Series de números reales

Concepto de serie. Dada una sucesión $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen *sumando consecutivamente* los términos de $\{a_n\}$, es decir:

$$A_1 = a_1, \; A_2 = a_1 + a_2, \; A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \ldots, \; A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n, \; \ldots$$

o, si te gusta más, $A_1 = a_1$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, $A_{n+1} = A_n + a_{n+1}$.

La sucesión $\{A_n\}$ así definida se llama *serie de término general* a_n o *serie definida por la sucesión* $\{a_n\}$, y la representaremos por $\sum\limits_{n \geqslant 1} a_n$ o, más sencillamente, $\sum a_n$. El número $A_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ se llama *suma parcial de orden* n de la serie $\sum a_n$.

Debe quedar claro desde ahora que ***una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión***.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, ***los conceptos y resultados vistos para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series***.

En particular, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "acotada", "convergente" o "positivamente divergente".

Si una serie $\sum a_n$ es convergente se usa el símbolo $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ para representar el *límite de la serie* que suele llamarse *suma de la serie*. Naturalmente, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ es el número definido por:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim\{A_n\} = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} a_k \,.$$

La igualdad $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = S$ quiere decir que para todo $\varepsilon > 0$, hay un $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $\left| \sum\limits_{k=1}^{n} a_k - S \right| < \varepsilon$.

Serie geométrica. Dado un número x, la serie

$$\sum_{n \geqslant 0} x^n = \{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$$

se llama serie geométrica de razón x. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \,.$$

Serie armónica. La serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$$

se llama serie armónica. Se verifica que la serie armónica diverge positivamente:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\left\{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}=+\infty.$$

Serie armónica alternada. La serie

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}$$

Se llama serie armónica alternada. Se verifica que la serie armónica alternada es convergente y su suma es igual a $\ln 2$.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}=\ln 2.$$

La particularidad del estudio de las series. La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: **se trata de deducir propiedades de la serie**

$$\sum_{n\geqslant 1}a_n=\{A_n\}=\{a_1+a_2+\cdots+a_n\}$$

a partir del comportamiento de $\{a_n\}$. Es decir, los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión $\sum a_n=\{A_n\}$ haciendo hipótesis sobre la sucesión $\{a_n\}$. La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de $A_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma $a_1+a_2+\cdots+a_n$ no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que *la sucesión $\{a_n\}$ es el dato que podemos utilizar*.

Es importante que te des cuenta de que cambiar *un solo término* en la sucesión $\{a_n\}$ se traduce en cambiar *todos los términos* en la serie $\sum a_n$ a partir de uno en adelante. El siguiente resultado nos dice que si cambiamos un número finito de términos en una sucesión $\{a_n\}$ ello no afecta a la posible convergencia de la serie $\sum a_n$ pero sí afecta a la suma de dicha serie.

Sean $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ dos sucesiones y supongamos que hay un número $q\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant q+1$ es $a_n=b_n$. Entonces se verifica que las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ o bien convergen ambas o no converge ninguna, y en el primer caso se verifica que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{j=1}^{q}a_j=\sum_{n=1}^{\infty}b_n-\sum_{j=1}^{q}b_j.$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie. Para que la serie $\sum_{n\geqslant 1}a_n$ sea convergente es necesario que $\lim\{a_n\}=0$.

Esta condición necesaria no es suficiente.

Series de términos positivos. Una serie $\sum a_n$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una *serie de términos positivos*.

Criterio básico de convergencia para series de términos positivos. Una serie de términos positivos $\sum a_n$ es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$. Una serie de términos positivos que no está mayorada es (positivamente) divergente.

Criterio básico de comparación. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Entonces se verifica que si la serie $\sum b_n$ es convergente, también $\sum a_n$ es convergente o, equivalentemente, si la serie $\sum a_n$ es divergente también $\sum b_n$ es divergente.

Criterio límite de comparación. Sean $\sum a_n$ y $\sum b_n$ dos series de términos positivos, y supongamos que

$$\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}\,.$$

- Si $L = +\infty$ y $\sum b_n$ es divergente también $\sum a_n$ es divergente.
- Si $L = 0$ y $\sum b_n$ es convergente también $\sum a_n$ es convergente.
- Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\sum a_n$ y $\sum b_n$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

En particular, **si dos sucesiones de números positivos, $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ son asintóticamente equivalentes, las respectivas series, $\sum a_n$ y $\sum b_n$ ambas convergen o ambas divergen.**

Criterio integral. Sea $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}$ una función **positiva y decreciente**. Entonces se verifica que

$$\sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leqslant \int_1^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{k=1}^{n} f(k)$$

En consecuencia, la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ y la integral $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ ambas convergen o ambas divergen.

Series de Riemann. Dado un número real α, la serie

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

se llama serie de Riemann de exponente α. Dicha serie es convergente si, y sólo si, $\alpha > 1$.

Series de Bertrand. La serie

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$$

converge si $\alpha > 1$ cualquiera sea β, y también si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. En cualquier otro caso es divergente.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768). Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

- Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ es convergente.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$ o si hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant 1$, entonces $\sum a_n$ es divergente y además $\{a_n\}$ no converge a 0.
- Si $L = 1$ el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821). Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim \left\{ \sqrt[n]{a_n} \right\} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces:

- Si $L < 1$ la serie $\sum a_n$ converge.
- Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, la serie $\sum a_n$ es divergente y $\{a_n\}$ no converge a 0.
- Si $L = 1$ el criterio no proporciona información sobre la convergencia de la serie.

Criterio de Raabe (1832). Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos y supongamos que

$$\lim n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$$

- Si $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\sum a_n$ es convergente.
- Si $L < 1$ o $L = -\infty$, la serie $\sum a_n$ es divergente.

Forma alternativa del criterio de Raabe. Sea $\sum a_n$ una serie de términos positivos tal que $\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = 1$. Sea $S_n = \left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^n$.

- Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L > 1$ o si $S_n \to +\infty$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es convergente.
- Si $S_n \to \mathrm{e}^L$ con $L < 1$ o si $S_n \to 0$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es divergente.

Convergencia absoluta. Se dice que una serie $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ es **absolutamente convergente** si la serie $\sum_{n\geqslant 1} |a_n|$ es convergente.

Toda serie absolutamente convergente es convergente.

Criterio de Leibniz para series alternadas. Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ es decreciente y convergente a cero. Entonces la serie alternada $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}a_n$ es convergente. Además, si $S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$ y $S=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$, entonces para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|S-S_n|\leqslant a_{n+1}$.

Series de potencias. Dadas una sucesión $\{c_n\}_{n\in\mathbb{N}_o}$ y un número $a\in\mathbb{R}$, se llama **serie de potencias** centrada en a a la sucesión

$$\{c_o+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\cdots+c_n(x-a)^n\}$$

en la cual x representa a un número real arbitrario. Dicha serie se simboliza por

$$\sum_{n\geqslant 0}c_n(x-a)^n.$$

Un tipo particular de series de potencias son las **series de Taylor**. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a.

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}c_n(x-a)^n$, sea $\lambda=\lim\sqrt[n]{|c_n|}$ y definamos:

$$R=\begin{cases}0, & \text{si } \lambda=+\infty\,;\\ \dfrac{1}{\lambda}, & \text{si } 0<\lambda<+\infty\,;\\ +\infty, & \text{si } \lambda=0\,.\end{cases}$$

Entonces, si $R=0$ la serie converge sólo para $x=a$; si $0<R<+\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x\in\mathbb{R}$ tal que $|x-a|<R$ y no converge para $|x-a|>R$; y si $R=+\infty$ la serie converge absolutamente para todo $x\in\mathbb{R}$.

Con las notaciones del teorema anterior, el número R se llama el **radio de convergencia** de la serie de potencias. Una serie de potencias se dice que es trivial si $R=0$.

Para una serie de potencias no trivial, centrada en un punto a, el intervalo $I=]a-R,a+R[$, si $0<R<+\infty$, o bien la totalidad de $\mathbb{R}$, $I=\mathbb{R}$, cuando $R=+\infty$, se llama **intervalo de convergencia** de la serie; y la función $f:I\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-a)^n$ para todo $x\in I$, se llama **función suma** de la serie.

Dada una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0}c_n(x-a)^n$, supongamos que $c_n\neq 0$ para todo $n\in\mathbb{N}$, y que

$$\frac{|c_{n+1}|}{|c_n|}\to\lambda\in\mathbb{R}_o^+\cup\{+\infty\}.$$

Entonces el radio de convergencia R viene dado por $R=1/\lambda$, cuando $0<\lambda<+\infty$, $R=0$ si $\lambda=+\infty$ y $R=+\infty$ si $\lambda=0$.

Derivación de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ una serie de potencias con radio de convergencia no nulo R. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y $f : I \to \mathbb{R}$ la función suma de la serie definida para todo $x \in I$ por:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n.$$

Entonces se verifica que:

- f es indefinidamente derivable en I.
- La derivada de orden k de f está dada para todo $x \in I$ por:

$$f^{(k}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}.$$

En particular, se verifica que $f^{(k}(a) = c_k \cdot k!$, es decir, $c_k = \dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$ y, por tanto, la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ coincide con la serie de Taylor en a de su función suma.

Series de Taylor de la función exponencial.

$$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que:

$$\mathrm{e}^x = \mathrm{e}^a\, \mathrm{e}^{x-a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^a}{n!}(x-a)^n \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

Series de Taylor del seno y del coseno.

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Por el teorema de derivación para series de potencias obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \text{para todo } \ x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $a = 0$ tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo natural.

$$\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

La serie de Taylor del logaritmo centrada en $a > 0$ se deduce de lo anterior:

$$\ln(x) = \ln(a+(x-a)) = \ln a + \ln\left(\frac{x-a}{a}\right) = \ln a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}}(x-a)^{n+1} \ (|x-a| < a).$$

Serie de Taylor del arcotangente en cero.

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in]-1,1[)$$