Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Matemáticas I

Inducción matemática

1. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifican las igualdades siguientes.

   a) $a + (a+b) + (a+2b) + (a+3b) + \cdots + (a+nb) = (n+1)a + b\dfrac{n(n+1)}{2}$ donde $a, b \in \mathbb{R}$.

   b) $1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n = \dfrac{x^{n+1}-1}{x-1}, \quad (x \neq 1)$.

   c) $1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

   d) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = \dfrac{n^2(n+1)^2}{4}$.

   e) $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + n \cdot (n+1) = \dfrac{n(n+1)(n+2)}{3}$.

   f) $\dfrac{1}{1 \cdot 3} + \dfrac{1}{3 \cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)\cdot(2n+1)} = \dfrac{n}{2n+1}$.

   g) $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

2. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifican las desigualdades siguientes.

   a) $\sqrt{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \dfrac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$

   b) $1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{5} + \cdots + \dfrac{1}{2^n} \geqslant 1 + \dfrac{n}{2}$

   c) $\dfrac{1}{2\sqrt{n}} \leqslant \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{1+3n}}$.

   d) $\dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \cdots \cdot (2n)}{5 \cdot 7 \cdot 9 \cdots (2n+3)} < \dfrac{2}{(n+1)\sqrt{2n+4}}$.

3. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $3^n - 1$ es divisible por 2.

4. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que $n^5 - n$ es divisible por 5.

5. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que para todo número natural $n \in \mathbb{N}$ se verifica que

$$\frac{n^5}{5} + \frac{n^4}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n}{30}$$

   es un número natural.

6. Demuestra que cualquier conjunto finito no vacío de número reales tiene máximo y mínimo.

7. Teorema del mapa de dos colores: si se traza en una hoja de papel líneas rectas que empiezan y terminan en un borde de la hoja, este mapa puede ser coloreado con sólo dos colores sin que ninguna región adyacente tenga el mismo color.

8. Concluida la primera vuelta de la liga de un país con gran afición al fútbol, se observa que no se ha producido ningún empate. Probar que puede hacerse una lista de todos los equipos participantes, de forma que cada equipo de la lista haya ganado el partido que jugó contra el siguiente en la lista.

9. Prueba que la suma de los cubos de tres números naturales consecutivos cualesquiera es múltiplo de 9.

10. Prueba, usando el principio de inducción matemática, que todo número natural $n \geqslant 8$ puede escribirse en la forma $n = 3p + 5q$ donde $p, q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

11. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad $2^n > 2n + 1$?

12. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad $2^n > n^2$?

13. Supongamos que $a > -1$. Prueba que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad $(1+a)^n \geqslant an+1$. ¿Para qué valores de $n \in \mathbb{N}$ es dicha desigualdad estricta?.

14. Prueba que si el producto de n números positivos es igual a 1 entonces su suma es mayor o igual que n. ¿Cuándo se da la igualdad?

15. Desigualdad de las medias. Deduce del ejercicio anterior que si $a_1, a_2, \dots, a_n$ son números positivos se verifica que:
$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{2}$$
Y en la desigualdad anterior se da la igualdad si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

16. Usa la desigualdad de las medias para probar que el cubo es el ortoedro de máximo volumen para una superficie lateral dada y de mínima superficie lateral para un volumen dado.

17. Usa la desigualdad de las medias para calcular el área del rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, donde $a > 0,\ b > 0$.

18. Usa la desigualdad de las medias para probar que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

    Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados del triángulo y $p = (a + b + c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área, A, viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.