s),$$

2. **producto por un escalar**:
$$t(x,y) = (tx, ty).$$

Es claro que estas operaciones heredan algunas propiedades de las operaciones suma y producto de números reales, a saber para la primera, se verifican:

1.1 $[(x,y)+(t,s)]+(u,v) = (x,y)+[(t,s)+(u,v)]$ (Propiedad asociativa)

1.2 $(x,y)+(t,s) = (t,s)+(x,y)$. (Propiedad conmutativa)

1.3 $(x,y)+(0,0) = (x,y)$ (Elemento neutro)

1.4 $(x,y)+(-x,-y) = (0,0)$ (Elemento opuesto),

mientras que para la segunda, se verifican:

2.1 $1(x,y) = (x,y)$.

2.2 $t[s(x,y)] = ts(x,y)$.

2.3 $(s+t)(x,y) = s(x,y)+t(x,y)$.

2.4 $r[(x,y)+(t,s)] = r(x,y)+r(t,s)$.

El hecho de que $\mathbb{R}^2$ cumpla las anteriores propiedades se expresa diciendo que el conjunto $\mathbb{R}^2$ dotado con las operaciones **suma** y **producto por un escalar**, arriba definidas, tiene estructura de **espacio vectorial**.

Pero también en este conjunto se puede definir un verdadero **producto** mediante la siguiente expresión:
$$(x,y).(t,s) = (xt-ys, xs+yt).$$

Esta nueva operación verifica las siguientes propiedades:

3.1 $((x,y).(t,s)).(u,v) = (x,y).((t,s).(u,v))$ (Propiedad asociativa)

3.2 $(x,y).(t,s) = (t,s).(x,y)$. (Propiedad conmutativa)

3.3 $(1,0)(x,y) = (x,y)$ (Elemento unidad)

3.4 Para cada $(x,y) \neq (0,0)$ existe $(t,s) = (\frac{x}{x^2+y^2}, \frac{-y}{x^2+y^2})$ tal que $(x,y).(t,s) = (1,0)$.

3.5 $(x,y)[(t,s))+(u,v)] = (x,y).(t,s)+(x,y).(u,v))$ (Propiedad distributiva)

Este nuevo hecho se expresa diciendo que el plano $\mathbb{R}^2$, dotado con las operaciones suma, producto por un escalar y producto tiene estructura de **álgebra conmutativa**. Al conjunto $(\mathbb{R}^2, +,$ producto) lo notaremos por $\mathbb{C}$ y lo llamaremos el **plano complejo**. Claramente $\mathbb{C}$ está dotado de un producto por un escalar real.

La identificación $a \longmapsto (a,0)$ permite ver a $\mathbb{R}$ como un subconjunto del conjunto de los números complejos.

Al número complejo $(0,1)$ se le denomina **unidad imaginaria** que notaremos por i o por j.

3.1.2. Expresiones de un número complejo y propiedades.

Forma binómica de un número complejo

Estas identificaciones nos permiten reescribir cualquier número complejo $z = (x, y)$ en **forma binómica**, esto es,

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + iy.$$

Sea $z = x + iy$.
El valor x recibe el nombre de **parte real** de z, $Rez = x$.
El valor y recibe el nombre de **parte imaginaria** de z, $Imz = y$.
Claramente dos números complejos z,w son iguales si, y sólo si,

$$Rez = Rew \text{ y } Imz = Imw.$$

NO se puede definir un **orden** en $\mathbb{C}$ que sea compatible con el producto definido en él.

CONJUGADO de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$. Llamamos **conjugado** de z, $\overline{z}$, a un nuevo número complejo definido por

$$\overline{z} = Rez - iImz.$$

Las siguientes propiedades son inmediatas:

Proposición

Sean z y w dos números complejos. Entonces

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$.
2. $\overline{zw} = \overline{z}\overline{w}$.
3. $\overline{\overline{z}} = z$.
4. $Rez = \frac{z+\overline{z}}{2}$, $\quad Imz = \frac{z-\overline{z}}{2i}$.
5. $z = \overline{z}$ *si, y sólo si* $z \in \mathbb{R}$.

Conviene llamar la atención de que estas propiedades nos aseguran que las raíces complejas, no reales, de un polinomio $p(z)$ con coeficientes reales vienen apareadas, esto es, si z es una raíz del polinomio $p(z)$, también lo es su conjugada.

MÓDULO de un número complejo

Sea $z \in \mathbb{C}$. Llamamos **módulo** de z, $|z|$, a un número real no negativo, definido por

$$|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{(Rez)^2 + (Imz)^2}.$$

En particular si $a \in \mathbb{R}$, entonces su módulo y su valor absoluto coinciden.

Resumamos algunas de sus propiedades.

Proposición

1. $|z| = 0$ *si, y sólo si* $z = 0$.
2. $|z| = |-z| = |\overline{z}|$.
3. $|zw| = |z||w|$.
4. $|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2Rez\overline{w}$.
5. $|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2)$ *(identidad del paralelogramo).*
6. $||z| - |w|| \leq |z+w| \leq |z| + |w|$. *(desigualdad triangular)*

ARGUMENTO de un número complejo

Notaremos por
$$\mathbb{C}^* = \{z \in \mathbb{C};\ z \neq 0\}.$$
Sea $z \in \mathbb{C}^*$. Se dice que un número real θ es **un argumento** de z, si se verifica que
$$z = |z|(cos\theta + isen\theta).$$
Al único argumento $\theta_0 \in]-\pi, \pi]$, se le llama **argumento principal** de z, $argz$, y su expresión viene dada por
$$argz = \begin{cases} arc\ tg\frac{Imz}{Rez} & si\ Rez > 0 \\ \pi/2 & si\ Rez = 0/\ \mathrm{e}/Imz > 0 \\ -\pi/2 & si\ Rez = 0/\ \mathrm{e}/Imz < 0 \\ \pi & si\ z \in \mathbb{R}^- \\ arc\ tg(\frac{Imz}{Rez}) + \pi & si\ \ Rez < 0,\ \ Imz > 0 \\ arc\ tg(\frac{Imz}{Rez}) - \pi & si\ \ Rez < 0,\ \ Imz < 0. \end{cases}$$

La expresión $|z|(cos(argz) + isen(argz))$ suele conocerse como **forma polar** del número complejo z y a la pareja $(|z|, argz)|$ se le suele llamar coordenadas polares de z.

Nótese que si $z \in \mathbb{C}^*$, entonces
$$|z| = 1\ \textit{si y sólo si existe}\ t \in \mathbb{R}\ \textit{tal que}\ z = cost + isent.$$

Conviene advertir que para cada $z \in \mathbb{C}^*$ existen infinitos argumentos, concretamente, si notamos por $Arg\ z$ a dicho conjunto, se tiene que
$$Arg\ z = \{argz + 2k\pi;\ k \in \mathbb{Z}\}.$$

Es fácil probar que dados dos números complejos no nulos z y w, se tiene que
$$Arg(z.w) = Arg(z) + Arg(w),$$
entendiendo que dicha igualdad es entre conjuntos.

Como consecuencia de lo dicho anteriormente, es fácil probar que, para cada $t \in \mathbb{R}$, se tiene
$$(cost + isent)^n = cos(nt) + isen(nt) \quad (\textbf{fórmula de Moivre}).$$

3.1.3. Raices n-ésimas.

Sean $z \in \mathbb{C}^*$ y $n \in \mathbb{N}$. Se dice que $w \in \mathbb{C}$ es una raíz n-ésima de z si $w^n = z$.
Si notamos por $[z]^{\frac{1}{n}}$, al conjunto de de todas las raíces n-ésimas de z, esto es,

$$[z]^{\frac{1}{n}} = \{w \in \mathbb{C};\ w^n = z\},$$

es fácil probar que dicho conjunto tiene exactamente n elementos diferentes, concretamente si escribimos $z = |z|(cost + isent)$, entonces

$$[z]^{\frac{1}{n}} = \{w_k;\ w_k = |z|^{\frac{1}{n}} \left(cos(\frac{t+2k\pi}{n}) + isen(\frac{t+2k\pi}{n}) \right),\ k = 0, 1, ..., n-1\}.$$

Ejemplo:

$$[-1]^{\frac{1}{2}} = \{cos\frac{\pi}{2} + isen\frac{\pi}{2}, cos\frac{3\pi}{2} + isen\frac{3\pi}{2}\} = \{i, -i\}.$$

Conviene pues decir que la búsqueda de soluciones para la ecuación

$$x^2 + 1 = 0$$

puede darse por terminada, ya que como acabamos de ver, i y $-i$ son las soluciones dicha ecuación.

En realidad la respuesta es mucho más amplia.

Teorema fundamental del álgebra

Si $p(z)$ un polinomio con coeficientes complejos de grado n, entonces $p(z)$ tiene exactamente n soluciones (que pueden ser reales ó complejas), contando su multiplicidad.

3.1.4. Relación de Ejercicios

Problema 3.1.1. *Probar la veracidad de las siguientes afirmaciones sobre números complejos:*

1. $|1 - \overline{z}w|^2 - |z - w|^2 = (1 - |z|^2)(1 - |w|^2)$.
2. $\big||z| - |w|\big| = |z - w|$
3. $|z - w| \leq |1 - \overline{z}w|$
4. $|z - w| = |1 - \overline{z}w|$

   Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre módulos *de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.*

Problema 3.1.2. *Resuélvanse las siguientes ecuaciones entre números complejos:*
a) $|z| - z = 1 + 2i$ *; b)* $|z| + z = 2 + i$ *; c)* $\overline{z} = z^2$.

Problema 3.1.3. *Encuentre los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z = 0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.*

Problema 3.1.4. *Calcular las partes real e imaginaria de los números:*

$$\frac{2}{1-3i}; \quad (1+i\sqrt{3})^6; \quad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5; \ .$$

Problema 3.1.5. *Calcúlese* $\arg(zw)$ *y* $\arg\left(\frac{z}{w}\right)$ *supuestos conocidos* $\arg(z)$ *y* $\arg(w)$.

Problema 3.1.6. *Resolver la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.*

Problema 3.1.7. *Calcular las siguientes raíces*

$$(a)\sqrt[4]{16} \qquad (b)\sqrt[6]{1+i} \qquad (c)\sqrt[3]{-27}$$

3.2. El plano y el espacio euclídeos

Sumario

En esta lección nos centramos en el estudio de la estructura euclídea de $\mathbb{R}^n$ que es indispensable para extender los conceptos de continuidad, derivación e integración, ya conocidos para funciones reales de variable real, a las funciones con valores en $\mathbb{R}^n$ y definidas en un subconjunto de A de $\mathbb{R}^q$. En realidad nuestro estudio se podría ceñir a los casos en que $n, q \in \{1, 2, 3\}$ que son en los que trabajaremos siempre, sin embargo, la estructura euclídea puede definirse sin dificultad para cualquier n. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.2.1. Estructura algebraica

Dado $q \in \mathbb{N}$, consideremos en el conjunto

$$\mathbb{R}^q = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times . \overset{q}{.} . \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, ..., x_q);\ x_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, ..., q\},$$

la siguiente operación **Suma**:

Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_q)$, definimos

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_q + y_q)$$

Es claro que esta operación hereda las propiedades de la suma de números reales:

1. Propiedad asociativa:
$$(x + y) + z = x + (y + z).$$
2. Propiedad conmutativa:
$$x + y = y + x.$$
3. Propiedad de existencia de elemento neutro:

Existe una q-upla, $0 = (0, 0, ..., 0)$ tal que para cada q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$, se tiene que

$$x + 0 = x.$$

4. Propiedad de existencia de elemento simétrico:

   Para cada q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$, la q-upla $-x = (-x_1, -x_2, ..., -x_q)$, verifica que
$$x + (-x) = 0.$$

En el caso $q > 2$ **no tenemos un verdadero producto**, sin embargo, vamos a definir dos "seudo-productos"que en muchos casos serán suficientes para poder trabajar.

En el primer caso, **producto por un escalar**, asociamos a cada pareja formada por un escalar t y una q-upla $x = (x_1, x_2, ..., x_nq)$ un nueva q-upla definida por

$$t(x_1, x_2, ..., x_q) = (tx_1, tx_2, ..., tx_q).$$

Este seudo-producto hereda algunas propiedades:

1) $1x = x$

2) $t[sx] = tsx \ (t, s \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}^q)$

3) $(s + t)x = sx + tx \ (t, s \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^q)$

4) $s(x + y) = sx + sy \ (s \in \mathbb{R},\ \ x, y \in \mathbb{R}^q)$

Este hecho se expresa diciendo que $\mathbb{R}^q$ dotado con las operaciones **suma** y **producto por un escalar** arriba definidas tiene estructura de **espacio vectorial**. A partir de aquí podemos llamar **vectores** a las q-uplas.

3.2.2. Producto escalar

El segundo seudo-producto asocia a cada par de n-uplas un escalar.

Sea $q \in \mathbb{N}$. Dados $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ e $y = (y_1, y_2, ..., y_q)$ dos vectores de $\mathbb{R}^q$, llamamos **producto escalar** de ambos, $< x, y >$, al número real definido por

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{q} x_i y_i.$$

Entre las consecuencias más notorias de la existencia de un producto escalar podemos subrayar la existencia de una función, que en $\mathbb{R}$ coincide con la función valor absoluto, y que asocia a cada vector un número real no negativo. Concretamente, dado $x = (x_1, x_2, ..., x_q) \in \mathbb{R}^q$ definimos su **norma**, $\|x\|$, mediante la siguiente ley:

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >} = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} x_i^2}.$$

Es fácil probar que la aplicación definida por $x \longmapsto \|x\|$ hace el mismo papel que la función valor absoluto en $\mathbb{R}$, tal como muestra el siguiente resultado:

Proposición 3.2.1.

1. $\|rx\| = |r|\|x\| \quad (r \in \mathbb{R})$.

2. $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. *(Desigualdad triangular)*

3. $\|x\| \geq 0$ *y* $\|x\| = 0$*, si y sólo si* $x = 0$.

3.2.3. Conceptos topológicos

La importancia de la existencia de esta función-norma estriba en el hecho de que ésta nos capacita para definir una " distancia " entre dos vectores, y por tanto, para determinar la proximidad o lejanía de dos vectores de $\mathbb{R}^q$. Concretamente, para cada dos vectores

$$x = (x_1, x_2, ..., x_q), \; y = (y_1, y_2, ..., y_q) \in \mathbb{R}^q,$$

definimos la distancia entre ellos, por

$$dist(x,y) = \|y-x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{q} (y_i - x_i)^2}.$$

A su vez ésta nos permite considerar :

1. <u>Conjuntos de $\mathbb{R}^q$ que hacen el mismo papel que los intervalos de $\mathbb{R}$:</u>

   a) **Bola abierta de centro** $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^q; \; \|x-a\| < r\}.$$

   b) **Bola cerrada de centro** $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^q; \; \|x-a\| \leq r\}.$$

2. <u>Conjuntos que juegan el papel de los extremos del intervalo:</u>

   Esfera de centro $a \in \mathbb{R}^q$ **y radio** $r \in \mathbb{R}^+$

   $$S(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^q; \; \|x-a\| = r\}.$$

3. Conjunto acotado

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$. Se dice que A es un **conjunto acotado** si existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$A \subseteq B(0, M).$$

Ejemplo: Sea $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0, 1[,\ y \in [0, 2]\}$.

Es claro que el conjunto A es acotado en $\mathbb{R}^2$, mientras que el eje x no lo es.

4. Punto de acumulación

Se dice que $x_0 \in \mathbb{R}^q$ es un **punto de acumulación** de A, $x_0 \in A'$, si todo bola " punteada " centrada en x_0 intersecta al conjunto A, esto es

$$(B(x_0, \varepsilon)\backslash\{x_0\}) \bigcap A \neq 0, \quad \forall\varepsilon > 0.$$

Notaremos por A' al conjunto de puntos de acumulación de A.

Ejemplo: Si consideramos el mismo conjunto A, considerado anteriormente, tendremos que $(0, 1) \in A'$.

5. Punto interior

Se dice que $y \in A$ es un **punto interior** de A, si existe $r > 0$ tal que $B(y, r) \subseteq A$. Notaremos por A° al conjunto de puntos interiores de A.

Ejemplo: Considerando el mismo conjunto anterior, se tiene que $(1/2, 1) \in A^\circ$.

6. Conjunto abierto

Diremos que un conjunto A es **abierto** si $A = A^\circ$.

Ejemplo: El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in]0, 1[,\ y \in]0, 2[\}$ es abierto, mientras que el conjunto A, que usamos en todos los ejemplos, no lo es.

7. Conjunto cerrado

Diremos que un conjunto A es **cerrado** si $A' \subseteq A$. Es fácil probar que A es cerrado si, y sólo si, su complementario es abierto.

Al conjunto $(A \bigcup A')\backslash A^\circ$ se le denomina **frontera** de A y suele notarse por $Fr(A)$ o por $\delta(A)$.

Ejemplo: El conjunto $C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 2]\}$ es cerrado, mientras que el conjunto B anterior no lo es. Es claro que

$$Fr(C) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 0, y \in [0, 2]\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x = 1, y \in [0, 2]\}$$

$$\cup\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0, 1], y = 0\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0, 1], y = 2\}.$$

8. Conjunto compacto

   Diremos que un conjunto A es **compacto** si A es cerrado y acotado.

   Ejemplo: El conjunto $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ x \in [0, 1],\ y \in [0, 2]\}$ es compacto, mientras que el conjunto A no lo es.

3.2.4. Relación de ejercicios

1. Descríbanse el interior, los puntos de acumulación y la frontera de los siguientes Conjuntos:

   a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} < 1\}$ $(0 < a < b \in \mathbb{R}$.

   c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ y = rx\}$. $(r \in \mathbb{R})$

   d) $A = \{(x_n, y_n);\ x_n = \frac{20}{n}, y_n = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}\}$.

   e) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1\}$ $(0 < a < b < c \in \mathbb{R}$.

   f) a) $\mathbb{N}$ b) $\mathbb{Q}$. c)$\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$. d) $[0, 1] \cup \{2\}$. e) $\{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

2. Díganse cuáles de los conjuntos del ejercicio anterior son compactos.

3.3. Campos. Continuidad

Sumario

En esta lección introducimos el concepto de campo vectorial y de campo escalar. Veremos una estrategia para reducir el estudio de las propiedades de los campos a las propiedades de los campos escalares: las funciones coordenadas. Como primer ejemplo de este hecho, estudiaremos la propiedad de la continuidad. Daremos algunos ejemplos de campos continuos. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

3.3.1. Campos vectoriales y escalares

Recordemos que a las funciones definidas en un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ se les llama campos. Si toman valores en $\mathbb{R}$ se les llama **campos escalares** y si los toman en $\mathbb{R}^n$ $(n > 1)$, se les denomina **campos vectoriales**.

Veamos algunos ejemplos:

1. Proyecciones

   Sea $q \in \mathbb{N}$. Para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$ se puede considerar la aplicación

   $$p_i : \mathbb{R}^q \longrightarrow \mathbb{R},$$

   definida por

   $$p_i : (x_1, x_2, ..., x_q) \longmapsto x_i.$$

   Dicha aplicación recibe el nombre de **proyección i-ésima**. Cada función proyección es un campo escalar.

2. Inyecciones.

   Podemos considerar ahora la aplicación

   $$I_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^q,$$

   definida por

   $$I_i : r \longmapsto (0, 0, ...,^{i)} r, 0, ..., 0).$$

   Dicha aplicación recibe el nombre de **inyección i-ésima** y es un ejemplo sencillo de campo vectorial.

3. La función norma

Podemos considerar el campo escalar

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R},$$

definida por

$$x \longmapsto \|x\|.$$

Vistas las propiedades de $\mathbb{R}^n$, es fácil comprender que dadas dos campos vectoriales su **suma** es un nuevo campo vectorial y que el **producto** de un campo **escalar** por un campo **vectorial** también es un campo vectorial. Sin embargo, es claro que **no** tiene sentido hablar del producto de dos campos vectoriales.

Nuestro objetivo ahora es asociar a todo campo vectorial con valores en $\mathbb{R}^n$ n campos escalares.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial. Dado $i \in \{1, 2, ..., n\}$, el campo escalar

$$F_i = p_i \circ F : A \longrightarrow \mathbb{R},$$

donde p_i es la correspondiente proyección $i-$ésima, recibe el nombre de **función coordenada i-ésima**.

Para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$ se puede comprobar fácilmente que

$$F = \sum_{i=1}^{n} I_i \circ F_i,$$

donde por I_i queremos indicar la correspondiente función inyección i-ésima.

3.3.2. Continuidad.

Sea A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$ y sea $a \in A$. Se dice que $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un **campo continuo en** a si verifica la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \text{ tal que si } x \in A, \|x - a\| \leq \delta \text{ entonces } \|F(x) - F(a)\| < \varepsilon.$$

Se dice que F es continua en $B \subseteq A$, si F es continua en todos los puntos de B.

Ejemplos

La función identidad en $\mathbb{R}^n$, todos los campos constantes, las proyecciones, las inyecciones y la función norma son campos continuos.

En orden a construir nuevos campos continuos veamos que las operaciones usuales están bien avenidas con la continuidad.

Proposición 3.3.1. *Sean A un subconjunto de $\mathbb{R},^q$, $a \in A$ y $F, G : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dos campos continuos en a. Entonces $F + G$ es un nuevo campo continuo en a. Si $g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es un campo escalar continuo, entonces $F.g$ también es un campo continuo en a y si además, para cada $x \in A$, $g(x) \neq 0$, entonces F/g es también continuo en a.*

Proposición 3.3.2. *(Regla de la cadena)*

Sean A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ una función continua en a. Sean ahora $B \supseteq F(A)$ y $G : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo continuo en $F(a)$. Entonces $G \circ F$ es un campo continuo en a.

Recordemos que la propiedad de continuidad es una propiedad local.

Proposición 3.3.3. *(*La continuidad es una propiedad local*)*

Sean A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, B un subconjunto de A, $a \in B$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo. Entonces

1. *Si F es continuo en a, entonces F/B es un campo continuo en a.*
2. *Si F/B es continuo en a y existe una bola centrada en a, $B(a, r)$, tal que $B(a, r) \bigcap A \subseteq B$, entonces F es un campo continuo en a.*

Podemos vincular la continuidad de un campo vectorial a la continuidad de sus funciones coordenadas:

Proposición 3.3.4. *(***Regla de oro***)*

Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces

F es continuo en a si, y solo si F_i es continuo en a $\forall i$.

Finalizamos esta lección enunciando una importante propiedad únicamente válida para campos escalares ($n = 1$).

Teorema 3.3.5. *(de conservación de la compacidad o de Weierstrass)*

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Si A es un conjunto compacto y f es continua en A, entonces f está acotada y alcanza su máximo y su mínimo en sendos puntos de A.

3.3.3. Relación de ejercicios

1. Estúdiese la continuidad del campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definido por $F(x,y) = (2x^3, sen(x)arctg(y), e^{x+y})$.

2. Estúdiese la continuidad del campo vectorial $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definido por:

$$F(x,y) = \begin{cases} \left(\frac{sen(x)}{x}, \operatorname{sen}(xy)\right), & x \neq 0 \\ \\ (1,0), & x = 0 \end{cases}$$

Capítulo 4

Cálculo diferencial en varias variables

4.1. Derivadas direccionales

Sumario

En esta lección introduciremosmos el concepto de derivada direccional y derivada parcial. Daremos algunos ejemplos importantes y definiremos el plano tangente a un campo escalar. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.1.1. Derivadas direccionales

Recuérdese que si A un subconjunto no vacío de números reales, $a \in A \bigcap A'$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función, entonces se dice que f es derivable en a si

$$lim_{t \to 0} \frac{f(a+t) - f(a)}{t} = f'(a).$$

Tratemos ahora de dar sentido a la expresión anterior en el caso en que $A \subseteq \mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ sea un campo vectorial.

Obsérvese en primer lugar que la aproximación al punto a de $\mathbb{R}^q$ puede hacerse por muy diferentes direcciones. De hecho, para cada vector $u \in \mathbb{R}^q$, podemos considerar la dirección determinada por la recta $a + tu$ ($t \in \mathbb{R}$. Pues bien, si existe el

$$lim_{t\to 0}\frac{F(a+tu)-F(a)}{t} =,$$

se dice que F **admite derivada direccional en** a **según el vector** u. Las derivadas direccionales más importantes son aquellas según los vectores canónicos.

4.1.2. Derivada parcial

Sea, para cada $i \in \{1, 2, ..., q\}$, $e_i = (0, 0, ..., 1, 0, ..., 0)$, esto es, el vector de $\mathbb{R}^q$ cuya única coordenada no nula es la i-ésima cuyo valor es uno. Supongamos que existe $\delta > 0$, tal que $a + re_i \subseteq A$, con $r \in]-\delta, \delta[$. Se dice que F tiene o admite **derivada parcial respecto de la variable** i**-ésima en el punto** a si existe

$$lim_{t\to 0}\frac{F(a+te_i)-F(a)}{t}.$$

Dicho límite se denomina **derivada parcial** i**-ésima de** F en el punto a y se nota por $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$.

Notas

1. Si f es un campo escalar , entonces el cálculo de la derivada parcial i-ésima de f en un punto genérico $x = (x_1, x_2, ..., x_q)$ se ha de llevar a cabo **derivando la función real que resulta de considerar constantes las variables** x_j ($j \neq i$).

2. Si $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ es un campo vectorial tal que $A \subseteq \mathbb{R}$, entonces $\frac{\partial F}{\partial x}(a)$ se suele notar por $F'(a)$ y recibe el nombre de **derivada elemental** de F en a.

Damos a continuación sendas interpretaciones geométrica y física de las derivadas parciales de un campo escalar.

Interpretación geométrica

Consideremos la gráfica del campo escalar anterior , esto es

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ z = f(x, y),\ (x, y) \in A\}.$$

El plano $y = b$, corta a la gráfica, dando lugar a un conjunto C_1,

$$C_1 := \{(x, b, f(x, b)) \in \mathbb{R}^3 : (x, b) \in A\}.$$

Obsérvese que el conjunto C_1 es la gráfica de la función $g : x \longmapsto f(x, b)$, de manera que la pendiente de su recta tangente es $g'(a) = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)$.

Análogamente podría entenderse para la derivada parcial $\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$.

Interpretación propiamente física

Las derivadas parciales pueden interpretarse como razones de cambio: Consideremos la función T que determina la temperatura en cualquier punto de la corteza terrestre. Claramente ésta depende, en cada punto (x,y), de la longitud x y de la latitud y de dicho punto. La derivada parcial $\frac{\partial T}{\partial x}(a,b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección este-oeste, mientras que $\frac{\partial T}{\partial y}(a,b)$ es la razón a la que la temperatura cambia en la dirección norte-sur.

También podemos relacionar la existencia de parciales de un campo vectorial y de sus funciones coordenadas:

Proposición 4.1.1. *(***Regla de oro***)*
Sean A un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Entonces F admite todas sus derivadas parciales en a si, y solo si F_i admite todas sus derivadas parciales en a $\forall i$. Además en caso afirmativo:

$$(\frac{\partial F}{\partial x_j}(a))_i = \frac{\partial F_i}{\partial x_j}(a). \quad i = 1,2,...,n, \quad j = 1,2,...,q.$$

En particular si $q = 1$, entonces $F'(a) = (F_1'(a), F_2'(a), ..., F_n'(a))$.

Ejercicio: Sea $F : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definida por $F(x,y) = (x+y, x^2, xy)$. Estúdiese la continuidad y calcúlese $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)$.

Sea $F : A \longrightarrow \mathbb{R}^q$ es un campo vectorial, entonces se dice que F **es de clase** $\mathcal{C}^1(A)$ si admite todas sus derivadas parciales en A y éstas son continuas en A. El campo vectorial F definido anteriormente es de clase $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}^3)$.

4.1.3. Regla de la cadena

También para las derivadas parciales se tiene la consiguiente regla de la cadena.

Proposición 4.1.2. *Sean A es un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$, $a \in \mathbb{R}^q$, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en a, $B \supseteq f(A)$ y $g : B \longrightarrow \mathbb{R}^m$ un campo vectorial que admite todas sus derivadas parciales en $f(a)$. Entonces la función composición admite todas sus derivas parciales en a, de hecho*

$$\frac{\partial (g \circ f)_k}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a),$$

donde $\frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a))$ representa la derivada parcial i-ésima de la función coordenada g_k en $f(a)$.

Para recordar esta fórmula existe una regla nemotécnica que consiste en identificar $(g \circ f)_k$ con g_k $(k = 1,2,...,m)$ y f_i con y_i $(i = 1,2,...,n)$, quedando para cada $j = 1,2,...,q$

$$\frac{\partial g_k}{\partial x_j}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial g_k}{\partial y_i}(f(a)) \frac{\partial y_i}{\partial x_j}(a).$$

Ejemplo

Calcúlese $\frac{\partial F}{\partial x}(1,2)$ y $\frac{\partial F}{\partial y}(1,2)$, donde la función $F(u,v)=u^2+3uv+4v^2$, siendo $u=2-2xy^2$ y $v=1+x$.

4.1.4. Vector gradiente y matriz jacobiana

Sea A un subconjunto de $\mathbb{R}^q$, a un punto de A y sea $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ un campo **escalar**. Se dice que f tiene **gradiente** en a si admite las q derivadas parciales en a, en cuyo caso definimos el **vector gradiente** de f en a por:

$$\nabla f(a) := (\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \frac{\partial f}{\partial x_2}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_q}(a)) \in \mathbb{R}^q.$$

En el caso de que se consideren campos vectoriales, el concepto de vector gradiente viene sustituido por el de matriz jacobiana.

Sean $A\subseteq\mathbb{R}^q$, a un punto de A y $F:A\longrightarrow\mathbb{R}^n$ un campo **vectorial** que admite todas sus derivadas parciales en a. Se llama **matriz jacobiana** de F en el punto a, $J_F(a)$, a la matriz cuya fila i-ésima son las coordenadas del vector gradiente de su función coordenada i-ésima, $\nabla F_i(a)$, (o si se quiere, aquella cuya columna i-ésima son las coordenadas del vector $\frac{\partial F}{\partial x_i}(a)$), esto es, la matriz de orden $n\times q$, dada por:

$$J_F(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_1}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial F_1}{\partial x_q}(a) \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_2}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial F_2}{\partial x_q}(a) \\ ... & ... & ... & ... \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1}(a) & \frac{\partial F_n}{\partial x_2}(a) & ... & \frac{\partial F_n}{\partial x_q}(a) \end{pmatrix}$$

Al determinante de la matriz jacobiana, $|J_F(a)|$, se le denomina **jacobiano** del campo F en el punto a.

Notas

1. Obsérvese que si $f:A\longrightarrow\mathbb{R}$ es una función real de variable real ($q=n=1$), entonces
$$J_f(a)=f'(a).$$
2. Sea $U=\mathbb{R}^+\times]-\pi,\pi[$, $V=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0);\ x\leq 0\}$, y la aplicación $\phi:U\longrightarrow V$ definida por
$$\phi(\rho,\theta)=(\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$
En este caso la matriz jacobiana es de la forma
$$J_\phi(\rho,\theta) := \begin{pmatrix} cos\theta & -\rho\ sen\theta \\ sen\theta & \rho\ cos\theta \end{pmatrix}$$

Nótese que su jacobiano, $|J_\phi(\rho,\theta)|=\rho$.

4.1.5. Plano tangente

Sea $f : A \to \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus parciales en un punto $(a, b) \in A \subseteq \mathbb{R}^2$. Tal como hicimos con la derivada de una función real de variable real, tratemos ahora de encontrar, en cada punto (a, b) , un plano que sea lo más parecido posible a la gráfica del campo escalar en el punto (a, b).

Tengamos en cuenta para ello que

1. Sea $z = mx+ny+d$ un plano en $\mathbb{R}^3$. Si queremos que el punto $((a, b), f(a, b))$ pertenezca dicho plano, $d = f(a, b) - ma - nb$ y por tanto, el plano debe tener la forma:
$$z = m(x - a) + n(y - b) + f(a, b).$$
2. La condición de mejor aproximación de una recta, r que pasa por el punto $(a, g(a))$ $(r \equiv y = m(x - a) + g(a))$, se aproxime a la curva $y = g(x)$ en dicho punto, no es otra, como ya vimos anteriomente, que el hecho de asegurar que $m = g'(a)$.

Así pues, si queremos que el plano se aproxime a la gráfica del campo f en el punto $(a, b, f(a, b))$ debe contener a las rectas tangentes a las gráficas de las funciones $g : x \longmapsto f(x, b)$ y $h : y \longmapsto f(a, y)$ que resultan de cortar la gráfica de f con los planos $y = b$ y $x = a$ respectivamente. En particular

$$m = \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \qquad \text{y} \qquad n = \frac{\partial f}{\partial y}(a, b).$$

La condición de mejor aproximación quedará asegurada si dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$ (con $(x_n, y_n) \neq (a, b)$) convergiendo respectivamente hacia a y b, la sucesión

$$\{\frac{f(x_n, y_n) - f(a, b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)(x_n - a) - \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)(y_n - b)}{||(x_n, y_n) - (a, b)||}\}$$

converge a cero.

(Obsérvese que el problema de dividir por el vector, $(x_n - a, y_n - b)$, se resuelve tomando su norma.)

Esto ocurre en particular si f es de clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto (a, b). En tal caso,

$$\Pi(f, (a, b)) \equiv z = f(a, b) + \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)\,(x - a) + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)\,(y - b),$$

es el plano que mejor se aproxima a la gráfica de $f$en un entorno de (a, b). Dicho plano recibe el nombre de **plano tangente a la gráfica de f en el punto** $(a, b, f(a, b))$

Llamaremos **vector normal** de la gráfica de f en el punto $(a, b, f(a, b))$, al vector normal al plano tangente $\Pi(f, (a, b))$, esto es,

$$N(f, (a, b)) = \left(-\frac{\partial f}{\partial x}(a, b), -\frac{\partial f}{\partial y}(a, b), 1\right)$$

4.1.6. Curvas y superficies dadas en forma implícita

Curva en el plano en forma implícita:

En el caso en que una curva venga dada como el conjunto de puntos del plano que anulan una función g de dos variables, esto es,

$$\gamma* = \{(x,y);\ g(x,y) = 0\},$$

(por ejemplo, la elipse de semiejes c y d es tal que $g(x,y) = x^2/c^2 + y^2/d^2 - 1$) diremos que la curva viene dada en **forma implícita**.

Veamos que en tal caso, la recta tangente en un punto $(a,b) \in \gamma^*$, es la recta de ecuación implícita

$$< \nabla g(a,b), (x-a, y-b) >= 0.$$

En efecto, la curva, γ^*, resulta de cortar la gráfica de g, con el plano $z = g(a,b)$. La recta resultante de intersectar el plano tangente de g en el punto (a,b) con el plano $z = g(a,b)$ es la recta tangente a la curva y por tanto tiene de ecuaciones

$$z = g(a,b) + \frac{\partial g}{\partial x}(a,b)\,(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b)\,(y-b) \quad \text{y} \quad z = g(a,b)$$

o, lo que es lo mismo

$$< \nabla g(a,b), (x-a, y-b) >= 0.$$

Superficies en en forma implícita:

También podemos considerar subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^3$ descritos por una ecuación de la forma

$$g(x,y,z) = 0$$

para una cierta función $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Diremos que dichos conjntos son **superficies definidas de forma implícita**, (piénsese por ejemplo en la esfera, esto es,

$$S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2 + y^2 + z^2 = 1\}).$$

Si suponemos que dicha función g, admite todas sus parciales en un punto $P = (a,b,c)$, podemos considerar el plano

$$\frac{\partial g}{\partial x}(a,b,c)\,(x-a) + \frac{\partial g}{\partial y}(a,b,c)\,(y-b) + \frac{\partial g}{\partial z}(a,b,c)\,(z-c) = 0$$

que es lo mismo que escribir

$$< \nabla g(a,b,c), (x-a, y-b, z-c) >= 0.$$

Dicho plano, siempre que g sea de Clase $\mathcal{C}^1$ en un entorno del punto $P \in S$, es el que mejor se aproxima a dicha superficie en un entorno de dicho punto y recibe el nombre de **plano tangente a S en el punto P**. Así pues el **vector gradiente de** g en ese mismo punto es el vector normal de dicho plano en el punto P.

Nótese que la gráfica del campo escalar $z = f(x, y)$ es un subconjunto de la forma

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; z = f(x, y)\}).$$

Así pues, asociado a f, podemos considerar un segundo campo escalar $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ definido por $g(x, y, z) = z - f(x, y)$. Y por tanto,

$$Graf(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; g(x, y, z) = 0\})$$

no es más que una superficie que puede ser tratada como anteriormente.

4.1.7. Relación de ejercicios

1. Calcúlese el vector gradiente en un punto arbitrario (x, y) de la función f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x, y, z) = x^{y+z}, \forall x \in \mathbb{R}^+, y, z \in \mathbb{R}$

   c) $f(x, y, z) = (x + y)^z, \forall x, y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$

2. Calcúlese la recta tangente a las siguientes curvas en el punto que se indica:

   a) $1 = x^2 + y^2)$ en $(0, 1)$.

   b) $x^2 - y^2 = 3$ en $(2, 1)$.

   c) $x^2 - y = 1$ en $(1, 0,)$.

3. Calcúlese el plano tangente a las siguientes superficies en el punto que se indica:

   a) $z = \log(1 + x^2 + y^2)$ en $(0, 0, 0)$.

   b) $z^2 + 3x - x^2 - y^2 = 2$ en $(1, 1, 1)$.

   c) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$ en $(1, 2, -1)$.

   d) $z = sen(x)sen(y)$ en $(\pi/2, \pi/4)$.

4.2. Cálculo de extremos

Sumario

En esta lección vamos a examinar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.2.1. Extremos relativos de un campo escalar

Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$, $a \in A$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Se dice que

a es un **máximo relativo** o que f **tiene un máximo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

b) $f(a) \geq f(x),\ \forall x \in B(a, r)$.

a es un **mínimo relativo** o que f **tiene un mínimo relativo en** a si se verifican las siguientes condiciones:

a) Existe $r > 0$ tal que $B(a, r) \subseteq A$.

b) $f(a) \leq f(x),\ \forall x \in B(a, r)$.

a es un **extremo relativo** si o bien es un máximo relativo ó bien es un mínimo relativo.

Como ya vimos en la lección 3.2, sabemos que, en general, no existe relación entre extremo relativo y extremo absoluto, salvo que todo extremo absoluto, que sea un punto interior, también es un extremo relativo.

4.2.2. Extremos relativos y derivabilidad

Comencemos viendo que en todo extremo relativo las derivadas parciales se anulan. Antes necesitamos la siguiente definición:

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Diremos que a es un **punto crítico de** f si, para cada $i \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0.$$

Proposición 4.2.1. *Sean A es un subconjunto no vacío de vectores de $\mathbb{R}^q$, a un punto interior de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en a. Si f tiene un extremo relativo en a entonces a es un punto crítico de f.*

Este sencillo resultado nos permite elaborar la siguiente regla práctica para detectar los posibles extremos de un campo escalar.

Regla práctica para el cálculo de extremos

Sean A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^q$ y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar. Supongamos que f alcanza su máximo o su mínimo absoluto en $a \in A$, entonces a está **en una de las tres situaciones siguientes**:

1) a es un punto frontera.

2) a es un punto interior y f no admite alguna derivada parcial en a.

3) a es un punto crítico.

Una vez detectados los candidatos, se nos puede presentar una de las dos siguientes situaciones:

1) El conjunto A es compacto y f es continua.

2) No se dan alguna de las circunstancias del primer apartado.

En el primer caso sabemos, por el teorema de Weiertrass sobre la conservación de la compacidad, que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de A, por lo que basta evaluar f en los candidatos de los tres tipos para determinar quienes son estos extremos. En el segundo caso, nos contentaremos con saber que, de haber máximo ó mínimo, éste está entre nuestros candidatos.

Ejercicio: Calcúlense, si existen, los extremos de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, definida en el conjunto A que es el cuadrado de vértices $(0, 0), (1, 0), (0, 1), (1, 1)$ mediante la ley

$$f(x, y) = xy(1 - x)(1 - y).$$

¿Qué puede decirse si $A = \mathbb{R}^2$?

Vamos ahora a buscar una condición suficiente que nos permita saber cuando un punto crítico es efectivamente un extremo relativo y de qué tipo es. Este tipo de criterios envuelve, como ya pasó en variable real, a las derivadas sucesivas.

4.2.3. Derivadas parciales de orden superior

Sea A un subconjunto de vectores de $\mathbb{R}^q$ y a un punto interior de A y supongamos que f admite su derivadas parcial j-ésima en una cierta bola centrada en a, $B(a,r) \subseteq A$. Se dice que f **admite la derivada parcial de segundo orden res-pecto de las variables** i, j **en el punto** a, si la función $x \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ definida en $B(a,r)$ admite derivada parcial i-ésima en el punto a, y notaremos

$$D_{ij}f(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial(\frac{\partial f}{\partial x_j})}{\partial x_i}(a).$$

Una función de q variables admite, suponiendo que existan todas, q^2 derivadas de orden 2.

De forma análoga se definen las derivadas de orden 3, y de orden k en general. Además, se dice que f es **clase** $C^k(A)$ si existen todas las derivadas parciales de orden k en A y son continuas.

Las derivadas parciales $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a)$ se las conoce como **derivadas cruzadas**. El siguiente resultado establece una condición suficiente para que estas derivadas cruzadas coincidan.

Lema 4.2.2 (de Schwartz)**.** *Sean $f : A \to \mathbb{R}$, A un abierto de $\mathbb{R}^q$ y $a \in A$. Sean $i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ con $i \neq j$, y supongamos que existe $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a)$, $\forall x \in A$, siendo además esta función continua en a. Entonces, existe la otra derivada cruzada en a y ambas coinciden.*

En particular,

Corolario 4.2.3. *Sea A un conjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y $f \in C^2(A)$. Entonces*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j}(a) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i}(a), \quad \forall i, j \in \{1, 2, \ldots, q\}\ ,\ i \neq j\ (a \in A)\ .$$

Las derivadas parciales de orden 2 nos permiten construir una matriz que utilizaremos para calcular extremos relativos de campos escalares.

Si f admite todas sus derivadas parciales segundas en a, se define la **matriz hessiana** de f en a por:

$$H_f(a) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\, \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_q}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2\, \partial x_q}(a) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f}{\partial x_q\, \partial x_1}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q\, \partial x_2}(a) & \ldots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_q\, \partial x_q}(a) \end{pmatrix}$$

En virtud del corolario del Lema de Schwartz, si $f \in C^2(A)$, entonces, para cada $a \in A$ $H(f, a)$ es una matriz simétrica.

4.2.4. Condición suficiente para la existencia de extremos relativos

A continuación vamos a establecer condiciones que nos permitan decidir cuándo un punto crítico es un extremo relativo y, en caso afirmativo, de qué tipo es. Para ello, consideramos dos métodos. El primer método es útil para dos y tres dimensiones, mientras que el segundo es más práctico para el caso $q \geq 3$.

Caso q=2

Proposición 4.2.4. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^2$, $f \in C^2(A)$ y (a, b) un punto crítico de f.*

1. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) > 0,$$
entonces f tiene en (a, b) un <u>mínimo</u> relativo estricto.

2. *Si*
$$det(H_f(a, b)) > 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) < 0,$$
entonces f tiene en (a, b) un <u>máximo</u> relativo estricto.

3. *Si f tiene alguna derivada de segundo orden en a distinta de cero y es tal que*
$$det(H_f(a, b)) \geq 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \geq 0 \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \geq 0,$$
entonces <u>de tener</u> f un extremo relativo en (a, b), éste ha de ser un mínimo.

4. *Si f tiene alguna derivada de segundo orden en (a, b) distinta de cero y es tal que*
$$det(H_f(a, b)) \geq 0, \ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) \leq 0 \ \ y \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \leq 0,$$
entonces <u>de tener</u> f un extremo relativo en a, éste ha de ser un máximo.

5. *Si*
$$det(H_f(a, b)) < 0,$$
entonces f <u>no</u> tiene ningún extremo relativo en (a, b).

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por
$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x - 2y.$$

Caso $q = 3$:

Para el caso $q = 3$ disponemos del siguiente resultado.

Proposición 4.2.5. *Sea A es un subconjunto abierto de vectores de $\mathbb{R}^3$, $f \in C^2(A)$ y (a,b,c) un punto crítico de f.*

1. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) > 0, det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) > 0.$$

entonces f tiene en a un <u>mínimo</u> relativo estricto.

2. *Si*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) < 0, det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} > 0, det(H_f(a,b,c)) < 0.$$

entonces f tiene en (a,b,c) un <u>máximo</u> relativo estricto.

3. *Si*

$$det\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b,c) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b,c) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b,c) \end{pmatrix} < 0,$$

entonces f <u>no</u> tiene ningún extremo relativo en (a,b,c)

Ejercicio: Calcúlense los extremos de la función $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y,z) = -6x^2 - y^2 - z^2.$$

Caso $q \geq 3$:

El segundo criterio está relacionado con el signo de los autovalores de la matriz $H_f(a)$.

Recordemos que dada una matriz cuadrada A, llamamos **polinomio característico** asociado a la matriz A al polinomio, $P(\lambda) = det(A - \lambda I)$, donde por I representamos la matriz identidad. Las raíces del polinomio característico reciben el nombre de **autovalores** de la matriz A.

De hecho, si representamos por λ_k , $\forall k = 1,2,\dots q$, los autovalores de la matriz hessiana $H_f(a)$, se verifica la siguiente proposición:

Proposición 4.2.6.

i) *Si $\lambda_k > 0$, $\forall k = 1,2,\dots q$, entonces f alcanza en a un mínimo relativo.*

ii) *Si $\lambda_k < 0$, $\forall k = 1,2,\dots q$, entonces f alcanza en a un máximo relativo.*

iii) *Si existen $\lambda_i > 0$ y $\lambda_j < 0$, entonces f no alcanza extremo relativo en a.*

iv) *Si $\exists\, \lambda_i = 0$ y $\lambda_k \geq 0$, $\forall k = 1,2,\dots q$, entonces f de tener un extremo relativo en a éste ha de ser un mínimo relativo.*

v) Si $\exists\, \lambda_i = 0 \quad y \quad \lambda_k \leq 0 \ , \ \forall k = 1, 2, \ldots q \ ,$ *entonces* f *de tener un extremo relativo en a éste ha de ser un máximo relativo.*

El único inconveniente de este criterio es la más que probable dificultad para calcular los autovalores de la matriz. Este problema queda resuelto con la **regla de Silvester** que nos va a permitir decidir el número de autovalores positivos y negativos sin necesidad de calcularlos, simplemente observando los coeficientes del polinomio característico de H. Concretamente, si

$$P(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \cdots + a_q\lambda^q,$$

y notamos por $V(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_q)$ al **número de cambios de signo que se dan coeficiente a coeficiente**, entonces la regla de Silvester asegura que

$$V(a_0, a_1, a_2, \ldots, a_q) = \quad \text{número de autovalores positivos de} \quad H \ .$$

$$V(a_0, -a_1, a_2, \ldots, (-1)^q\, a_q) = \quad \text{número de autovalores negativos de} \quad H \ .$$

4.2.5. Relación de ejercicios

1. Consideremos las funciones reales f y g dadas por:

    a) $f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y \ \ \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$.
    b) $g(x, y, z) = (x + z^2)e^{x(y^2+z^2+1)} \ \ \forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

    Se pide:

    a) Calcúlense los puntos críticos.
    b) Calcúlese la matriz hessiana en los puntos críticos.
    c) Estúdiese la existencia de extremos relativos.

2. Calcúlense los extremos de $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $f(x, y) = x^2 - y^2$.
    b) $f(x, y) = |x| + |y|$.
    c) $f(x, y) = |x| + y$.

3. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ dos parámetros, y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real de dos variables reales dada por $f(x, y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estúdiese la existencia de extremos de f en función de los parámetros.

4. Calcúlense los extremos relativos de los siguientes campos escalares definidos en $\mathbb{R}^2$.

    a) $f(x, y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

b) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

c) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.

5. Calcúlense los extremos relativos de los siguientes campos escalares definidos en $\mathbb{R}^2$. Determínese si dichos extremos son absolutos o no.

a) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

b) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

c) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0)$

d) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$

e) $f(x,y) = (x^2 + 2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

f) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x\,y)$.

6. Calcúlense los extremos relativos del campo escalar definido en $\mathbb{R}^3$ por $f(x,y,z) = xy + xz + yz$. Determínese si dichos extremos son absolutos o no.

7. Una función f definida en un abierto del plano se dice que es **armónica** si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

en todo punto de su dominio. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

a) $f(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(\frac{x}{y}) \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) : \; x \in \mathbb{R}\}$.

b) $g(x,y) = e^{-x}\cos y + e^{-y}\cos x \;\; \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

4.3. Extremos condicionados.

Sumario

En esta lección vamos a enunciar criterios que nos permitan determinar los extremos de un campo escalar en un cierto subconjunto del dominio de dicho campo escalar .El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

4.3.1. Motivación

Para motivar esta lección vamos a considerar dos ejemplos:

Ejercicio 1: Sea el triángulo

$$\mathrm{T} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 0 \leq x \leq y \leq 4\}.$$

Se trata de calcular los extremos de la función $f : \mathrm{T} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$.

Dado que T es un conjunto compacto y f es una función continua, sabemos que f alcanza su valor máximo y su valor mínimo en sendos puntos de T. Sabemos que ésta función no tiene ningún punto crítico en dicho conjunto por lo que sus valores máximo y mínimo se alcanzarán en puntos de la frontera, esto es, ó bien los vértices del triángulo T ó bien en algún punto de sus tres lados. En consecuencia, los puntos a tener en cuenta son

1) Los tres vértices

2) Para cada lado, los puntos de cada uno de éstos en los que la función restringida alcance sus extremos.

Así pues, se trata de calcular los extremos de f, restringida a cada uno de los siguientes conjuntos

$$M_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times]0,4[:\ x = 0\},$$

$$M_2 = \{(x,y) \in]0,4[\times\mathbb{R} :\ y = 4\}, \quad M_3 = \{(x,y) \in]0,4[\times]0,4[:\ x = y\},$$

$$M_4 = \{(0,0)\},\ M_5 = \{(0,4)\}\ M_6 = \{(4,4)\}.$$

Dado un subconjunto M del dominio de f, llamaremos **extremo local de f condicionado por** M a cualquier extremo de la función f restringida a M.

En este caso, la búsqueda de los extremos locales condicionados por M_4, M_5 y M_6 es trivial puesto que estos conjuntos constan de un sólo punto. Con respecto a los otros conjuntos bastará eliminar, en cada caso, una variable y calcular los extremos de la correspondiente función real de variable real.

Consideremos el segundo ejemplo:

Ejercicio 2:

Consideremos una placa plana ciruclar P de radio uno, y que se calienta de manera que la temperatura en un punto $(x,y) \in P$ es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x,$$

y calculemos sus posibles extremos absolutos.

Dado que P es un conjunto compacto y f es un campo continuo, sabemos que f alcanza sus valores máximo y mínimo en sendos puntos de P. Sabemos que $(1/2, 0)$ es el único punto crítico de f, por lo que al menos su valor máximo o mínimo se alcanzará en algún punto del tipo I), esto es, en algún punto de la circunferencia

$$\mathrm{C} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2 + y^2 = 1\}.$$

Ahora debemos calcular los puntos extremos de la función T condicionados por el conjunto C. En este caso aparece una dificultad añadida: no podemos despejar ninguna variable en función de la otra.

4.3.2. Conjuntos determinados por una función

Para este último ejercicio, así como en aquellos casos en que haya más de dos variables, necesitaremos desarrollar una nueva técnica. Primero analicemos la situación en ambos ejemplos y veamos que el planteamiento del problema del cálculo de extremos condicionados el conjunto M obedece al siguiente esquema general:

Sea A un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^q$ y f un campo escalar definido en A. Sea M un subconjunto de A al que podemos asociar una función $g : A \longrightarrow \mathbb{R}^{q-k}$ tal que:

1. $M = \{x \in A;\ g(x) = 0\}$.
2. Todas sus funciones coordenadas g_i tienen derivadas parciales continuas en A.
3. Su matiz jacobiana $J_g(x)$ tiene rango $q - k$ en A.

Este hecho se reflejará diciendo que g **determina a** M.

Así pues, en el ejercicio 1, tenemos la siguiente situación:

1. La función $g(x,y) = x$ definida en $A = \mathbb{R}\times]0,4[$ determina a M_1,
2. $g(x,y) = y - 4$ definida en $A =]0,4] \times \mathbb{R}$ determina a M_2,
3. $g(x,y) = y - x$ definida en $A =]0,4[\times]0,4[$ a M_3,
4. $g(x,y) = (x, y - x)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_4,
5. $g(x,y) = (x, y - 4)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_5,
6. $g(x,y) = (x - 4, y - 4)$ definida en $A = \mathbb{R}^2$ a M_6.

Y para el ejercicio 2, $g(x,y) = x^2 + y^2 - 1$ definida en $A = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ determina a C.

Hagamos ahora la siguiente observación.

Proposición 4.3.1. *Sean A un conjunto abierto, $g = (g_1, g_2, ..., g_{q-k})$ una función que determina a un subconjunto M de A y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo escalar que admite todas sus derivadas parciales en A y son continuas en $a \in M$. Si f alcanza un extremo condicionado por M en a, entonces existe un único $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$ tal que*

$$\frac{\partial(f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_{q-k} g_{q-k})}{\partial x_i}(a) = 0, \quad \forall i \in \{1, 2, ..., q\}.$$

Esto nos proporciona la siguiente **estrategia:**

Sean f, A, g y M como en el enunciado de la proposición anterior. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$, llamamos **función de Lagrange asociada a f,M y α** a la función L_α definida en A por

$$L_\alpha = f + \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2 + ... + \alpha_{q-k} g_{q-k}.$$

Dicha función recibe el nombre de .

La proposición anterior nos afirma que:

" Los extremos de f condicionados por M son soluciones del sistema siguiente, llamado **sistema de Lagrange** *".*

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_1}(x) = 0,$

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_2}(x) = 0,$

...

$\frac{\partial L_\alpha}{\partial x_q}(x) = 0,$

$g_1(x) = 0, \; ..., \; g_{q-k}(x) = 0.$

Si $a = (a_1, a_2, ..., a_q) \in A$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{q-k}) \in \mathbb{R}^{q-k}$ son solución de este sistema, sabemos que α está determinado de forma única y sus coordenadas reciben el nombre de **Multiplicadores de Lagrange para el punto** a.

Ejercicio: Calcúlense los multiplicadores de Lagrange en los ejercicios anteriores.

4.3.3. Relación de ejercicios

1. Encuéntrense los puntos donde la función $f : A \to \mathbb{R}$ definida como
$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y \qquad ((x,y) \in \mathbb{R}^2)$$
alcanza sus extremos absolutos siendo
$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x,y \geq 0, \ x+y \leq 3\}.$$

2. Calcúlense los extremos de $f : [-1,1] \times [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:
   a) $f(x,y) = x^2 - y^2$.
   b) $f(x,y) = |x| + |y|$.
   c) $f(x,y) = |x| + y$.

3. Encuéntrense los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 \leq 2x, \ y \geq 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

4. Determínese el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x+y-z=5$ que está más cerca del origen.

5. Calcúlese la distancia mínima del origen a la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2 - z^2 - 1 = 0$

6. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por
$$M(x,y,z) = 6x - y^2 + xz + 60$$
basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

7. Determínese el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde a, b son reales positivos.

8. Estúdiense los extremos de la función $f : (\mathbb{R}^+)^3 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y,z) = logx + logy + logz$ en la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

9. Hállese la mínima distancia entre la recta $x+y=4$ y la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$.

10. Hállense los extremos condicionados de la función $f(x,y) = x^3 + xy^2$ donde $xy - a^2 = 0, \quad (a \neq 0)$.

11. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hállese que dimensiones debe tener para que conseguir el máximo volumen.

Capítulo 5

Series de números reales.

5.1. Series de números reales

Sumario

Introduciremos en esta lección una de las herramientas más potentes del Análisis Matemático: las series. Nosotros las usaremos para aproximar los valores que se obtendrían al evaluar algunas funciones, ya que dichos valores no son más que la suma de una determinada serie. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.1.1. Series de números reales

Para motivar el concepto de serie de números reales vamos a exponer la siguiente paradoja propuesta por Zenón (495-435 a. de C.)

Paradoja del corredor: " *Un corredor no puede alcanzar nunca la meta.* "

Para justificar esta conclusión vamos a dividir el recorrido total que ha de hacer el corredor en la siguiente forma: consideramos en primer lugar la mitad del recorrido inicial y a éste añadimos la mitad del recorrido restante, a éste último añadimos igualmente la mitad del recorrido restante y así sucesivamente. Obsérvese que para recorrer por separado cada una de estas partes, cada vez más pequeñas, se necesita una cantidad positiva de tiempo, parece natural afirmar que el tiempo necesario para el trayecto total ha de ser la suma de todas estas cantidades de tiempo. Decir que el corredor nunca puede alcanzar la meta equivale a decir que nunca llega en un tiempo finito; o dicho de otro modo, que la suma de un número infinito de intervalos positivos de tiempo no puede ser finita.

Esta paradoja fue resuelta muy posteriormente con la introducción del concepto de serie.

Se llama **serie de números reales** a todo par ordenado de sucesiones de números reales $(\{a_n\}, \{S_n\})$, donde $(\{a_n\}$ es una sucesión arbitraria y, para cada natural n, la segunda sucesión es tal que: $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_n$.

La sucesión $\{S_n\}$ recibe el nombre de **sucesión de sumas parciales de la serie.** Dicha serie suele representarse por $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.

Se dice que la serie $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ es **convergente** si lo es la sucesión $\{S_n\}$ de sus sumas parciales. Al límite de ésta última sucesión se le denomina **suma de la serie** $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ y se representa por $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Antes de pasar a los ejemplos veamos algunas propiedades de las series convergentes.

Proposición 5.1.1. *Sean* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *y* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *dos series de números reales.*

1. *Si la serie* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *es convergente entonces la sucesión* $\{a_n\}$ *converge a cero.*

2. *Si ambas series son convergentes y* r, s *son dos números reales, entonces la serie* $\sum_{n\geq 1} ra_n + sb_n$ *es convergente y se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ra_n + sb_n) = r\sum_{n=1}^{\infty} a_n + s\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

3. *Sea* $k \in \mathbb{N}$. *Entonces la serie* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$ *es convergente si, y sólo si, la serie* $\sum\limits_{n\geq 1} a_{n+k}$ *también lo es. Además en caso de que converjan tenemos que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ... + a_k + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n+k}.$$

4. *Supongamos que, para cada* $n \in \mathbb{N}$ *se tiene que* $|a_n| \leq b_n$. *Si la serie* $\sum\limits_{n\geq 1} b_n$ *es convergente entonces* $\sum_{n\geq 1} a_n$ *también es convergente y se verifica que:*

$$|\sum_{n=1}^{\infty} a_n| \leq \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

En particular , si la serie $\sum\limits_{n\geq 1} |a_n|$ *es convergente también lo es la serie* $\sum\limits_{n\geq 1} a_n$.

5. *(***Criterio de condensación***) Si la sucesión $\{a_n\}$ es una sucesión decreciente de números reales no negativos, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente si, y sólo si, la serie $\sum_{n\geq 1} 2^n a_{2^n}$ también lo es.*

Veamos ahora algunos ejemplos de series

1. **Serie geométrica de razón** $r \neq 1$.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = r^{n-1}$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1+r+...+r^{n-1} = \frac{1-r^n}{1-r}$. De aquí se deduce que dicha serie es convergente si, y sólo si, $|r| < 1$. Además en caso de que sea convergente se tiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^{n-1} = \frac{1}{1-r}.$$

2. **Serie cuyo término general es** $a_n = \frac{1}{(n-1)!}$.

   Es aquella cuya sucesión de sumas parciales correspondiente es

$$S_n = 1 + 1 + 1/2 + ... + \frac{1}{(n-1)!}.$$

   Veremos más adelante que dicha serie es convergente, de hecho, se puede probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} 1/(n-1)! = e.$$

3. **Serie armónica**.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = 1/n$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1 + 1/2 + ... + 1/n$. Se puede probar, usando la última propiedad que que dicha serie no es convergente. En general se puede probar, usando esta misma propiedad, que la serie cuyo término general es $a_n = 1/n^\alpha$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

4. **Serie armónica-alternada**.

   Es aquella cuyo término general es $a_n = (-1)^{n+1}/n$ y cuya sucesión de sumas parciales es por tanto $S_n = 1 - 1/2 + ... + (-1)^{n+1}/n$. Más tarde deduciremos que dicha serie es convergente, de hecho se puede probar que

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1}/n = log2.$$

Obsérvese que este último ejemplo prueba que la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente y no lo es la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n|$. Esto da pie a la siguiente definición.

Se dice que una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie de valores absolutos $\sum_{n\geq 1} |a_n|$ es convergente.

Resumiendo hemos visto que:

$$\text{absolutamente convergente} \Rightarrow \text{convergente}$$

$$\text{convergente} \not\Rightarrow \text{absolutamente convergente.}$$

Desafortunadamente, a excepción de los ejemplos anteriormente ya citados y algunos derivados de ellos, para el resto de las series convergentes es difícil calcular la suma. Esto nos obliga a reducir nuestro estudio a probar si una determinada serie es convergente o no.

5.1.2. Criterios de convergencia

1. **Series de términos no negativos**

   Obsérvese que si una serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es de términos no negativos, para cada $n \in \mathbb{N}$, $a_n \geq 0$, entonces la serie de sumas parciales es una sucesión creciente, y por tanto, convergente si, y sólo si, está mayorada. En consecuencia. la serie es convergente si, y sólo si, la sucesión de sumas parciales está mayorada. Esta particularidad justifica que, para estas series, dispongamos de numerosos criterios de convergencia. Por otra parte, es claro que, después de las propiedades vistas con anterioridad, sólo las series $\sum_{n\geq 1} a_n$, cuyos conjuntos $\{n \in \mathbb{N}; a_n < 0\}$ ó $\{n \in \mathbb{N}; a_n > 0\}$ sean infinitos quedan excluidos de este epígrafe.

   Veamos algunos criterios de convergencia para este tipo de series.

   Teorema 5.1.2. *(Criterio de comparación)*
   Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no negativos y $\{b_n\}$ una sucesión de números reales positivos.

   a*) Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ converge a un número positivo, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge si, y sólo si, converge la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$.*

   b*) Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ converge a cero y la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.*

   c*) Si la sucesión $\{a_n/b_n\}$ diverge positivamente y la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} b_n$ es convergente.*

Conviene resaltar que este criterio se mostrará más potente cuánto mayor número de ejemplos conozcamos su convergencia. En este conocimiento es indispensable recordar que la serie cuyo término general es $a_n = 1/n^\alpha$ es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Veamos ahora algunos criterios de convergencia intrínsecos, esto es, criterios que involucran sólo a la propia serie.

En primer lugar, obsérvese que si el el conjunto $\{n \in \mathbb{N};\ a_n \geq 1\}$ es infinito, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente, ya que podríamos construir una parcial de la sucesión término general no convergente a cero.

Veamos a continuación un primer criterio positivo

Teorema 5.1.3. *(Criterio de la raíz)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales no negativos y $L \in [0,1[$. Si la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.

Si los términos son positivos el siguiente criterio es más cómodo

Teorema 5.1.4. *(Criterio del cociente)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y $L \in [0,1[$. Entonces

a) *Si la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.*

b) *Si la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$ converge a $1/L$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ no es convergente.*

Como consecuencia obtenemos por ejemplo que la serie $\sum_{n\geq 1} 1/n!$ es convergente.

Obsérvese que, cuando dicho cociente $\{a_{n+1}/a_n\}$ tiende a uno, este criterio nos deja sin información. En algunos casos esta laguna se resuelve con un tercer criterio:

Teorema 5.1.5. *(Criterio de Raabe)*
Sea $\{a_n\}$ una sucesión de números reales positivos y $L \in [0,1[$. Entonces

a) *Si la sucesión $\{n(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n})\}$ converge a L, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$* **no** *es convergente.*

b) *Si la sucesión $\{n(1-\frac{a_{n+1}}{a_n})\}$ converge a $1/L$, entonces la serie $\sum_{n\geq 1} a_n$ es convergente.*

2. **Series de términos cualesquiera**

La estrategia que seguiremos para las series no incluidas en el apartado anterior será la de estudiar primeramente si son absolutamente convergentes, y para ello usaremos los criterios del apartado anterior. Si son absolutamente convergentes, en virtud de lo ya visto, serán también convergentes, en otro caso necesitaríamos de algún otro criterio. En este curso sólo veremos el criterio de Leibnitz para series alternadas.

Teorema 5.1.6. *(Criterio de Leibnitz)*
Si $\{a_n\}$ *es una sucesión de números reales decreciente y convergente a cero, entonces la serie* $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}a_n$ *es convergente.*

Como consecuencia ya podemos justificar que la serie $\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}/n$ es convergente.

5.1.3. Relación de ejercicios

Estúdiese la convergencia de las siguientes series de números reales:

1. a) $\sum \frac{1}{n2^n}$, b) $\sum \frac{log(n)}{n}$, c) $\sum \frac{1}{2n-1}$, d) $\sum(-1)^n\frac{1}{n}$.
2. a) $\sum \frac{2^n}{n}$. b) $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$. c) $\sum \frac{1}{nlog(n)}$. d) $\sum \frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}}$.
3. a) $\sum(-1)^n\frac{2n-1}{2^n}$. b)$\sum \frac{1}{n!}$. $\sum \frac{1}{(3n-2)(3n+1)}$.
4. a)$\sum(-1)^n\frac{1}{log(n)}$. b) $\sum \frac{n^n}{e^{n^2+1}}$. c) $\sum \frac{2^n n!}{n^n}$.

5.2. Series de potencias

Sumario

Esta lección está dedicada al estudio de un tipo muy particular y muy interesante de series funcionales: las series de potencias. Éstas nos proporcionan un método expeditivo para construir nuevas funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ no racionales. En particular reaparecerán la mayoría de las funciones elementales, lo que nos permitirá un mejor conocimiento de éstas. La técnica usada consiste en dar sentido al concepto de polinomio de Taylor de grado infinito. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

5.2.1. Series de potencias

.

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. La serie

$$\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$$

recibe el nombre de **serie de potencias centrada en** a. A los términos de la sucesión $\{a_n\}$, se les denomina **coeficientes** de la serie.

Dado $A \subseteq \mathbb{R}$, se dice que la serie converge

1. **puntualmente en** A, si la serie $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ converge para todo punto x de A. Se suele notar, para cada $x \in A$, por

   $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1}$$

   a la **suma** de dicha serie.
2. **absolutamente en** A si la serie $\sum_{n\geq 1} |a_n(x-a)^{n-1}|$ converge para todo punto x de A.

3. **uniformemente en** A si

   para cada $\epsilon > 0$, existe un natural n_0, de forma que si $n \geq n_0$, entonces $|\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x-a)^{k-1} - \sum_{k=1}^{n} a_k(x-a)^{k-1}| < \epsilon$, para todo $x \in A$.

Como primer resultado, establecemos el siguiente importante resultado

Teorema 5.2.1. Test de Weierstrass

Sea B un subconjunto no vacío de números reales, $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe una sucesión de números reales $\{c_n\}$ tal que

$$|a_n(x-a)^{n-1}| \leq c_n, \quad \forall x \in B, \forall n$$

y tal que la correspondiente serie $\sum_{n\geq 1} c_n$ es convergente. Entonces la serie de potencias centrada en a converge absolutamente y uniformemente en B

Este resultado nos proporciona un método general para estudiar la convergencia puntual y uniforme de cualquier serie de potencias.

Proposición 5.2.2. Lema de Abel

Sean $a \in \mathbb{R}$ y $\{a_n\}$ una sucesión de números reales. Supongamos que existe $r > 0$ tal que la sucesión $\{a_n r^{n-1}\}$ está acotada. Entonces la serie funcional $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ converge absoluta y uniformemente en el intervalo $[a-\rho, a+\rho]$, siempre que $o < \rho < r$.

La búsqueda del número positivo r "más grande posible"que cumpla la hipótesis del Lema de Abel motiva el concepto de radio de convergencia. Concretamente:

Sean $A := \{r \in \mathbb{R}^+; \ \ \{a_n r^{n-1}\}$ está acotada$\}$ y $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ la serie de potencias asociada.

1. Si $A = \emptyset$, diremos que el **radio de convergencia** de la serie $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ es igual a cero, $R = 0$.
2. Si $A \neq \emptyset$ y A no está mayorado, diremos que el **radio de convergencia** de dicha serie es **infinito** , $R = \infty$.
3. Si $A \neq \emptyset$ y A está mayorado diremos que el correspondiente **radio de convergencia** es el **supremo** del conjunto A, esto es $R = Sup(A)$.

Observemos que el radio de convergencia es independiente del centro a de la serie. Además, como veremos en el siguiente resultado, el conocimiento del radio de convergencia proporciona $''$ casi $''$ toda la información sobre la convergencia de la serie.

Proposición 5.2.3. *Sea $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ una serie de potencias cuyo radio de convergencia es R.*

1. *Si R es cero, entonces la serie sólo converge en a.*

2. *Si R es infinito, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado contenido en $\mathbb{R}$.*

3. *Si $R \in \mathbb{R}^+$, entonces la serie converge absoluta y uniformemente en cada intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-R, a+R[$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{R}\backslash[a-R, a+R]$.*

Busquemos ahora un procedimiento expeditivo para determinar el radio de convergencia.

Proposición 5.2.4. *Sea $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ una serie de potencias cuyos coeficientes son no nulos y sea R su radio de convergencia.*

1. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ diverge positivamente, $R = 0$.*

2. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ converge a un número real positivo L, $R = \frac{1}{L}$.*

3. *Si la sucesión $\{|\frac{a_{n+1}}{a_n}|\}$ converge a cero, $R = \infty$.*

Nota

Antes de proseguir, conviene resaltar, como ya habíamos anticipado, que los dos primeros apartados de la penúltima proposición, describen con total exactitud la convergencia de una serie de potencias cuyo radio de convergencia es cero o infinito. Sin embargo, nada se afirma, cuando dicho radio es un número real positivo R, sobre los extremos del intervalo. De hecho, existen series de potencias con idéntico radio de convergencia pero con distinto carácter de convergencia en dichos puntos, piénsese por ejemplo en la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}(x-a)^{n-1}$$

y en la serie

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n+1}(x-a)^{n-1}.$$

Este hecho motiva el siguiente resultado.

Teorema 5.2.5. Teorema de Abel

Sea $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ una serie de potencias, cuyo radio de convergencia R es no nulo. Si la serie converge en el punto $a+R$ (resp. $a-R$) entonces lo hace uniformemente en el intervalo $[a, a+R]$.

5.2.2. Funciones definidas por series de potencias

Sea $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ una serie de potencias, cuyo radio de convergencia R es no nulo (serie de potencias no trivial). Si $R \in \mathbb{R}^+$, llamemos I al intervalo $]a-R, a+R[$ e $I = \mathbb{R}$ si R es infinito. En adelante, nos referiremos al intervalo I como el **intervalo de convergencia** de la serie de potencias $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$.

Sea $\sum_{n\geq 1} a_n(x-a)^{n-1}$ una serie de potencias no trivial cuyo radio de convergencia es R, y sea I su intervalo de convergencia. Podemos definir:

$$f : I \longrightarrow \mathbb{R},$$

mediante la fórmula

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-a)^{n-1}.$$

Si la serie es convergente en $a+R$ entonces f se puede extender al intervalo $]a-R, a+R]$, con $f(a+R) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n R^{n-1}$ resultando una función continua en $]a-R, a+R]$.

Pues bien, veamos que dichas funciones son también derivables en I. De hecho,

Teorema 5.2.6. *Sea f como arriba, entonces f es de clase $\mathcal{C}^\infty(I)$ y para cada $x \in I$ y $k \in \mathbb{N}$, se tiene que*

$$f^{k)}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+k-1)!}{(n-1)!} a_{n+k}(x-a)^{n-1} = \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{(n-1)!}{(n-k-1)!} a_n(x-a)^{n-k-1}.$$

En particular,

$$f^{k)}(a) = k! a_{k+1}.$$

Veamos ahora algunas consecuencias de los últimos resultados.

1. La suma de una serie de potencias puede derivarse como si se tratase de una suma finita.

   Nótese que la fórmula del teorema anterior de las derivadas sucesivas de la función definida por una serie de potencias, significa simplemente que dichas derivadas pueden obtenerse derivando cada uno de los términos de la serie de partida.

2. La serie de potencias está totalmente determinada.

   La misma fórmula del teorema anterior nos dice que en caso de que una función sea desarrollable, esto es, f pueda escribirse como suma de una serie de potencias, ésta está completamente determinada, de hecho, en cada punto $a \in I$,

   $$a_n = f^{n-1)}(a)/(n-1)!,$$

   de ahí que la correspondiente serie reciba el nombre de **serie de Taylor**.

5.2.3. Desarrollo en serie de Taylor

Hemos visto pues que toda serie definida por una serie de potencias es de clase C^∞ en el intervalo de convergencia I. ¿Es cierto recíproco? Es decir, si f es de clase C^∞ en un cierto intervalo I, ¿se puede asegurar que la serie de Taylor de f es convergente en I? En general la respuesta es no. Existen funciones de clase C^∞ para las cuales la serie serie de Taylor tiene radio de convergencia cero y por otra parte existen también funciones (por ejemplo, $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \neq 0, \ f(0) = 0$) para las cuales la suma de su serie de Taylor no coincide con la función más que en el punto que la generó (En el ejemplo, $f^{n)}(0) = 0$). El problema de cuándo la respuesta es positiva es un problema muy interesante que no vamos ahora a indagar. Como ejemplo de respuesta positiva, consideraremos exclusivamente el siguiente resultado:

Proposición 5.2.7. *Sea I un intervalo y f un función de clase C^∞ en I. Supon-gamos que existe $M > 0$ tal que, para cada $x \in I$ y cada $n \in \mathbb{N}$, se verifica que:*

$$|f^{n)}(x)| \leq M,$$

entonces para cualesquiera $a, x \in I$, se tiene que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f^{n-1)}(a)}{(n-1)!}(x-a)^{n-1}.$$

Y como consecuencia obtenemos los siguientes desarrollos en serie de potencias de algunas funciones elementales.

Corolario 5.2.8.

1) *Para cada $x \in \mathbb{R}$, se tiene:*

   a) $e^x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1}$.

   b) $cos(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2(n-1)!} x^{2(n-1)}$.

   c) $sen(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}$.

2) *Para cada $x \in]0, 2[$, se tiene:*

$$log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

3) *Para cada $x \in]-1, 1[$, se tiene:*

$$arctg(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n-1} x^{2n-1}.$$

Nótese que el desarrollo en serie de la función arcotangente, recién obtenido, tiene radio de convergencia uno y no infinito como cabría esperar a primera vista, dado que la función arcotangentes es de clase C^∞.

5.2.4. Aplicaciones: Suma de series de números reales

Para finalizar, vamos a dar dos ejemplos de cómo sumar dos series de números reales usando las series de potencias.

Sabemos por el corolario anterior que para cada $x \in]0,2[$,

$$log(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n.$$

Por otra parte, aplicando el teorema de Abel, el segundo miembro define la función $g :]0,2] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n,$$

la cual es continua en 2, obtenemos así que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = g(2) = lim_{x\to 2} g(x) = lim_{x \to 2} log(x) = log 2.$$

Tal como advertimos en el comienzo del capítulo el conocimiento de las series de potencias nos proporcionan un método de aproximación de los valores $log2$ y $\pi/4$ respectivamente

5.2.5. Relación de ejercicios

1. Hállese el radio de convergencia R de cada una de las series de potencias que siguen y, en caso de que $R \in \mathbb{R}^+$ estúdiese el comportamiento de la serie en los puntos R y $-R$:

   a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^{n-1}(2n-1)}\ x^{n-1}$;

   b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\log(n+1)}\ x^{n-1}$;

   c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1{,}3{,}5.\cdots(2n-1)}{2{,}4{,}6.\cdots(2n)}\ x^{n-1}$;

   .

2. Calcúlese el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geq 1} n\, x^n \ ; \ \sum_{n\geq 1} n^2\, x^n \ ; \ \sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)^3}{(n-1)!} x^{n-1}.$$

3. Encuéntrese, cuando ello sea posible, el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto a de la función f en cada uno de los casos siguientes:

   a) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{(1+x)}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $a = 0$.

b) $f : \mathbb{R} - \{1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{x}{(1+x)^3}$, $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$; $a = 0$.

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$, $\forall x \in \mathbb{R}^*$, $f(0) = 1$; $a = 0$.

d) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$; $a = 0$.

4. Demuéstrese, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función arcotangente, que

$$\pi/4 = arctg(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$

Capítulo 6

Cálculo integral en una variable

6.1. Funciones integrables

Sumario

En esta lección introduciremos el concepto de función integrable, en el sentido de Riemann, como una evolución natural del método de exhaución, usado por los griegos para calcular ciertas áreas, y estudiaremos sus propiedades. Enunciaremos el teorema fundamental del cálculo que relaciona la integral con la derivación y la Regla de Barrow indispensable para el cálculo integral. Finalmente estudiaremos las funciones impropiamente integrables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

6.1.1. Funciones integrables

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $P = \{x_0, x_1, ..., x_n\}$ una partición del intervalo $[a, b]$. Para cada $k \in \{1, 2, ..., n\}$, llamemos I_k al intervalo $[x_{k-1}, x_k]$ y notemos por

$$M_k(f, P) = Sup\ f(I_k), \quad m_k(f, P) = Inf\ f(I_k).$$

Llamaremos **suma superior de Riemann de la función f respecto de la partición P** al número real

$$S(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} M_k(f,P)(x_k - x_{k-1}),$$

y análogamente llamaremos **suma inferior de Riemann de la función f respecto de la partición P** al número real

$$I(f,P) := \sum_{k=1}^{k=n} m_k(f,P)(x_k - x_{k-1}).$$

Sea

$$S := \{S(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}$$

e

$$I := \{I(f,P); P \ \text{ partición del intevalo } [a,b]\}.$$

Es claro que dadas dos particiones cualesquiera P y Q del intervalo $[a,b]$ se tiene que

$$I(f,P) \leq S(f,Q),$$

y por tanto el conjunto S es un conjunto minorado de números reales. Llamaremos **integral superior de** f en el intervalo $[a,b]$, al ínfimo del conjunto S que notaremos por

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Por idéntica razón el conjunto I es un conjunto mayorado de números reales y llamaremos **integral inferior de** f en el intervalo $[a,b]$ al supremo de dicho conjunto, supremo que notaremos por

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Diremos que f **es integrable en el intervalo** $[a,b]$ si el ínfimo del conjunto S y el supremo del conjunto I coinciden, esto es, si

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Si f es integrable en $[a,b]$ dicho valor $InfS = Sup\ I$ será conocido como la **integral de f en** $[a,b]$, y se notará por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Para mayor comodidad, si f es integrable en $[a,b]$, acordamos los siguientes convenios:

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx, \quad \text{y} \quad \int_a^a f(x)dx = 0.$$

Observación

Es fácil probar que si $[a,b]$ es un intervalo y $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada, entonces f es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, existe una sucesión de particiones $\{P_n\}$ verificando que la sucesión $\{S(f,P_n) - I(f,P_n)\}$ converge a cero.

6.1.2. Ejemplos

1) Es fácil probar que toda función constante es integrable, de hecho

$$\int_a^b c dx = c(b-a).$$

2) Las funciones monótonas en un intervalo $[a,b]$ son funciones integrables en dicho intervalo.

3) Las funciones continuas son también funciones integrables.

4) De hecho tenemos que

   Proposición 6.1.1. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces si $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función que coincide con f excepto a lo más en un número finito de puntos de $[a,b]$, g es también una función integrable y además*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

5) La función de Dirichlet:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q} \end{cases}$$

   No es integrable en $[0,1]$. De hecho, es fácil probar que

$$\overline{\int_0^1} f(x)dx = 1, \quad \underline{\int_0^1} f(x)dx = 0.$$

6.1.3. Propiedades de las funciones integrables

Veamos ahora algunas propiedades de las funciones integrables

Proposición 6.1.2. *Sean $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables en $[a, b]$. Entonces*

1. *$f + g$ es una nueva función integrable en $[a, b]$ y se verifica que*
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$
2. *Para cada $r \in \mathbb{R}$, la función rf es una nueva función integrable en $[a, b]$ y se verifica que*
$$\int_a^b (rf)(x)dx = r\int_a^b f(x)dx.$$
3. *Si para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$, se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$
4. *$|f|$ es también una función integrable y se verifica que*
$$|\int_a^b f(x)dx| \leq \int_a^b |f|(x)dx.$$
5. *$f.g$ es una nueva función integrable en $[a, b]$,* **pero** *en general*
$$\int_a^b (f.g)(x)dx \neq \int_a^b f(x)dx. \int_a^b g(x)dx.$$

Finalmente también se verifica la propiedad de la aditividad respecto del intervalo, esto es,

Proposición 6.1.3. *Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función acotada y sea $c \in]a, b[$. Entonces f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, f es integrable en $[a, c]$ y $[c, b]$. En caso de ser integrables se tiene que*
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Como ejercicio calcúlese la siguiente integral:
$$\int_0^3 3E[x] + 2\ dx.$$

6.1.4. Relación entre integración y derivación: Teorema Fundamental del Cálculo.

Estudiaremos ahora la importante conexión entre los tres conceptos básicos de la primera parte del curso: continuidad, derivación e integración. Para poder enunciar este resultado, esto es, el teorema fundamental del cálculo, necesitamos introducir el concepto de integral indefinida.

Sea I un intervalo de números reales, y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Si $c \in I$ llamaremos **integral indefinida de** f **con origen en** c a la función $F : I \longrightarrow \mathbb{R}$, definida, para cada $x \in I$, por

$$F(x) = \int_c^x f(t)dt.$$

Teorema 6.1.4. *(fundamental del Cálculo)*
Sea f una función continua en un intervalo I y sea F cualquier integral indefinida de f. Entonces F es derivable en I y para cada $x \in I$,

$$F'(x) = f(x).$$

Ejercicio: Sea $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t \; dt.$$

Calcúlese F(1), la función derivada de F y determínense sus propiedades analíticas.

6.1.5. Cómo evaluar una integral: Regla de Barrow.

El siguiente resultado, el cual es consecuencia del teorema del valor medio, es importantísimo ya que nos permitirá evaluar la integral de una función conocida su primitiva. Para enunciarlo, necesitamos recordar que dada una función f definida en un intervalo I se dice que f **admite primitiva** si existe una función $G : I \longrightarrow \mathbb{R}$ derivable tal que, para cada $x \in I$, $G'(x) = f(x)$. Como consecuencia del teorema del Valor Medio G está determinada de manera única, salvo una constante aditiva.

Teorema 6.1.5. *(Regla de Barrow)*
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable y supongamos que admite una primitiva G. Entonces

$$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a).$$

Es claro que si f es continua, entonces, como consecuencia del teorema fundamental del cálculo, cualquier integral indefinida F de f es una primitiva de f. Pero si intentamos evaluar dichas primitivas no obtenemos ninguna información no trivial. Por tanto el problema de evaluar la integral de una función continua f, para aplicar la Regla de Barrow, consiste en conseguir una primitiva de f susceptible de ser evaluada en los puntos a y b.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 (2x^3+1)\ dx.$$

A menudo conviene transformar la función f en otra función cuya primitiva sea más accesible; los siguientes resultados ofrecen algunas transformaciones interesantes.

Corolario 6.1.6. *(teorema del cambio de variable)*

Sea $g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función de clase $\mathcal{C}^1([a,b])$ con $g'(x) \neq 0$. Si f es una función continua en $g([a,b])$, entonces la función $f \circ g.g'$ es una nueva función integrable y

$$\int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx = \int_a^b f(g(t)).g'(t)dt.$$

La regla formal seguida en el resultado anterior consiste en sustituir $g(t)$ por x y $g'(t)dt$ por dx y los valores extremos $t=a, t=b$ por los correspondientes $x=g(a), x=g(b)$.

Ejercicios:

1. Calcúlese la siguiente integral:
$$\int_0^1\ 2xe^{x^2}\ dx.$$
2. Demuéstrese que , para $a,b \in \mathbb{R}^+$,
$$\int_a^{ab}\ 1/t\ dt = \int_1^b\ 1/t\ dt.$$

Nota

Obsérvese que después de esta propiedad, la función $F : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$F(x) = \int_1^x 1/t\ dt.$$

es una biyección estrictamente creciente verificando que:

- $F(1) = 0$
- $F(xy) = F(x) + F(y)$
- $F(e) = 1$.

Esto es, la función F no es otra cosa que la función logaritmo neperiano cuya existencia afirmábamos al principio de curso.

La siguiente técnica es especialmente útil cuando se trata de calcular la integral de un producto de funciones o de una función fácilmente derivable (basta ver ésta como el producto de ella por la función constante uno).

Corolario 6.1.7. *(teorema de integración por partes)*
Sean $F, G : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^1([a, b])$. Entonces

$$\int_a^b F(x).G'(x)dx = F(b).G(b) - F(a)G(a) - \int_a^b F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_1^2 log(x)dx \ \text{ y } \ \int_0^1 x^2 sen(x)dx.$$

6.1.6. Integrales impropias

El concepto de integral que hemos introducido presenta, entre otras, dos limitaciones importantes:

1. El intervalo de integración es del tipo $[a, b]$
2. El integrando es una función acotada en dicho intervalo.

Nuestro objetivo más inmediato es extender la noción de integral a intervalos arbitrarios y a funciones continuas no necesariamente acotadas.

Sea $I =]\alpha, \beta[$ un intervalo con $\alpha, \beta \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua en I y sea G una primitiva de f. Se dice que f es **impropiamente integrable en** $]\alpha, \beta[$ si existen

$$lim_{x\to\beta} G(x), \quad lim_{x\to\alpha} G(x).$$

Además en caso afirmativo

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = lim_{x\to\beta} G(x) - lim_{x\to\alpha} G(x).$$

Dicha integral recibe el nombre de **integral impropia** de f en $]\alpha, \beta[$.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 1/\sqrt{x}dx.$$

Es claro que toda función continua en un intervalo $[a, b]$ es impropiamente integrable en $]a, b[$ y su integral impropia coincide con su integral.

Las propiedades de las funciones impropiamente integrables son similares a las ya estudiadas para las funciones integrables.

Proposición 6.1.8. *Sean $f, g :]\alpha, \beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones impropiamente integrables. Entonces*

1. *$f+g$ es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta (f+g)(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx + \int_\alpha^\beta g(x)dx.$$

2. *Para cada $r \in \mathbb{R}$, la función rf es una nueva función impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$ y se verifica que*

$$\int_\alpha^\beta rf(x)dx = r\int_\alpha^\beta f(x)dx.$$

3. *Si para cada $x \in [a,b]$, $f(x) \leq g(x)$, se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx \leq \int_\alpha^\beta g(x)dx$$

E incluso,

Proposición 6.1.9. *Sea $f\ :]\alpha,\beta[\longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y $c\ \in]\alpha,\beta[$. Entonces f es impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$ si, y sólo si, f es impropiamente integrable en $]\alpha,c[$ y $]c,\beta[$. En caso afirmativo se tiene que*

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlense, cuando existan, las siguientes integrales:

$$\int_0^1 1/xdx, \quad \int_{-1}^1 1/x^2dx, \quad \int_1^{+\infty} 1/\sqrt{x}dx \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} 1/x^2dx.$$

Como consecuencia de la definción, obtenemos los correspondientes teoremas del cambio de variable y de integración por partes.

Teorema 6.1.10. *(del cambio de variable)*

Sea g una función de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $]\alpha,\beta[$ con $g'(x) \neq 0$. Si f es una función continua en $g(]\alpha,\beta[)$, entonces f es impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$ si, y sólo si, $f\circ g.g'$ es impropiamente integrable en $]\alpha,\beta[$. En caso afirmativo,

$$\int_{lim_{x\to\alpha}g(x)}^{lim_{x\to\beta}g(x)} f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(g(x))g'(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 2x/(x^2+1)\ dx.$$

Teorema 6.1.11. *(de integración por partes)*

Sean F y G dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $]\alpha,\beta[$ y supongamos que $F.G$ tiene límite en α y en β. Entonces $F.G'$ es impropiamente integrable si, y sólo si $F'.G$ es impropiamente integrable. En caso afirmativo

$$\int_\alpha^\beta F(x).G'(x)dx = lim_{x\to\beta}F(x)G(x) - lim_{x\to\alpha}F(x)G(x) - \int_\alpha^\beta F'(x).G(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^1 log(x)dx.$$

A veces resulta que una determinada función no es impropiamente integrable pero puede obtenerse un cierto valor relacionado con ella.

6.1.7. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_0^1 arctg(x)\ dx, \qquad \int_0^1 x^2e^x\ dx,$$
$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(log(x))^2} \qquad \int_0^{\pi/4} sen^2x\ cos^3x\ dx,$$
$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} cosx\ \log(senx)\ dx, \qquad \int_0^{\pi/4} \frac{senx}{cos^2x}\ dx.$$

2. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \int_a^x sen^3(t)\ dt.$ b) $F(x) = \int_3^{x^2} \frac{1}{1+\sin^6 t + t^2}\ dt$

c) $F(x) = \int_3^{\int_1^x \frac{sen(s)}{s}ds} 1/(sen^2(t^2)+1)\ dt$

d) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+sen^2(t)}\ dt.$

e) $F(x) = \int_a^b \frac{t}{1+t^2+sen(t)}\ dt$ f) $F(x) = \int_a^b \frac{tx}{1+t^2+sen(t)}\ dt$

6.2. Métodos de integración

Sumario

En esta lección nos ocuparemos del problema práctico de evaluar la integral de toda función racional y de algunas funciones no racionales. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

6.2.1. Integración de funciones racionales

Daremos un método general para la evaluación de la integral de una función racional cuya "única"dificultad consiste en encontrar la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales.

Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función racional y sean $P, Q, : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ las correspondientes funciones polinómicas tales que, $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ con $Q(x) \neq 0$, para cada $x \in [a,b]$. Podemos suponer sin pérdida de generalidad (en caso contrario se manipula algebraicamente) que:

1) P y Q son dos polinomios primos entre sí.

2) El polinomio $Q(x)$ es de mayor grado que $P(x)$.

3) El coeficiente líder del polinomio $Q(x)$ es uno.

En la situación anterior, el problema de evaluar la integral de f se resuelve usando sendos resultados algebraicos: la descomposición en factores irreducibles de un polinomio con coeficientes reales y la descomposición en fracciones simples de una función racional con coeficientes reales.

Proposición 6.2.1.

1) <u>Descomposición en factores irreducibles</u>

   Todo polinomio $Q(x)$ con coeficientes reales y con coeficiente líder igual a uno puede escribirse en la forma:

   $(x-a_1)^{n_1}(x-a_2)^{n_2}...(x-a_p)^{n_p}(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}...(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}$,

   donde p y q son números enteros no negativos,$a_1, a_2, ..., a_p, b_1, b_2, ..., b_q, c_1, c_2, ..., c_q$ son números reales, donde $a_1 < a_2 < ... < a_p$ son las raíces reales del polinomio Q y para cada $k \in \{1, 2, ..., p\}$, n_p es el orden de multiplicidad de la raíz a_k; y finalmente $m_1, m_2, ..., m_q$ son números naturales.

   La descomposición anterior en factores es única y

   $$n_1 + n_2 + ... + n_p + 2(m_1 + m_2 + ... + m_q)$$

   es el grado del polinomio.

2) <u>Descomposición en fracciones simples</u>

   Si el polinomio $Q(x)$ se descompone en la forma dada en (1.) y $P(x)$ es un polinomio primo con $Q(x)$ de grado menor que el de $Q(x)$, la función racional $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ puede escribirse de forma única como sigue:

   $$f(x) = \frac{A^{11}}{x-a_1} + \frac{A^{12}}{(x-a_1)^2} + ... + \frac{A^{1n_1}}{(x-a_1)^{n_1}} +$$
   $$+\frac{A^{21}}{x-a_2} + \frac{A^{22}}{(x-a_2)^2} + ... + \frac{A^{2n_2}}{(x-a_2)^{n_2}} + ...+$$
   $$\frac{A^{p1}}{x-a_p} + \frac{A^{p2}}{(x-a_p)^2} + ... + \frac{A^{pn_1}}{(x-a_p)^{n_p}} + ...+$$
   $$\frac{B^{11}x + C^{11}}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B^{12}x + C^{12}}{(x^2+b_1x+c_1)^2} + \frac{B^{1m_1}x + C^{1m_1}}{(x^2+b_1x+c_1)^{m_1}} +$$
   $$\frac{B^{21}x + C^{21}}{x^2+b_2x+c_2} + \frac{B^{22}x + C^{22}}{(x^2+b_2x+c_2)^2} + \frac{B^{2m_2}x + C^{2m_2}}{(x^2+b_2x+c_2)^{m_2}} + ...+$$
   $$\frac{B^{q1}x + C^{q1}}{x^2+b_qx+c_q} + \frac{B^{q2}x + C^{q2}}{[(x^2+b_qx+c_q)^2} + \frac{B^{qm_q}x + C^{qm_q}}{[(x^2+b_qx+c_q)^{m_q}},$$

   donde A_{ij} $(1 \leq i \leq p, (1 \leq j \leq n_p)$ y $(B^{ij}$, C_{ij} $(1 \leq i \leq q$ y $1 \leq j \leq m_q$ y $a_1, a_2, ..., a_p, B_1, B_2, ..., B_q, c_1, c_2, ..., c_q$ C^{ij} son números reales. Se tiene además que $A^{kn_k} \neq 0$ para $k \in \{1, 2, ..., p\}$ y $(B^{jm_j})^2 + (C^{jm_j})^2 > 0$ para $j \in \{1, 2, ..., q\}$.

La principal dificultad a la hora de aplicar la proposición anterior consiste, como ya se ha dicho, en encontrar la descomposición en factores del polinomio $Q(x)$. Salvado este problema, la descomposición en fracciones simples dada por la segunda parte de la proposición puede ya obtenerse sin dificultad, aunque sí puede ser laboriosa.

La descomposición en fracciones simples dada anteriormente, junto con la linealidad de la integral nos permite limitarnos a considerar las integrales de cada uno de los tipos de fracciones simples que aparecen en la descomposición, a saber

Tipo 1

$$f(x) = \frac{A}{x-c},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = A.log(\frac{b-c}{a-c}).$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}dx.$$

Tipo 2

$$f(x) = \frac{A}{(x-c)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, y donde $A, c \in \mathbb{R}$ y c no pertenece al intervalo $[a,b]$. En tal caso tenemos que:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{A}{n-1}[\frac{1}{(a-c)^{n-1}} - \frac{1}{(b-c)^{n-1}}].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{2x}{x^2-2x+1}dx.$$

Tipo 3

$$f(x) = \frac{Bx+C}{x^2+cx+d},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $B, C, c, d \in \mathbb{R}$. En este caso se procede de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{B}{2}\int_a^b \frac{2x+c}{x^2+cx+d}dx + (C - cB/2)\int_a^b \frac{dx}{x^2+cx+d}.$$

La primera integral se puede resolver haciendo el cambio de variable $u = x^2+cx+d$, con lo que nos queda

$$\int_{a^2+ac+d}^{b^2+bc+d} \frac{du}{u} = log\frac{b^2+bc+d}{a^2+ac+d}.$$

La segunda integral se puede resolver escribiendo $x^2+cx+d = (x-r)^2+b^2$ para hacer el cambio de variable $u = \frac{x-r}{s}$, con lo que nos queda

$$\frac{1}{s}\int_{\frac{a-r}{s}}^{\frac{b-r}{s}} \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{s}[arc\ tg(\frac{b-r}{s}) - arc\ tg(\frac{a-r}{s})].$$

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{2x-1}{x^4+x^3-x-1}dx.$$

Tipo 4 Esto es,

$$f(x) = \frac{r(x)}{(x^2+cx+d)^n},$$

para todo $x \in [a,b]$, donde $c,d \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ con $n > 1$ y $r(x)$ es un polinomio de grado menor o igual que $2n-1$.

En este caso usaremos el **método de Hermite** que consiste en escribir

$$f(x) = \frac{ex+f}{x^2+cx+d} + [\frac{F(x)}{(x^2+cx+d)^{n-1}}]',$$

donde $F(x)$ es un polinomio de grado 2n-3 a determinar. Por tanto, la técnica exige derivar el cociente, multiplicar la igualdad por $(x^2+cx+d)^n$, y a partir de aquí, calcular los coeficientes de dicho polinomio.

Así pues

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \frac{ex+f}{x^2+cx+d}dx + \frac{F(b)}{(b^2+cb+d)^{n-1}} - \frac{F(a)}{(a^2+ca+d)^{n-1}}.$$

La integral que queda es una de tipo 3).

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1-x^2}{x^4+4x^2+4}dx.$$

6.2.2. Integración de funciones no racionales

El problema de evaluar funciones no racionales se llevará a cabo utilizando diversos cambios de variable hasta conseguir que la nueva función a integrar sea racional. No hay un método general para ello, sino un recetario más o menos amplio, de hecho, la simple inspección del integrando sugiere el cambio de variable adecuado.

Empezaremos fijando una notación que nos permitirá exponer de manera rápida y sin ambigüedad los distintos métodos de integración que vamos a tratar. En lo que sigue I será un intervalo del tipo $[a,b]$ y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ será una función continua. Para calcular la integral de f usaremos sistemáticamente el cambio de variable $x = g(t)$, donde g es una función biyectiva de un cierto intervalo J sobre I y de clase $\mathcal{C}^1$ en J. Si notamos por $h(t) = f \circ g(t).g'(t)$, para todo $t \in J$, transformaremos la integral de la función inicial en la integral de la función h en el intervalo J. Si h es racional, aplicaremos los conocimientos dados en la primera parte de la lección. En las demás ocasiones será preciso un nuevo cambio de variable. Encontraremos así un nuevo intervalo K y una nueva función φ tal que $t = \varphi(u)$, donde φ es una función biyectiva de K sobre J y de clase $\mathcal{C}^1$ en K. Si notamos por $k(u) = h \circ \varphi(u).\varphi'(u)$, para todo $u \in k$, transformaremos la integral de la función h en la integral de la función k en el intervalo K, y vuelta a empezar.

1. Funciones trigonométricas

   Sea f una función que es cociente de sumas y productos de las funciones seno y coseno. Dado que f es una función periódica de periodo 2π podremos limitarnos a considerar $I \subseteq [-\pi, \pi]$. Hacemos en este caso el cambio de variable

   $$x = g(t) = 2arctg(t).$$

   La función g que aparece es una función racional. De hecho,

   $$cosx = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \text{ y } sen(x) = \frac{2t}{1+t^2}.$$

   Ejercicio: Calcúlese $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{sen(x)}$

   Podemos destacar algunos casos particulares en

   $$\int_a^b \frac{sen^n(x)}{cos^m(x)} dx \qquad a, b \in I$$

   a) Si n es impar, se hace el cambio $x = arccos(t)$, siempre que $I \subseteq [0, \pi]$.
   b) Si m es impar, se hace el cambio $x = arcsen(t)$, siempre que $I \subseteq [-\pi/2, \pi/2]$.
   c) Si n y m son pares se usan las fórmulas

   $$cos^2(x) = \frac{1+cos(2x)}{2}, \quad sen^2(x) = \frac{1-cos(2x)}{2}.$$

2. Funciones trascendentes

   Sea f una función f que es cociente de sumas y productos de la función e^x con ella misma. Hacemos en este caso el cambio de variable $x = g(t) = log(t)$. La función h que aparece es de nuevo una función racional.

   Ejercicio: Calcular $\int_1^2 \frac{dx}{shx}$

3. Irracionales en x

Sea f una función que es cociente de sumas y productos de potencias racionales de x. Si $f(x) = F(x^{\frac{p_1}{q_1}}, x^{\frac{p_2}{q_2}}, ..., x^{\frac{p_n}{q_n}})$, entonces hacemos el cambio de variable $x = t^m$, donde $m = m.c.m.\{q_1, q_2, ..., q_n\}$. Así pues, la función a integrar que resulta después del cambio es una función de tipo racional, que ya sabemos resolver.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_1^2 \frac{1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}} dx.$$

4. Irracionales cuadráticas

Vamos a distinguir tres tipos fundamentalmente:

1) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{x^2 - 1}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [1, +\infty[$ ó $I \subseteq]-\infty, 1]$, hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = \frac{1}{cost}$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = ch(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} dx.$$

2) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1 - x^2}$

En este caso, siempre que $I \subseteq [-1, 1]$ hacemos el cambio de variable $x = g(t) = sen(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

3) Funciones que son cociente de sumas y productos de las funciones x y $\sqrt{1 + x^2}$

En este caso hacemos el cambio de variable ó bien $x = g(t) = tg(t)$ y por tanto la función h que aparece es del tipo trigonométrico visto anteriormente, ó bien $x = g(t) = sh(t)$ y la función h que aparece es una función de tipo trascendente visto también anteriormente.

Ejercicio: Calcúlese la siguiente integral:

$$\int_3^4 \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} dx.$$

Nota

Las funciones $f(x)$ que son cociente de sumas y productos de x y de $\sqrt{ax^2+bx+c}$ se pueden reducir a uno de los tres casos anteriores ya que

$$ax^2+bx+c = a(x+b/2a)^2 - b^2/4a + c,$$

y por tanto, si hacemos un primer cambio $u = x + b/2a$ y posteriormente

a) si $a > 0$ y $b^2 - 4ac > 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{b^2-4ac}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2-1}$

b) Si $a > 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$, resulta una integral del tipo $\sqrt{t^2+1}$.

c) Si $a < 0$ y $b^2 - 4ac < 0$, hacemos un nuevo cambio, $t = \frac{\sqrt{-a}u}{\sqrt{c-b^2/4a}}$ resulta una integral del tipo $\sqrt{1-t^2}$

6.2.3. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\int_2^3 \frac{1+2x-x^2}{x^4-4x^3+7x^2-6x+2}dx$.

   b) $\int_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{senx-tgx}$.

   c) $\int_0^{3\pi/2} \frac{dx}{2+cosx}$.

   d) $\int_0^1 \frac{dx}{coshx}$.

   e) $\int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$

   f) $\int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$.

   g) $\int_1^2 \frac{dx}{(4+x^2)^{3/2}}$.

2. Pruébense las siguientes igualdades:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\ dx}{\sqrt{1-senx}} = 2, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\ dx}{\sqrt{x}} = 2,$$
$$\int_0^1 log(x)\ dx = -1$$

6.3. Aplicaciones del cálculo integral

Sumario

En esta lección presentaremos varias aplicaciones del cálculo integral. La idea que subyace en todas las aplicaciones que vamos a ver en esta lección es que la integral puede verse como un procedimiento de "paso al límite"de la suma. Así mismo, conviene señalar que en esta lección nos basta con la idea intuitiva del concepto de área y que más adelante definiremos con todo rigor. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

6.3.1. La integral como " paso al límite "

La idea central en todo lo que sigue es que si f es una función integrable en un intervalo dado, la integral de dicha función puede obtenerse como el límite de una cierta sucesión. Escribamos esta idea de forma más concreta:

Sean$[a,b]$ un intervalo , $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ una partición de dicho intervalo e $I_k = [t_{k-1}, t_k]$, con $k \in \{1, 2, ..., n\}$ la familia de todos los subintervalos que genera dicha partición en el intervalo $[a,b]$. Se llama **diámetro de la partición** P, $\Delta(P)$, al máximo de las longitudes de los subintervalos, esto es

$$\Delta(P) = Max\{l(I_k) = t_k - t_{k-1};\ k = 1, 2, ..., n\}.$$

Se puede probar que si f es una función acotada en $[a,b]$ y $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ cuya sucesión de diámetros, $\{\Delta(P_n)\}$, tiende a cero, entonces:

1. La sucesión de las sumas superiores $S(f, P_n)$ converge a $\overline{\int_a^b} f(x)dx$ esto es, a

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = Inf\{S(f,P):\ P \text{ partición de } [a,b]\}.$$

2. La sucesión de las sumas inferiores $I(f, P_n)$ converge a $\underline{\int_a^b} f(x)dx.$, esto es, a

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = Sup\{I(f,P):\ P \text{ partición de } [a,b]\}.$$

Y por tanto, si f es integrable en el intervalo $[a,b]$, entonces la sucesión $S(f,P_n)$ y la sucesión $I(f,P_n)$ convergen a la integral de f.

En particular, si $\{P_n\}$ es la sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$ tal que, para cada n, todos los subintervalos que generan I_k^n, son de longitud $(b-a)/n$, entonces

$$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} f(y_k^n)(b-a)/n\} = \int_a^b f(x)dx,$$

siempre que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $y_k^n \in I_k^n$.

Esta idea es el hilo conductor de toda la lección. En un primer momento la usamos para resolver problemas de distinta naturaleza.

1. Problema matemático

   A modo de ejemplo podemos probar que $lim_n\{\frac{1+2+...+n}{n^2}\} = 1/2$, ya que

   $$lim_n\{\sum_{k=1}^{n} k/n^2\} = lim_n\{\sum_{k=1}^{n}(k/n)1/n\} = \int_0^1 xdx,$$

   donde la función f considerada es la restricción de la función identidad al intervalo $[0,1]$.

2. Problema de tipo económico.

   Supongamos que un negocio obtiene en sus primeros días los siguientes beneficios

días	1	2	3	4
Euros	8	17	32	53

   El propietario tiene razones suficientes para creer que el negocio continuará creciendo siguiendo la pauta de los primeros días, a saber el beneficio de cada día t, seguirá la ley $B(t) = 3t^2 + 5$. Para hacer el cálculo del beneficio anual, siguiendo indicaciones de un economista, considera además que la ley del beneficio es la función continua descrita anteriormente. ¿Cuál será este beneficio anual?

   La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0,365]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada particíón, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $B(t)$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como beneficio anual

   $$B = \int_0^{365} 3t^2 + 5dt.$$

3. Problema de tipo físico

   Supóngase que queremos calcular la fuerza de atracción de un varilla metálica de masa M y de longitud l y una masa puntual m situada en la dirección de la varilla y cuya distancia al extremo más lejano es L.

La estrategia a seguir será considerar una sucesión de particiones del intervalo $[0, l]$ cuya sucesión de diámetros tiende a cero. De hecho podemos considerar que, para cada partiíón, todos los subintervalos son de igual longitud $\Delta(P_n)$. A continuación se construyen las sumas integrales asociadas a la función $f(t) = G\frac{Mm}{l(L-t)^2}$ considerando como valor de cada subíntervalo su extremo derecho. El paso al límite nos dará como fuerza de atracción F.

$$F = \int_0^l f(t)dt.$$

6.3.2. Cálculo del área de un recinto plano

La segunda de las aplicación ya fue presentada al inicio de la lección I.9.

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ una función continua y sea

$$R(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

Siguiendo el método de exhaución y el apartado anterior, se tiene que el "área"del conjunto $R(f)$, $A(R(f))$, viene dada por la siguiente fórmula.

$$A(R(f)) = \int_a^b f(x)dx.$$

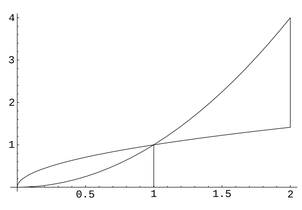
De manera más general, dadas $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones integrables, verificando que, para cada $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ podemos considerar el recinto

$$R(f, g) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2;\ a \leq x \leq b,\ f(x) \leq y \leq g(x)\}.$$

Es ahora fácil probar que el área de dicho recinto $A(R(f, g)))$, verifica

$$A(R(f, g)) = |\int_a^b (f(x) - g(x))dx|.$$

Considérense por ejemplo las funciones $f, g : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = x^2$ y $g(x) = \sqrt{x}$, y el recinto $R(f, g)$, comprendido entre las correspondientes gráficas



Es claro que área de dicho recinto $A(R(f, g)))$, verifica

$$A(R(f, g)) = |\int_0^1 (x^2 - \sqrt{x})dx| + |\int_1^2 (x^2 - \sqrt{x})dx| = 3 - 4/3\sqrt{2}.$$

Ejercicio: Calcular el área de una elipse.

6.3.3. Cálculo de la longitud de una curva

Una **curva en el plano** no es mas que una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado y con valores en $\mathbb{R}^2$.

Sea $\gamma : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una curva en el plano. Tal como hicimos en la lección I.3 con la semicircunferencia unidad, podemos definir, supuesto que exista dicho supremo, la longitud de la curva γ por

$$l(\gamma) = Sup\{l(\gamma_P);\ P \text{ partición de } [a,b]\},$$

donde para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, consideramos la poligonal γ_P de vértices $(\gamma(t_0), \gamma(t_1)), ..., \gamma(t_n))$. De hecho, se sabe que,

$$l(\gamma_P) = dist(\gamma(t_0), \gamma(t_1)) + ... + dist(\gamma(t_{n-1}), \gamma(t_n)).$$

Es fácil probar que si $\{P_n\}$ es una sucesión de particiones del intervalo $[a,b]$, cuyos diámetros "tienden" a cero, entonces la sucesión $\{l(\gamma_{P_n})\}$ tiende a $l(\gamma)$. Usando esta propiedad y el hecho general ya comentado de que la integral es el límite de una conveniente suma, obtenemos que,

Si existen dos funciones de clase $\mathcal{C}^1$ en el intervalo $[a,b]$ tales que $\gamma(t) = (f(t), g(t))$, entonces

$$l(\gamma) = \int_a^b \sqrt{[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2}dx.$$

En orden a justificar la fórmula anterior conviene subrayar que para cada partición $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ y $k \in \{1, 2, ..., n\}$,

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = dist[(f(t_{k-1}), g(t_{k-1})), (f(t_k)), g(t_k))] =$$
$$= \sqrt{[f(t_{k-1}) - f(t_k)]^2 + [g(t_{k-1}) - g(t_k)]^2},$$

pero, por el teorema del valor medio, sabemos que existen sendos x_k e y_k tales que

$$f(t_{k-1}) - f(t_k) = f'(x_k)(t_k - t_{k-1}),$$

y

$$g(t_{k-1}) - g(t_k) = g'(y_k)(t_k - t_{k-1}),$$

luego

$$dist(\gamma(t_{k-1}), \gamma(t_k)) = (t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

y por tanto

$$l(\gamma_P) = \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1})\sqrt{(f'(x_k))^2 + (g'(y_k))^2},$$

por lo que finalmente basta aplicar que la integral no es más que un paso al límite.

En particular si $f \in \mathcal{C}^1([a,b])$ la longitud de su gráfica,

$$l(Graf(f)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}dx.$$

Ejercicio: Calcular la longitud de una circunferencia de radio r.

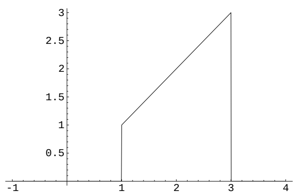
6.3.4. Cálculo del volumen y del área de un sólido de revolución

Sólidos de revolución

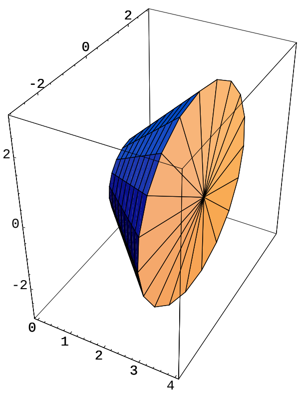
Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua cuya gráfica se encuentra en el semiplano superior. Supongamos que el recinto $R(f)$, definido como en el segundo apartado, gira alrededor del eje x. El conjunto así generado es llamado el **sólido de revolución generado por f al girar sobre el eje x**, el cual es el subconjunto de $\mathbb{R}^3$, definido por

$$S_x(f) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ a \leq x \leq b,\ y^2 + z^2 \leq f(x)^2\}.$$

Considérese por ejemplo la función identidad restringida al intervalo $[1, 3]$. En la siguiente figura vemos el correspondiente $R(f)$



y por tanto el correspondiente sólido de revolución es el siguiente tronco de cono



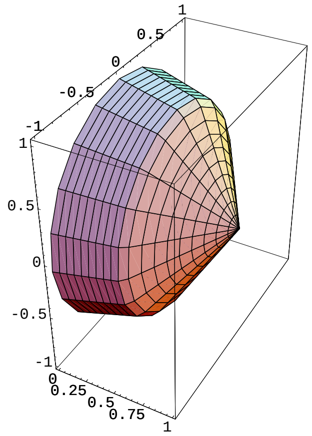
Área lateral

Se puede probar que el "área lateral"de $S_x(f)$, $A(S_x(f))$ se obtiene mediante la fórmula:

$$A(S_x(f)) = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx.$$

Para justificar la fórmula anterior basta considerar para cada partición del intervalo $[a, b]$ y cada subintervalo que ésta genera el tronco de cono correspondiente.

Por ejemplo considérese la semiesfera de radio uno, y los dos troncos de cono asociados a la partición $P = \{0, 1/2, 1\}$



Obsérvese que la suma de las áreas laterales de estos dos troncos de cono es menor que el área lateral de la semiesfera y que, a medida que tomemos particiones con más puntos, la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono sigue siendo menor que el área lateral de la semiesfera pero cada vez más ajustada a ésta.

En tal caso, el área lateral se obtiene como paso al límite de la suma de las áreas laterales de los correspondientes troncos de cono, sin más que usar el hecho de que el área lateral de un tronco de cono es $\pi(R+r)s$, donde R es el radio mayor, r el radio menor y s es la "generatriz truncada".

Ejercicio: Calcular el área de una esfera.

Volumen

Podemos ahora considerar el volumen del sólido generado por giro alrededor del eje x. Es fácil ver que el "volumen"de $S(f)$, $V(S_x(f))$ se puede obtener mediante la fórmula

$$V(S_x(f)) = \int_a^b \pi f(x)^2 dx.$$

Esta fórmula se obtiene considerando el volumen del sólido de revolución como el "paso al límite "de la suma de volúmenes de cilindros apropiados.

Si f es una función no negativa continua con $0 \notin [a,b]$, y hacemos girar el recinto $R(f)$ alrededor del eje y, obtenemos un nuevo sólido de revolución

$$S_y(f) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ a^2 \leq x^2+z^2 \leq b^2,\ 0 \leq y \leq f(\sqrt{x^2+y^2}\}.$$

En este caso, su volumen, $V(S_y(f))$, puede ser calculado como sigue:

$$V(S_y(f)) = 2\pi \int_a^b xf(x)dx.$$

Ejercicio: Calcúlese el volumen de un elipsoide de semiejes a, b, c y de un toro generado al girar, alrededor del eje y, el disco de centro (2,0) y radio 1.

6.3.5. Relación de ejercicios

1.- Calcular las siguientes áreas:

a) Area limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$

b) Area limitada por $y = xe^{-x^2}$, el eje x, la recta $x = 0$ y la la recta $x = a$, donde a es la abscisa del punto donde la función $f(x) = xe^{-x^2}$ alcanza el máximo.

c) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ y el eje x.

d) Area comprendida entre la curva $y = \operatorname{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

e) Area del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}$

f) Area de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje x.

g) Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = shx$, en el primer cuadrante.

2.- Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ en $[2, 4]$

3.- Hallar la longitud de la curva $y = \log(1 - x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

4.- Hállese la longitud de la catenaria, esto es, la gráfica de la función f definida por

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a})$$

5.- Al girar alrededor del eje x, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie equivale a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a.

6.- Calcúlese el volumen del sólido de revolución generado por la curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, $x \in [0, \pi]$, cuando ésta gira en torno al eje x.

7.- Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$.

8.- Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

a) alrededor del eje x.

b) alrededor del eje y.

9.- Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.

Capítulo 7

Cálculo integral en varias variables

7.1. Integral de Lebesgue

Sumario

El objetivo de esta lección es presentar, a vista de pájaro, la integral de Lebesgue. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

7.1.1. ¿Por qué una nueva integral?

Hacia finales del siglo XIX resultó claro para muchos matemáticos que la integral de Riemann tiene importantes limitaciones, es sabido por ejemplo su mal comportamiento con ciertos procesos de convergencia. Ésta y otras limitaciones que ahora veremos, obligaron a realizar nuevos intentos de construcción de otras integrales. Entre estos intentos destacan los debidos a Jordan, Borel, Young y finalmente el de Lebesgue, que resultó ser el más exitoso.

En lo que respecta nosotros, nos interesa destacar las siguientes limitaciones:

1. El conjunto de funciones integrables es relativamente pequeño: Hay funciones sencillas que no son integrables. Recuérdese por ejemplo que la función de Dirichlet, esto es, la función, $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} 0 & si\ x\ es\ racional \\ 1 & si\ x\ es\ irracional \end{cases}$$

no es integrable.

2. Su extensión a varias variables tiene algunas dificultades.

Ambos problemas están íntimamente relacionados con el hecho de ampliar el concepto de medida a otros conjuntos de números reales no necesariamente intervalos y por extensión a otros subconjuntos de $\mathbb{R}^n$. Las cuestiones pues a resolver son varias: ¿qué conjuntos se pueden medir?, ¿cómo medirlos? , ¿qué funciones se pueden integrar? y ¿cómo hallar su integral?

7.1.2. Conjuntos medibles

1.- Conjuntos que se pueden medir.

Veamos primero algunos conjuntos que deben estar forzosamente entre la familia de los conjuntos "medibles".

Dado I un subconjunto de $\mathbb{R}^n$ diremos que es un **intervalo** (respectivamante **intervalo acotado**), si existen $I_1, I_2, ..., I_n$ intervalos (respectivamante intervalos acotados) de números reales tales que

$$I = I_1 \times I_2 \times ... \times I_n.$$

Veamos cómo añadir a partir de aquí nuevos conjuntos.

Se dice que una familia $\mathcal{A}$ de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$ es una **σ-álgebra** si

i) $\mathbb{R}^n \in \mathcal{A}$,

ii) Si $\{A_n\}$ es una sucesión en $\mathcal{A}$, entonces $\cup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$, y

iii) Si $A \in \mathcal{A}$ entonces $\mathbb{R}^n \setminus A \in \mathcal{A}$.

Por otra parte, si $\mathcal{S}$ es una familia de subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, entonces existe una menor σ-álgebra en $\mathbb{R}^n$ conteniendo a $\mathcal{S}$, que denominaremos la **σ-álgebra engendrada** por $\mathcal{S}$.

En una primera etapa vamos a considerar la σ-álgebra engendrada por la familia de los conjuntos de los intervalos acotados, familia que llamaremos **σ-álgebra de Borel**, **B**, mientras que a sus elementos los llamaremos **borelianos**. Para hacernos idea de lo grande que es esta familia tengamos en cuenta que los todos los conjuntos abiertos son borelianos.

Nota

Obsérvese que los conjuntos que resultan de la intersección numerable de abiertos (conjuntos tipo G_δ), no necesariamente abiertos, y los conjuntos que resultan de la unión numerable de cerrados, conjuntos tipo F_δ, no necesariamente cerrados, son también conjuntos borelianos.

2.- Veamos ahora Cómo medir dichos conjuntos.

Una vez elegida la familia de conjuntos medibles el problema es asignarle una medida.

Es claro que si I es un intervalo acotado, entonces su medida debe coincidir con su volumen, esto es, $medida(I) = V(I)$, y claro está

$$V(I) = l(I_1)l(I_2)...l(I_n),$$

donde $l(I_k) = b_k - a_k$, siempre que $I_k = [a_k, b_k]$.

A partir de aquí, podemos definir, para cada $A \in$ B, la medida λ, mediante

$$\lambda(A) := Inf\{\sum_{n=1}^{\infty} v(I_n); A \subseteq \cup_{n\in\mathbb{N}} I_n, I_n \text{ intervalo acotado, } \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

A dicha medida λ se le llama **medida de Borel-Lebesgue**.

Sabemos que existen conjuntos A borelianos de medida cero, $\lambda(A) = 0$, que contienen subconjuntos no medibles. Parece pues conveniente añadir a la σ-álgebra de Borel estos subconjuntos.

Consideremos pues $\underline{\mathcal{M}}$ la mínima σ-álgebra que contiene simultáneamente a la σ-álgebra de Borel y a todos los subconjuntos de los elementos de ésta que son de medida nula. Sus elementos se denominan **conjuntos medibles-Lebesgue** o simplemente **medibles**.

Los conjuntos medibles se pueden representar por $E = A \cup N$, donde A es un boreliano y N es un subconjunto de un boreliano de medida nula.

Podemos ahora definir una nueva medida, que notaremos igualmente por λ y que llamaremos **medida de Lebesgue** y que viene dada por

$$\lambda(E) = \lambda(A),$$

siempre que $E = A \cup N$, y donde $\lambda(N) = 0$.

Dicha medida posee la propiedad de la aditividad numerable, i.e., para cualquier familia de conjuntos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ de la σ-álgebra $\mathcal{M}$, disjuntos dos a dos, se verifica

$$\lambda(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n).$$

Como consecuencia de la definición se pueden obtener las siguientes propiedades:

1. Si $A, B \in \mathcal{M}$ y $A \subset B$ entonces $\lambda(A) \leq \lambda(B)$.
2. $\lambda(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \lambda(A_n)$ $\forall A_n \in \mathcal{A}$.
3. λ extiende el volumen de un intervalo, esto es, si $I = \prod_{k=1}^{n} I_k$ es un intervalo acotado en $\mathbb{R}^n$, entonces $\lambda(I) = v(I) = \prod_{k=1}^{n} l(I_k))$.

Se dice que una propiedad P relativa a un punto $x \in \mathbb{R}^n$ se verifica **casi por doquier (c.p.d.)**, si el conjunto de puntos C donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida cero, esto es, $\lambda(C) = 0$.

7.1.3. Funciones medibles. Integral de Lebesgue

3.- Tipos de funciones que se pueden integrar

Una función $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se llama **medible** si $f^{-1}(I) \in \mathcal{M}$ para todo intervalo abierto I.

Como ejemplos de funciones medibles, se pueden mencionar:

- las funciones continuas c.p.d.,
- funciones iguales c.p.d. a una función continua,
- las funciones características de los conjunto medibles.

Recuérdese que si A es un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, se llama función **característica de** A, χ_A, a la función $\chi_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in A \\ 0 & si\ x \notin A \end{cases}$$

4.- Cómo hallar su integral

Comencemos ahora con las funciones más sencillas y veamos cómo asignarle una integral

Una función medible $s : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ se dice **simple** si sólo toma un número finito de valores.

Toda función simple s puede representarse por

$$s = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \chi_{A_i},$$

donde $s(\mathbb{R}^n) = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$, $A_i := \{x \in \mathbb{R}^n : s(x) = \alpha_i\}$ y χ_{A_i} es la función característica de A_i.

Si $\alpha_i \geq 0 \;\; \forall i$, se define la **integral** de s por :

$$\int_{\mathbb{R}^n} s d\lambda = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \lambda(A_i).$$

El teorema de aproximación de Lebesgue nos asegura que toda función f medible **positiva** ($f \geq 0$) es límite de una sucesión creciente $0 \leq s_1 \leq s_2 \leq ... \leq f$ de funciones simples que converge puntualmente a f ($\lim s_n(x) = f(x) \; \forall x \in \mathbb{R}^n$).

A partir de aquí definimos la **integral** de la función f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\lambda := \lim_k \int_{\mathbb{R}^n} s_k \; d\lambda$$

Se puede comprobar que dicha definición no depende de la sucesión $\{s_k\}$ elegida.

7.1.4. Funciones integrables

Dada una función medible $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, se dice que f es **integrable** si

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f| \; d\lambda < \infty.$$

En tal caso se define la **integral de** f por

$$\int_{\mathbb{R}^n} f \; d\lambda = \int_{\mathbb{R}^n} f^+ \; d\lambda - \int_{\mathbb{R}^n} f^- \; d\lambda,$$

donde $f^+ = Max\{f, 0\}$ y $f^- = Max\{-f, 0\}$ (nótese que ambas funciones son medibles positivas).

Notaremos por L al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en $\mathbb{R}^n$, esto es

$$L = \{f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R} \;\text{ medible}; \int_{\mathbb{R}^n} |f| \; d\lambda < \infty\}.$$

Podemos ahora considerar la integrabilidad en conjuntos medibles.

Dado $E \in \mathcal{M}$ y una función medible $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, $(E \subseteq D \subseteq \mathbb{R}^n)$, podemos considerar la función $f\chi_E$ como la extensión de f a todo $\mathbb{R}^n$, que se anula fuera de E.

Se dice que f es **integrable en** E, si $f\chi_E \in L$, y en tal caso se define la **integral de** f **en** E por

$$\int_E f \, d\lambda := \int_{\mathbb{R}^n} f\chi_E \, d\lambda.$$

Dicha integral recibe el nombre **integral de Lebesgue de** f **en** E.

Dado $E \in \mathcal{M}$, notaremos por $L(E)$ al espacio formado por las funciones medibles que son integrables en E.

7.1.5. Propiedades

Comentemos algunas de sus propiedades más interesantes:

1) *$L(E)$ es un espacio vectorial y*

$$\int_E (rf + g) \, d\lambda = r \int_E f \, d\lambda + \int_E g \, d\lambda, \quad (r \in \mathbb{R}, f, g \in L(E)).$$

2)

$$|\int_E f \, d\lambda| \leq \int_E |f| \, d\lambda, \quad (f \in L(E))$$

3) *Si f y g son medibles e iguales c.p.d., entonces f es integrable en E si, y sólo si, lo es g*, y en tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_E g \, d\lambda.$$

4) Sean E, A y B tres conjuntos medibles tales que $E = A \cup B$ y $\lambda(A \cap B) = 0$. Entonces f es integrable en E si, y sólo si, f es integrable en A y B. Además, en caso afirmativo

$$\int_E f \, d\lambda = \int_A f \, d\lambda + \int_B f \, d\lambda.$$

5) $\lambda(E) = \int_E 1 \, d\lambda$.

6)

Teorema 7.1.1. *(del cambio de variable)*

Sean U y V dos conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^n$, y $\phi : U \longrightarrow V$ una función biyectiva de clase $\mathcal{C}^1(U)$ cuyo jacobiano es no nulo en todo punto de U. Sea E un subconjunto medible contenido en U y sea $f : \phi(E) \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Entonces

$$\int_{\phi(E)} f d\lambda = \int_E f \circ \phi |J_\phi| d\lambda.$$

Veamos finalmente la relación de ésta nueva integral con la integral de Riemann.

- **Las funciones integrables de siempre son también integrables en el sentido de Lebesgue**

  Sea $n = 1$ y sea $E = [\alpha, \beta]$, con $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$. Si f es integrable en el sentido de Riemann en E entonces $f \in L(E)$ y en tal caso

$$\int_E f \, d\lambda = \int_\alpha^\beta f(x) \, dx.$$

- **Añadimos nuevas funciones**

  La función de Dirichlet es integrable en el sentido de Lebesgue; de hecho, dado que $\mathbb{Q}$ es de medida nula, se tiene que

$$\int_{[0,1]} f \, d\lambda = 1.$$

- **También las funciones absolutamente integrables quedan bajo control**

  En el caso en que admitamos que α puede ser $-\infty$ y β a su vez $+\infty$, y que f sea una función continua en $I =]\alpha, \beta[$, $|f|$ es ïmpropiamenteïntegrable en el sentido de Riemann en I si, y sólo si, $f \in L(I)$, y en tal caso

$$\int_I |f| \, d\lambda = \int_\alpha^\beta |f(x)| \, dx.$$

- **Seguimos teniendo las propiedades más interesantes de la integral de Riemann**

  a)

  Teorema 7.1.2. *(***Regla de Barrow***) Si $f \in L(I)$ y admite primitiva G, entonces existen los límites de G en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I f \, d\lambda = \lim_{x \to \beta} G(x) - \lim_{x \to \alpha} G(x).$$

  En consecuencia,

  b)

  Teorema 7.1.3. *(***de integración por partes***) Sean $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ dos funciones derivables tales que $f'g$ y $fg' \in L(I)$. Entonces existen los límites de fg en α y en β, y además se tiene*

$$\int_I fg' \, d\lambda = \lim_{x \to \beta} f(x)g(x) - \lim_{x \to \alpha} f(x)g(x) - \int_I fg' \, d\lambda.$$

  c)

Teorema 7.1.4. *(***del cambio de variable***) Si $\varphi : I \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función derivable, con $\varphi'(t) \neq 0$ y $f : \varphi(I) \to \mathbb{R}$ es una función medible, entonces $f \in L(\varphi(I))$ si, y sólo si, $f \circ \varphi.\varphi' \in L(I)$ y*

$$\int_{\varphi(I)} f \ d\lambda = \int_I f \circ \varphi.\varphi' \ d\lambda.$$

7.2. Técnicas de integración en varias variables

Sumario

En esta lección vamos a introducir la integración en varias variables. Entre otros problemas nos encontramos con el hecho de que no se dispone de ningún procedimiento elemental comparable a la Regla de Barrow. Esta contrariedad se resolverá con una técnica fundamental: Teorema de Fubini, que relaciona la integral en $\mathbb{R}^n$ con integraciones sucesivas en espacios de menor dimensión. Siguiendo este proceso acabaremos finalmente integrando en una de las variables. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

7.2.1. Teorema de Fubini

Como era de esperar, la definición de integral no es útil para el cálculo de dicha integral. Recuérdese que este problema, en el caso de intervalos de números reales, se resolvió en $\mathbb{R}$ usando la regla de Barrow, pero esta herramienta no está disponible ni en $\mathbb{R}^2$ ni en $\mathbb{R}^3$. Nuestro siguiente resultado trata de resolver esta dificultad, relacionando la integral múltiple con sucesivas integrales en $\mathbb{R}$. Para ello, consideremos las siguientes observaciones:

Sea $E \subseteq \mathbb{R}^{p+q}$, notaremos, para cada $x \in \mathbb{R}^p$, por

$$E(x) = \{y \in \mathbb{R}^q : \ (x, y) \in E\}.$$

Análogamente, notaremos, para cada $y \in \mathbb{R}^q$, por

$$E(y) = \{x \in \mathbb{R}^p : \ (x, y) \in E\}.$$

Es fácil probar que si E es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^{p+q}$, entonces $E(x)$ y $E(y)$ son subconjuntos medibles respectivamente de $\mathbb{R}^p$ y $\mathbb{R}^q$.

Teorema 7.2.1. *(Teorema de Fubini.Caso $p = 1, q = 1$)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y sea $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ una función integrable, entonces

$$\int_E f(x, y)d(x, y) = \int_{\alpha_1}^{\beta_1} [\int_{E(x)} f(x, y)dy]dx = \int_{\alpha_2}^{\beta_2} [\int_{E(y)} f(x, y)dx]dy,$$

siendo $\alpha_1 = Inf\ E_1,\ \beta_1 = Sup\ E_1,\ \alpha_2 = Inf\ E_2,\ \beta_2 = Sup\ E_2$, *donde*

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\}$$

y

$$E_2 = \{y \in \mathbb{R};\ E(y) \neq \emptyset\}$$

En particular, cuando $E = I \times J$, *siendo* I, J *intervalos de* $\mathbb{R}$, *entonces*

$$\int_E f(x,y) = \int_I [\int_J f(x,y)dy]dx = \int_J [\int_I f(x,y)dx]dy.$$

Ejemplo: Calcular el área de la elipse de semiejes a y b.

Teorema 7.2.2. *(Teorema de Fubini. Caso* $p = 2, q = 1$*)*
Sea $E \subseteq \mathbb{R}^3$ *medible y sea* $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ *una función integrable, entonces*

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\alpha_3}^{\beta_3} [\int_{E(z)} f(x,y)d(x,y)]dz,$$

siendo $\alpha_3 = Inf\ E_3,\ \beta_3 = Sup\ E_3$, *donde*

$$E_3 = \{z \in \mathbb{R};\ E[z] \neq \emptyset\}$$

y a su vez

$$E[z] = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ (x,y,z) \in E\}.$$

Análogamente se podría hacer, para $(p = 1,\ q = 2)$ sin más que considerar los conjuntos $E[x]$ y $E[y]$.

Ejercicio: Calcúlese el volumen del elipsoide de semiejes a, b y c.

Principio de Cavalieri

Sea E un subconjunto medible de $\mathbb{R}^3$, tal que

$$E_1 = \{x \in \mathbb{R};\ E(x) \neq \emptyset\} = [a,b].$$

Según hemos visto en la lección anterior su volumen, $\lambda(E)$, viene dado por

$$\lambda(E) = \int_E 1\ d(x,y,z),$$

por lo que aplicando el teorema de Fubini y la definición de área de subconjuntos medibles de $\mathbb{R}^2$, se tiene que

$$\lambda(E) = \int_a^b (\int_{E(x)} 1\ d(y,z))dx) = \int_a^b \lambda(E(x))dx.$$

Dicha igualdad es conocida como el **principio de Cavalieri**.

Obsérvese que si E es el sólido de revolución generado por la gráfica de una cierta $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, aplicando el principio de Cavalieri, obtenemos que

$$V(E) = \pi \int_a^b f^2(x)dx,$$

como ya habíamos comentado anteriormente.

Ejemplo:

Un leñador corta una pieza C con forma de cuña de un árbol cilíndrico de radio 50 cm mediante dos cortes de sierra hacia el centro del árbol: uno horizontal y otro con un ángulo $\pi/4$. Calcúlese el volumen de dicha cuña.

La integral en dos variables vista como un cierto volumen

Sea ahora $A \subseteq \mathbb{R}^2$ medible y $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ un campo integrable en A tal que, para cada $(x,y) \in A$, se tiene que $f(x,y) \geq 0$. Obsérvese que como consecuencia del teorema de Fubini, si

$$A_1 = \{x \in \mathbb{R};\ A(x) \neq \emptyset\} = [a,b],$$

entonces

$$\int_A f(x,y)d(x,y) = \int_a^b (\int_{A(x)} f(x,y)dy)dx = \int_a^b S(x)dx,$$

donde, para cada $x \in [a,b]$, $S(x)$ es el área de la región del plano comprendida entre el eje x y la gráfica de la función $g : A(x) \longrightarrow \mathbb{R}$ definida para cada $y \in A(x)$ por $g(y) = f(x,y)$. Aplicando finalmente el principio de Cavalieri, la integral

$$\int_A f(x,y)d(x,y)$$

puede interpretarse como el **volumen del sólido comprendido entre el plano** $z = 0$ **y la gráfica del campo escalar** f.

Ejemplo:

Calcúlese el volumen de madera eliminado al taladrar, hasta el centro, una esfera de madera de radio 9 con una broca de radio 1.

7.2.2. Cambio de coordenadas

Es posible que convenga cambiar la función inicial por otra función. Este cambio será arbitrado por el teorema del cambio de variable, que suele usarse en alguna de las siguientes formas concretas:

Coordenadas polares, $n = 2$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[$, $V = \mathbb{R}^2 \backslash \{(x,0);\ x \leq 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta).$$

En este caso

$$det J_\phi(\rho,\theta) = \rho > 0,\ \forall (\rho,\theta) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y)d(x,y) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta)\rho d(\rho,\theta).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \le r^2\}$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y)$.

Coordenadas cilíndricas, $n=3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times\mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \le 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,z) = (\rho cos\theta, \rho sen\theta, z).$$

En este caso

$$detJ_\phi(\rho,\theta,z) = \rho > 0,\ \forall(\rho,\theta,z) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta, \rho sen\theta, z)\rho d(\rho,\theta,z).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2 \le r^2;\ 0 \le z \le h\}$, con $r,h > 0$. Calcúlese $\int_E 1d(x,y,z)$.

Coordenadas esféricas, $n=3$

Tomamos $U = \mathbb{R}^+ \times]-\pi,\pi[\times]-\pi/2,\pi/2[$, $V = \mathbb{R}^3 \backslash \{(x,0,z);\ x \le 0\}$, y la aplicación $\phi : U \longrightarrow V$ definida por

$$\phi(\rho,\theta,\varphi) = (\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, \rho sen\varphi).$$

En este caso

$$detJ_\phi(\rho,\theta,\varphi) = \rho^2 cos\varphi > 0,\ \forall(\rho,\theta,\varphi) \in U,$$

y por tanto

$$\int_E f(x,y,z)d(x,y,z) = \int_{\phi^{-1}(E)} f(\rho cos\theta cos\varphi, \rho sen\theta cos\varphi, sen\varphi)\rho^2 cos\varphi d(\rho,\theta,\varphi).$$

Ejercicio: Sea $E = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \le r^2\}$, con $r > 0$. Calcúlese su volumen.

7.2.3. Relación de ejercicios

1. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\displaystyle\int_I \text{sen}^2 x\ \text{sen}^2 y\ d(x,y),\ I = [0,\pi]\times[0,\pi].$

   b) $\displaystyle\int_I \frac{x^2}{1+y^2}\ d(x,y),\ I = [0,1]\times[0,1].$

c) $\displaystyle\int_I y\ logx\ d(x,y),\ I=[1,e]\times[1,e].$

d) $\displaystyle\int_I x^3\ y^3\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

e) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2}\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[0,1].$

f) $\displaystyle\int_I x\ log(xy)\ d(x,y),\ I=[2,3]\times[1,2].$

g) $\displaystyle\int_I y\ \cos(xy)\ d(x,y),\ I=[0,1]\times[1,2].$

2. Sea $f : A \to \mathbb{R}$, calcúlese su integral en los siguientes casos:

a) $f(x,y)=1$ siendo A la región limitada por $y^2=x^3,\ \ y=x.$

b) $f(x,y)=x^2$ siendo A la región limitada por $xy=16, y=x, y=0, x=8.$

c) $f(x,y)=x$ siendo A el triángulo de vértices $(0,0),(1,1),(0,1).$

d) $f(x,y)=x$ siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

e) $f(x,y)=e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2=x, x=0, y=1.$

f) $f(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y=\frac{x^2}{2}, y=x.$

g) $f(x,y)=xy^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x, x=1.$

h) $f(x,y)=xy$ siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2+y^2=1$ y el eje OX.

i) $f(x,y)=4-y^2$ siendo A la región limitada por $y^2=2x$ y $y^2=8-2x$

j) $f(x,y)=e^{x^2}$ siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y=x$, $x=2$ y el eje x

3. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y)=1-x-y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x+y\le 1\}$

b) $f(x,y)=x^2+y^2,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2+y^2\le 1\}$

c) $f(x,y)=x+y,\ A=\{(x,y)\in[0,1]\times[0,1];\ x^2\le y\le 2x^2\}$

d) $f(x,y)=x^2\ y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

e) $f(x,y)=y^2,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le r^2\}$

f) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; x^2+y^2\le 1, x^2+y^2\le 2x\}$

g) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le r^2\}$

h) $f(x,y)=\cos(x^2+y^2),\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le\pi/2\}$

i) $f(x,y)=\dfrac{1}{(1+x^2+y^2)^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ x^2+y^2\le 1,\ x\ge 0\}$

j) $f(x,y)=\dfrac{y}{x^2},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2;\ 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$

k) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x^2+y^2 \leq 1\}$

l) $f(x,y) = x\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 2\}$

m) $f(x,y) = x^2\ y,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ 1 \leq x^2+y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

n) $f(x,y) = x,\ A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2;\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x^2+y^2-2x \geq 0\}$

4. Utilícese el cambio a coordenadas polares para el cálculo de las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

a) $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}, \quad A = \bar{B}((0,0),1)$

b) $f(x,y) = y, \quad A = \{(x,y) \in B((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) : \quad y \geq 0\}$

c) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \bar{B}((1,0),1)$

d) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \quad 4 \leq x^2+y^2 \leq 9\}$

5. Calcúlense las siguientes integrales dobles:

a) $f(x,y) = x, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 2x\}$

b) $f(x,y) = x\sqrt{1-x^2-y^2}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0\}$

c) $f(x,y) = \exp(\frac{x}{y}), \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \leq x \leq y^2, \quad x \geq 0, y \geq 0\}$

d) $f(x,y) = (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}}, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x+y \geq 1,\ x^2+y^2 \leq 1\}$

e) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2+y^2)^2 \leq 4(x^2-y^2),\ x \geq 0\}$

f) $f(x,y) = x^2+y^2, \quad A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 2y,\ x^2+y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

6. Calcúlese el volumen de la región A definida por:

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2+y^2+z^2 \leq r^2, \quad x^2+y^2-ry \leq 0\}$.

b) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; x^2+y^2 \geq 1, \quad x^2+y^2 \leq 2, \quad z(x^2+y^2) \leq 1, \quad z \geq 0\}$.

c) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \leq x^2+y^2 \leq z\}$.

d) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq z \leq 1-(x^2+y^2)\}$.

7. Calcúlense las siguientes integrales triples:

a) $\displaystyle\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3}\ d(x,y,z),\ I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$.

b) $\displaystyle\int_A z\ e^{-(x^2+y^2)}\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; 2(x^2+y^2) \leq z^2,\ z \geq 0,\ z \leq 1\}$.

c) $\displaystyle\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; \sqrt{x^2+y^2} \leq z \leq 4\}$.

d) $\displaystyle\int_A (x+y-2z)\ d(x,y,z)\ ,\ A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3; z^2 \geq x^2+y^2,\ z \geq 0,\ z \leq 3\}$.

e) $\displaystyle\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,\right)^n d(x,y,z)$, $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3; x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$ $(n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}^+)$.

f) $f(x,y,z)=(x+y+z)^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 1, x^2+y^2+z^2\leq 2z\}$

g) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq 1\}$

h) $f(x,y,z)=x^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1,\ 4z^2\geq 3(x^2+y^2)\}$

i) $f(x,y,z)=zy\sqrt{x^2+y^2}\ \ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ 0\leq z\leq x^2+y^2,\ 0\leq y\leq\sqrt{2x-x^2}\}$

j) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 2,\ x^2+y^2\leq z\}$

k) $f(x,y,z)=z^2,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq \mathrm{R}^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2\mathrm{R}z\}$

l) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2},\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 3\}$

8. Demuéstrese que $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2/2}dx=\sqrt{2\pi/a}$, donde $a>0$.

9. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\}$

b) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2; \frac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ x^2\leq y\}$

c) $f(x,y,z)=z,\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\frac{y^2}{4}+\frac{z^2}{9}\leq 1, z\geq 0\}$

d) $f(x,y)=\exp\left(\frac{y-x}{y+x}\right),\ \ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$

Capítulo 8

Ecuaciones diferenciales

8.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden

Sumario

En esta lección vamos a introducir las ecuaciones diferenciables. Estas ecuaciones suelen aparecer en todos los campos de la ciencia y de una forma extaordinariamente prolífica en el campo de la Física. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

8.1.1. Ecuaciones diferenciales ordinarias

Una **ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.)** es una relación funcional, $F : D \longrightarrow \mathbb{R}$ ($D \subseteq \mathbb{R}^{n+2}$), entre una función desconocida y de una sola variable x y sus derivadas,

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{n)}(x)) = 0.$$

Ejemplos:

$$(y')^2 + 1 = 0 \quad (1)$$

y

$$(y'')^3 + y^2 = 0 \quad (2).$$

El **orden** de una ecuación diferencial es el de la derivada de mayor orden contenida en ella. El **grado** de una ecuación diferencial es el exponente de la derivada de mayor orden.

Ejemplo:
La ecuación (1) es de orden uno y grado 2.
La ecuación (2) es de orden 2 y grado 3.

Se llama **solución** de la e.d.o. de orden n

$$F(x, y(x), y'(x), ..., y^{n)}(x)) = 0$$

en un intervalo I a toda función real $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ que verifica las siguientes propiedades:

1. f es n-veces derivable en I.
2. Para cada $x \in I$,
$$(x, f(x), f'(x), ..., f^{n)}(x)) \in D.$$
3. $F(x, f(x), f'(x), ..., f^{n)}(x)) = 0, \ \forall x \in I.$

Con frecuencia a una solución f de una e.d.o. se le llama una **integral** de la ecuación y a la gráfica, una **curva integral** ó una curva solución. Se llama **solución general** de una e.d.o. de orden n a una familia de funciones dependientes de n parámetros ó constantes, de forma que para cada valor dado a cada una de las constantes, se obtiene una **solución particular**. Existen e.d.o. que presentan soluciones que no provienen de la solución general para ningún valor de las constantes. Este tipo de soluciones de la e.d.o. se llaman **soluciones singulares**.

Al proceso de obtener todas las soluciones de la e.e.o. se le denomina **integración ó resolución** de una e.d.o.

Las e.d.o. suelen responder a los planteamientos de algunos problemas físicos. En estos casos suelen aparecer algunas condiciones adicionales. Estas condiciones se denominan **condiciones iniciales**. El problema de encontrar la solución de la correspondiente e.d.o. que verifica estas condiciones iniciales se denomina **Problema de valores iniciales asociado** a dicha e.d.o.

El planteamiento de un problema de valor inicial de una e.d.o. de primer orden está sujeto a una sola condición del tipo $y(x_0) = y_0$.

El planteamiento de un problema de valores iniciales de una e.d.o. de segundo orden está sujeto a dos condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$ y $y'(x_0) = y_1$.

El planteamiento de un problema de valores iniciales de una e.d.o. de orden n está sujeto a n condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$.

8.1.2. Ecuaciones en Derivadas Parciales

Una ecuación diferencial en derivadas parciales (**e.d.p.**) es una ecuación en la que intervienen una o más derivadas parciales de una función de dos o más variables independientes.

El orden de la derivada más alta es llamado orden de la ecuación y una solución de una ecuación en derivadas parciales es una función que satisface la ecuación. Algunos ejemplos de ecuaciones en derivadas parciales lineales de segundo orden que desempeñan un papel importante en Ingeniería son los siguientes:

1. Ecuación del calor

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (1).$$

   La ecuación (1) aparece en la teoría del flujo de calor en una varilla o en un alambre delgado donde la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla.

2. Ecuación de onda

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) \qquad (2).$$

   Los problemas de vibraciones mecánicas a menudo conducen a la ecuación de onda (2), en la que $u(x;t)$ representa los pequeños desplazamientos de una cuerda vibrante.

3. Ecuación de Laplace

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y) = 0 \qquad (3).$$

   La solución $u(x;y)$ de la ecuación de Laplace (3) puede ser interpretada como la distribución estacionaria (esto es, independiente del tiempo) de la temperatura en una placa plana y delgada.

Para la mayor parte de las ecuaciones lineales de segundo orden (aún con las que tienen coeficientes constantes) no es fácil llegar a la solución general. Sin embargo, casi siempre es posible, y bastante sencillo, hallar soluciones particulares de las ecuaciones lineales anteriores que cumplan ciertas condiciones adicionales. Por ejemplo, la condición de que la solución u asuma valores dados en la frontera de la región considerada o, cuando el tiempo t es una de las variables, que u esté dada en t = 0. Todas las ecuaciones anteriores tienen infinitas soluciones.

8.1.3. Teoremas de existencia y unicidad para las E.D.O.

Cuando se trata de encontrar una solución particular de la e.d.o. que lo rige y que cumple las condiones adicionales, parece conveniente que, antes de aventurarnos en la búsqueda de una tal solución, podamos saber si ésta existe y una vez garantizada la existencia, saber si ésta es única. Para la ecuaciones de primer orden tenemos el siguiente

Teorema 8.1.1. *Sea $y' = F(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ un problema de valores iniciales. Si existe un rectángulo R del plano tal que $(x_0, y_0) \in R^{int}$ y verificando que $F, \frac{\partial F}{\partial y} \in \mathcal{C}(R)$, entonces existe un intervalo $I =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ con $\delta > 0$ y una única función $y = f(x)$ definida en I tal que la solución de la e.d.o. verifica la condición adicional $y_0 = f(x_0)$.*

Para las e.d.o. de orden superior disponemos de los siguientes resultados.

Teorema 8.1.2. *Sea $y^{n)} + p_{n-1}y^{n-1)} + ...p_1y' + p_0y = F(x)$ con $p_0, p_1, ..., p_n, F$ funciones continuas en un intervalo abierto I con $x_0 \in I$ y sujeto a n condiciones del tipo $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_1$, ..., $y^{n-1)}(x_0) = y_{n-1}$. Entonces el problema de valores iniciales correspondiente tiene una y sólo una solución $y = f(x)$ definida en el intervalo I.*

Teorema 8.1.3. *Sea una e.d.o. lineal de orden n $y^{n)} + p_{n-1}y^{n-1)} + ...p_1y' + p_0y = 0 = 0$, donde $p_0, p_1, ..., p_n$ son n funciones. Si $y_1, y_2, ..., y_n$ son soluciones de la ecuación anterior, entonces la combinación lineal $c_1y1, c_2y_2, ..., c_ny_n$ también es solución.*

8.1.4. Lineal de primer orden

Una ecuación diferencial ordinaria se dice **lineal de orden 1** si es de la forma:

$$y' + a(x)y = b(x),$$

donde $b, a : I \longrightarrow \mathbb{R}$, son dos funciones continuas definidas en un intervalo I de números reales. Si $b(x) = 0, \ \forall x \in I$, se dice que dicha ecuación es **homogénea**.

Caso homogéneo

Para resolver esta ecuación vamos a comenzar considerando el caso homogéneo. En tal caso basta escribir $y'(x)/y(x) = -a(x)$, por lo que

$$log[y(x)] = -A(x)$$

donde $A(x)$ es una primitiva de la función $a(x)$. Y por tanto cualquier función

$$f(x) = Ce^{-A(x)}, \quad C \in \mathbb{R}$$

es la solución general de la ecuación. Para cada valor concreto de C se obtiene una solución particular.

Si ahora imponemos alguna condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única al quedar determinada la primitiva (todas las primitivas se diferencian en una constante).

Ejemplo: Resuélvase el problema de valores iniciales:

$$y' = -ky, \quad y(0) = 1.$$

Caso no homogéneo:

Es fácil probar que

$$g(x) = (C + B(x))e^{-A(x)},$$

es una solución de la ecuación $y' + a(x)y = b(x)$, donde $C \in \mathbb{R}$, $A(x)$ es cualquier primitiva de $a(x)$, y $B(x)$ es cualquier primitiva de $b(x)e^{A(x)}$.

Análogamente, si fijamos una condición adicional del tipo $y(x_0) = y_0$, la solución, quedará determinada de forma única.

Ejemplo: Resu+lvase la ecuación $y' + 2xy = x$ y el problema de valores iniciales correspondiente con $y(0) = 1$.

8.1.5. e.d.o. de orden uno no lineal

Al contrario que en el caso lineal, puede ocurrir que una e.d.o. de orden uno no tenga solución, como ocurre con la ecuación (1,) ó que un problema de valores iniciales asociado a una tal ecuación tenga más de una solución. Así por ejemplo, el problema de valores iniciales:

$$y' = -(y/x)^2, \quad y(0) = 1$$

tiene al menos dos soluciones.

La resolución de estas e.d.o. está supeditado a una clasificación previa en distintos tipos. La experiencia demostrará que muchas veces no será posible expresar las soluciones de forma explícita

Tipo I: **Ecuaciones diferenciales de variable separables**

Una e.d.o. de primer orden se dice de **variables separables** si es de la forma

$$y' = G(x, y),$$

donde $G = P(x)Q(y)$, donde $P(x)$ y $Q(y)$ son dos funciones continuas en sendos intervalos, I y J, con $Q(y) \neq 0, \ \forall y \in J$.

Se demuestra que una función f definida en el intervalo I es solución de la ecuación anterior si satisface la siguiente igualdad, que la define implícitamente:

$$B(f(x)) = A(x),$$

donde B es una primitiva de la función $1/Q(y)$ y A es una primitiva de $P(x)$

Ejemplos: Resu+lvase la ecuación $y' = -y/x$ y el correspondiente problema de valores iniciales $y(1) = 2$.

Tipo II: **Ecuaciones diferenciales de primer orden homogéneas**

Una e.d.o. de primer orden se dice **homogénea** si es de la forma

$$y' = F(y/x),$$

donde F es una función de una variable.

Una función f es solución si, y sólo si $f(x)/x$ es solución de la ecuación de variables separables $u' = (F(u) - u)/x$.

Ejemplos: $x^2y' = y^2 - xy + x^2$. y $y' = \frac{x+y}{x-y}$

Tipo III: **Ecuaciones diferenciales reducibles a homogéneas**

Las ecuaciones diferenciales de la forma

$$y' = F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}),$$

donde $A, B, C, a, b, c \in \mathbb{R}$, se pueden reducir a una ecuación diferencial homogénea teniendo en cuenta las siguientes observaciones:

1) Si ambas rectas $Ax+By+C = 0$ y $ax+by+c = 0$ se cortan en el punto (c, d) entonces se hace el cambio $X = x - c$ y $Y = y - d$ y se obtiene que

$$F(\frac{Ax + By + C}{ax + by + c}) = G(Y/X),$$

y por tanto $Y' = G(Y/X)$ es una ecuación diferencial homogénea.

2) Si ambas rectas son paralelas $A/a = B/b$, hacemos el cambio $z = ax + by$ resulta que $z' = a + by'$ por lo que nos resultará una nueva ecuación diferencial de variables separables:

$$z' = Q(z)P(x),$$

con $P(x)$ constante.

Ejemplos: Resuélvanse las ecuaciones: $y' = \frac{3x+2y}{2+x}$ y
$y' = \frac{2x-y+2}{-4x+2y+1}$.

Tipo IV: **Ecuaciones diferenciales exactas**

Una e.d.o. de primer orden se dice que es **exacta** cuando puede escribirse de la forma

$$Q(x, y)y' + P(x, y) = 0,$$

donde P y Q son dos funciones definidas en un abierto $D \subseteq \mathbb{R}^2$, tales que pueden obtenerse como derivadas parciales de otra función $G(x, y)$, es decir tales que

$$\frac{\partial G(x, y)}{\partial y} = Q(x, y), \ \frac{\partial G(x, y)}{\partial x} = P(x, y), \ \forall (x, y) \in D.$$

En otras palabras, se dice exacta si el campo vectorial $F(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ es conservativo, asň si Q y P son de clase $\mathcal{C}^1$, se tiene que

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial P(x,y)}{\partial y}, \ \forall (x,y) \in D,$$

ó si se quiere, si admite un potencial G.

Si la e.d.o. es exacta, se tiene que f es solución de dicha ecuación si, y sólo si $G(x, f(x)) = C$, con $C \in \mathbb{R}$

Ejemplo: Resolver $y' = \frac{2xcos(y)+3x^2y}{-x^3+x^2seny+y}$ con $y(0) = 2$.

8.1.6. Otras ecuaciones de primer orden

Ecuación de Bernouilli

La e.d.o $y' + P(x)y = Q(x)y^n$ se conoce con el nombre de **ecuación de Bernouilli**. Aunque esta ecuación no es lineal, puede reducirse a una lineal sin más que hacer el cambio $u = y^{1-n}$. Entonces la ecuación se transforma en

$$u' + (1-n)P(x)u = (1-n)Q(x).$$

Resuélvase la ecuación $y' + y/x = x^3y^3$.

Ecuaciones de otros grados

Ejemplos típicos de este tipo de ecuaciones son

1. $(y' - y)^2 - (x - y)^2 = 0$
2. $y = y'x + g(y')$ (Ecuación de Clairaut)
3. $y = y'P(x) + Q(x)(y')^n$

En el primer caso se tiene que $y' = y \pm (x - y)$, es decir $y' = x$ ó $y' = 2y - x$. Basta ahora aplicar los métodos anteriores.

En los casos segundo y tercero se vuelve a derivar la ecuación con respecto a x y se toma $z = y'$ y se considera la nueva ecuación con z como variable. Se resuelve ésta y sale una relación entre x y z. Se sustituye el resultado en la ecuación primera, apareciendo una expresión de y y x en función de z. Si se puede eliminar z, se obtiene la relación entre x e y.

Resuélvanse las ecuaciones
$y = 4y' + 4y'^3$ y
$y = y'x - y'^3$

8.1.7. Relación de ejercicios

Resuélvanse las siguientes e.d.o.

1. $2x^2 + 2y^2 + (4xy + 3y^2)y' = 0.$
2. $3(y-1)^2 y' = 2 + sen(x).$
3. $(y^4 - y^2 + 1)y' = x^3 y - y.$
4. $(2+y)y' = 2x + 3y.$
5. $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

8.2. e.d.o. de segundo orden

Sumario

En esta lección, haremos una pequeña incursión en el caso de las e.d.o. de segundo orden, daremos una primera clasificación en distintos tipos en orden a dar métodos de resolución y expondremos el método de resolución por series de potencias. El contenido completo de esta lección se articula de la siguiente manera:

8.2.1. e.d.o lineal de segundo orden

Recordemos que una e.d.o. si es una ecuación en la que intervienen la variable, una función de esta variable, y su primera y su segunda derivadas,

$$F(x, y, y', y'') = 0.$$

No existe un método general para la solución de cualquier e.d.o. de segundo orden. Uno de los tipos más importante es el de e.d.o. lineal de segundo orden con coeficientes constantes. Una tal ecuación es de la forma:

$$y'' + ay' + by = g(x),$$

donde $g(x)$ representa una cierta función de x.

En este caso, como en el de las e.d.o de primer orden, distinguiremos entre el las de tipo **homogéneo ó reducido** esto es, $g(x) = 0$, y las de tipo **no homogéneo**, $g(x) \neq 0$. En cuanto al problema de valores iniciales, debemos señalar que en este caso se necesitan dos: una condición sobre un valor de y y otra condición sobre el mismo valor de y'

caso homogéneo

Si $y = f(x) = e^{mx}$ es solución de una e.d.o. lineal de segundo orden con coeficientes constante homogénea, entonces se obtiene que

$$e^{mx}(m^2 + am + b) = 0,$$

y por tanto, y es solución de la correspondiente e.d.o. si, y sólo si,

$$m^2 + am + b = 0.$$

Esta última ecuación recibe el nombre de **ecuación auxiliar**. Así pues resulta interesante conocer los posibles valores de m que son soluciones de la ecuación auxiliar. Según el signo del discriminante asociado a la ecuación auxilar caben tres posibilidades:

(a) discriminante positivo

Existen dos soluciones reales distintas para la ecuación auxiliar. Si $m = \alpha$ y $m = \beta$ son las soluciones de la ecuación, entonces $f_1(x) = e^{\alpha x}$ y $f_2(x) = e^{\beta x}$ son dos soluciones independientes y la solución general de la e.d.o linear de segundo orden homogénea es

$$f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x},$$

donde A y B son sendas constantes.

Ejemplo

Resuélvase la ecuación $y'' - 2y' - 3y = 0$.

(b) discriminante negativo

Existen dos soluciones imaginarias conjugadas para la ecuación auxiliar. Si $m = \alpha \pm i\beta$ son las soluciones complejas de la ecuación auxiliar, entonces la solución general de la e.d.o linear de segundo orden homogénea es de la forma

$$f(x) = e^{\alpha x}(A(cos(\beta x) + iBsen(\beta x)),$$

donde A y B son sendas constantes.

Ejemplo

Resuélvase la ecuación $y'' + 4y' + 13y = 0$.

(c) discriminante nulo

Si $m = \alpha$ es la solución doble de la ecuación auxiliar, entonces para encontrar la solución general de la e.d.o linear de segundo orden homogénea tomamos

$$y = g(x)e^{\alpha x}$$

y la sustituimos en la ecuación. Resulta que tal imposición fuerza que $g(x) = Ax + B$, y por tanto la solución general es

$$f(x) = (Ax + B)e^{\alpha x}.$$

Ejemplo

Resuélvase la ecuación $y'' - 4y' + 4y = 0$.

caso no homogéneo

En el caso de la ecuación no homogénea

$$y'' + ay' + by = g(x),$$

la solución se obtiene por cálculo de primitivas. Nuevamente atendemos a los posibles valores de m que son soluciones de la ecuación auxiliar.

(a) discriminante positivo ó negativo

Sean $m = \alpha$ y $m = \beta$ las soluciones de la ecuación auxiliar, reales ó complejas, y sea $P(x)$ una primitiva de la función $e^{-\alpha x}g(x)$ y $Q(x)$ una primitiva de la función $e^{-\beta x}g(x)$. Una solución particular es de la forma $y = f(x) = \frac{1}{\alpha-\beta}(e^{\alpha x}P(x) - e^{\beta x}Q(x))$.

Así por tanto, la ecuación general viene dada por

$$f(x) = Ae^{\alpha x} + Be^{\beta x} + \frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\alpha x}P(x) - e^{\beta x}Q(x)),$$

para el caso de discriminante positivo y

$$f(x) = y = e^{ax}(A(cos(bx) + iBsen(bx)) + \frac{1}{\alpha - \beta}(e^{\alpha x}P(x) - e^{\beta x}Q(x)),$$

donde A y B son sendas constantes para el caso con discriminante negativo.

En el caso complejo debe recordarse que $e^{ix} = (cos(x) + isen(x)$.

Ejemplo

Resuélvase la ecuación $y'' - 3y' + 2y = cos(3x)$.

(b) discriminante nulo

Si $m = \alpha$ es la solución de la ecuación auxiliar y $P(x)$ es una primitiva de la función $e^{-\alpha x}g(x)$, entonces una solución particular de la e.d.o linear de segundo orden no homogénea es de la forma

$$y = e^{\alpha x}P(x).$$

Así por tanto, la ecuación general viene dada por

$$y = f(x) = (A + Bx)e^{\alpha x} + (e^{\alpha x}P(x)),$$

Ejemplo

Resuélvase la ecuación $y'' + 4y' + 4y = cos(x)$.

8.2.2. Resolución de e.d.o. lineales por series de potencias

En esta sección desarrollaremos un método para resolver una e.d.o. mediante el uso de series de potencias. Este método es especialmente interesante para e.d.o. de cualquier orden cuyos coeficientes sean funciones racionales.

La idea consiste en suponer que la solución es una función f desarrollable en series de potencias para terminar determinando, imponiendo que ésta es solución de la ecuación, los coeficientes de dicha serie. En todo el proceso han de tenerse en cuenta todas las propiedades ya observadas para las funciones definidas como suma de una serie de potencias, especialmente aquella que aseguraba que para derivar una tal función basta derivar término a término.

Para comprender el método hagamos algunos ejemplos.

Ejemplos

Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

1. $y' = 2y$.
2. $y'' + y = 0$.

8.2.3. Algunas e.d.o. interesantes

(1) **Ecuación de Riccati**

Es una ecuación del tipo

$$y' + y^2 + P(x)y + Q(x) = 0,$$

donde $P(X)$ y $Q(x)$ son dos funciones de x.

Este tipo muy general de ecuación no se resuelve fácilmente, excepto en algunos casos especiales. Su importancia radica en la relación que tiene con la ecuación lineal general de segundo orden

$$z'' + P(x)z' + Q(x)z = 0,$$

sin más que hacer el cambio

$$y = z'/z.$$

Así pues $y = f(x)$ es solución de la ecuación de Riccati, entonces $z = Ce^{A(x)}$ es solución de la correspondiente ecuación de segundo orden, donde $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$. Por otra parte, si se conoce una solución particular y_0, la solución general puede determinarse de la siguiente forma:

a) Escribimos $y = y_0 + 1/v$

b) Derivamos y sustituimos, quedando $v' - (P(x) + 2y_0)v = 1$.

c) Sea ahora $R(x)$ una primitiva de $P(x)+2y_0$. Resolvemos la ecuación, y obtenemos que $v = e^{R(x)}(S(x) + A)$, donde $S(x)$ es una primitiva de $e^{-R(x)}$.

Ejemplo: Resuélvase la ecuación $y' + 2y + y^2 = 0$

(2) **Ecuación lineal de Euler**

Es una ecuación del tipo

$$x^n y^{n)} + a_1 x^{n-1} y^{n-1)} + ... + a_{n-1} x y' + a_n y = g(x),$$

donde $a_1, a_2, ..., a_{n-1}$ son constantes.

La sustitución $x = e^t$ reduce la ecuación a otra lineal con coeficientes constantes en que t es la nueva variable. La nueva ecuación resultante se transforma en

$$y^{n)} + q_1 y^{n-1)} + ... + q_{n-1} y' + q_n = g(e^t),$$

donde $q_1, q_2, ..., q_n$ son constantes.

Ejemplo: Resuélvase la ecuación $x^2 y'' + 6xy' + 6y = 1/x^2$

8.2.4. Relación de ejercicios

1. Resuélvanse las siguientes ecuaciones:

   a) $2y'' + 6y' + 2y = 0$

   b) $y'' - 5y' + 4y = 0$

2. Resuélvanse el siguiente problema de valores iniciales

$$y'' - y' - 2y = 4x^2, y(0) = 0, y'(0) = 1.$$

3. Resuélvanse las siguientes ecuaciones mediante el método de las series de potencias

   a) $y'' - xy = 0$.

   b) $y''' + xy' = 2 + x$.