Ejercicios de Matemáticas I

Relación 1b: Funciones reales de variable real. Continuidad y límite funcional

1. Estúdiese la continuidad y el comportamiento en $+\infty$ y en $-\infty$ de la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

   a) $f(x)=\dfrac{x}{1+|x|},\ \ \forall x\in\mathbb{R}.$

   b) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{1+e^{1/x}} & \text{si} \quad x\neq 0\\ 0 & \text{si} \quad x=0\end{cases}$

   c) $f(x)=\begin{cases}\frac{e^x}{x} & \text{si} \quad x<0\\ x & \text{si} \quad 0\leq x<1\\ \sqrt[5]{x} & \text{si} \quad x\geq 1\end{cases}$

2. Dése un ejemplo de función ...

   a) continua cuya imagen no es un intervalo.

   b) no continua en un intervalo y cuya imagen es un intervalo.

   c) continua en $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un intervalo acotado.

   d) continua en $[0,1[$ cuya imagen no es acotada.

   e) continua en un intervalo abierto acotado cuya imagen es un intervalo cerrado y acotado.

3. Pruébese que todo polinomio de grado impar admite al menos una raíz real.

4. Sean $P,Q:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ dos funciones polinómicas. Estudiar el comportamiento en $+\infty$ y $-\infty$ de la función racional $\dfrac{P}{Q}$.

5. Sea P un polinomio de grado n tal que el término independiente y el coeficiente líder tienen signo opuesto. Pruébese que P tiene al menos una raíz positiva.

6. Probar que existe un número real positivo x tal que

$$\ln x+\sqrt{x}=0.$$

7. Probar que que la ecuación $\operatorname{tg} x = x$ tiene infinitas soluciones.

8. Probar que la ecuación
$$x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$$
tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

9. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:
$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$
Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

10. Sea $f :]0,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \left(\frac{1}{\tan x}\right)^{\operatorname{sen} x}, \quad \forall x \in]0,\pi/2[.$$
Probar que f tiene límite en 0 y $\pi/2$ y calcular dichos límites.

11. Sea $f :]0,\pi/2[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = (1+\operatorname{sen} x)^{\cot x}, \quad \forall x \in]0,\pi/2[.$$
Estudiar el comportamiento de f en 0 y $\pi/2$.

12. Sea $f : \mathbb{R}^+\backslash\{e\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = x^{\frac{1}{\ln x - 1}}, \quad \forall x \in \mathbb{R}^+\backslash\{e\}.$$
Estudiar el comportamiento de f en 0, e y $+\infty$.

13. Sea $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ una función continua en $[0,1]$. Pruébese que f tiene un punto fijo, es decir, que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

14. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, pruébese que, en cualquier instante, existen dos puntos antípodas sobre el Ecuador que se hallan a la misma temperatura.

15. Un escalador comienza, desde su campamento base, a subir a una montaña el Sábado a las 7 horas, alcanzando la cima a las 8 de la tarde. A las 7 horas del Domingo inicia el descenso hacia el campamento base tardando el mismo tiempo que le costó la subida. Demostrar que existe una determinada hora, a lo largo del Domingo, en la que el escalador se encuentra exactamente a la misma altura que a esa misma hora del Sábado.

16. Un corredor recorre 6 Km. en 30 minutos. Pruébese que existe un intervalo de 5 minutos a lo largo del cual el corredor recorre exactamente 1 kilómetro.