Ejercicios de Matemáticas I
Relación 0: Números reales y Complejos

1. Supuesto que $\frac{s}{t} < \frac{x}{y}$, donde $s, x \in \mathbb{R}$, $t, y \in \mathbb{R}^+$, pruébese que
$$\frac{s}{t} < \frac{s+x}{t+y} < \frac{x}{y}.$$

2. Dados los números reales x, y, discútase la validez de las siguientes afirmaciones.

   a) $|2x-1| \leq 5$,

   b) $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$ $(x \neq -2)$,

   c) $|x-5| < |x+1|$,

   d) $|x| - |y| = |x-y|$.

3. Calcúlense, si existen, el supremo, el máximo, el ínfimo y el mínimo de los siguientes subconjuntos de números reales:

   a) $A = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 \geq 0\}$,

   b) $B = \{x \in \mathbb{R};\ x^2 - 4 < 0\}$,

   c) $C = \{x \in \mathbb{R} \backslash \{2\};\ x+2/x-2 < 0\}$

   d) $D = \{x \in \mathbb{R} \backslash \{2\};\ x+2/x-2 \leq 0\}$

   e) $E = \{1/n;\ n \in \mathbb{N}\}$.

4. Demostrar que se verifican las siguientes relaciones para cualquier natural:

   a) $1+1+2+2^2+2^3+\cdots+2^n = 2^{n+1}$

   b) $1+3+5+\cdots+(2n-1) = n^2$

   c) $2+4+6+8+\ldots+2n = n(n+1)$.

   d) $2+3+5+8+\ldots+(3n-1) = \frac{n(3n+1)}{2}$.

   e) $1+2^3+3^3+\cdots+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

   f) $\frac{2}{1}+\frac{4}{3}+\cdots+\frac{2n}{2n-1} > \sqrt{2n+1}$

   g) $n^2 < 2^{2n}$

   h) Para cualquier natural n, el resultado de n^2+n siempre es par.

   i) Para todo $n \geq 2$, $n^3 - n$ es múltiplo de 6.

j) Para todo natural n, $n(n^2+5)$ es múltiplo de 6.

5. Realiza las operaciones indicadas y expresa el resultado en la forma $a+ib$:

   a) $(7-2i)(5+3i)$
   b) $(i-1)^3$
   c) $\overline{(1+i)(2+i)}(3+i)$
   d) $\dfrac{3+i}{2+i}$
   e) $\dfrac{(4-i)(1-3i)}{-1+2i}$
   f) $(1+i)^{-2}$
   g) $\dfrac{1+2i}{2-i}$
   h) $i^2(1+i)^3$

6. Calcula la parte real e imaginaria de las funciones:

   a) $f_1(z)=\overline{z}^2$
   b) $f_2(z)=z^3$
   c) $f_3(z)=\dfrac{1}{z}$
   d) $f_4(z)=\dfrac{1}{1+z^2}$
   e) $f_5(z)=\dfrac{z+i}{z-i}$

7. Calcula las siguientes cantidades:

   a) $|(1+i)(2-i)|$
   b) $\left|\dfrac{4-3i}{2-i\sqrt{5}}\right|$
   c) $\left|(1+i)^{20}\right|$
   d) $|\sqrt{2}+i(\sqrt{2}+1)|$

8. Calcula los números complejos z tales que $\dfrac{1+z}{1-z}$ es:

   a) Un número real.
   b) Un número imaginario puro.

9. Expresa en forma polar los siguientes números complejos:

a) $-\sqrt{3}-i$

b) $-\sqrt{3}+i$

c) $\dfrac{3}{\sqrt{3}+i}$

d) $\dfrac{1+i\sqrt{3}}{(1+i)^2}$

10. Expresa los siguientes números en la forma $a+ib$:

a) $(-1+i\sqrt{3})^{11}$

b) $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^5$

c) $\left(\dfrac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^6$

d) $(-\sqrt{3}+i)^{13}$

11. Probar la veracidad de las siguientes afirmaciones sobre números complejos:

a) $|1-\bar{z}w|^2-|z-w|^2=(1-|z|^2)(1-|w|^2)$

b) $\big||z|-|w|\big|=|z-w|$

c) $|z-w|\leq|1-\bar{z}w|$

d) $|z-w|=|1-\bar{z}w|$

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre *módulos* de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.

12. Resuélvanse las siguientes ecuaciones entre números complejos:

a) $|z|-z=1+2i$

b) $|z|+z=2+i$

c) $\bar{z}=z^2$

d) $z^3=1+i$

e) $z^4=i$

f) $z^3=-1+i\sqrt{3}$

g) $z^8=1$

13. Encuentre los vértices de un polígono regular de n lados si su centro se encuentra en el punto $z=0$ y uno de sus vértices z_1 es conocido.

14. Resolver la ecuación cuadrática $az^2 + bz + c = 0$, donde a, b, c, son números complejos conocidos y $a \neq 0$.

15. Calcular las siguientes raíces:

    a) $\sqrt[4]{16}$

    b) $\sqrt[6]{1+i}$

    c) $\sqrt[3]{-27}$