

Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Matemáticas I

Sucesiones

1. Calcula los límites de las sucesiones:

$$x_n = n^2 \left(\frac{n+1}{3n} \right)^n.$$

$$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0).$$

$$x_n = \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} - 2\sqrt{n}.$$

$$x_n = \sqrt{n^2 + 3n + 2} - n.$$

$$x_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k+n^2}}.$$

$$x_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}.$$

$$x_n = \sqrt{n} \left(\sqrt[4]{4n^2 + 3} - \sqrt{2n} \right).$$

$$x_n = \frac{n+1}{n^2+1} + \frac{n+2}{n^2+2} + \dots + \frac{n+n}{n^2+n}.$$

$$x_n = \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n \right) \left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n} \right).$$

$$x_n = \sqrt[8]{n^2 + 1} - \sqrt[4]{n+1}.$$

$$x_n = \left(\sqrt[5]{n+1} - \sqrt[5]{n} \right) \sqrt{n}.$$

$$x_n = n \left(\sqrt[5]{\frac{3n+12}{3n+7}} - 1 \right).$$

2. Calcula los límites de las sucesiones:

$$x_n = \frac{1^3 + 3^3 + 5^3 + \dots + (2n-1)^3}{n^4}$$

$$x_n = \left(\frac{\log(n+1)}{\log n} \right)^{n \log n}$$

$$x_n = \frac{\sqrt{1} + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \dots + \sqrt{n}}{\sqrt{n^3}}$$

$$x_n = \frac{1 + 2\sqrt{2} + 3\sqrt{3} + \dots + n\sqrt{n}}{n^2 \sqrt{n}}$$

$$x_n = \left(\frac{2\sqrt[n]{3} + 3\sqrt[n]{2}}{5} \right)^n$$

$$x_n = \left(1 + \log \frac{n^2 + 1}{n^2 + n + 1} \right)^n$$

$$x_n = \frac{1}{n^2} \left(\frac{2}{1} + \frac{3^2}{2} + \frac{4^3}{3^2} + \dots + \frac{(n+1)^n}{n^{n-1}} \right)$$

$$x_n = \sqrt[n]{\frac{(3n)!}{(5n)^{3n}}}$$

$$x_n = \frac{e + e^{1/2} + e^{1/3} + \dots + e^{1/n} - n}{\log n}$$

$$x_n = n \frac{\arctg(1/n) - \operatorname{sen}(1/n)}{1 - \cos(1/n)}$$

3. Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow I$ una función verificando que f es estrictamente creciente en I y $f(I) \subset I$. Sea $a \in I$ y definamos una sucesión $\{x_n\}$ por $x_1 = a$ y $x_{n+1} = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que si $x_1 < x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente creciente y si $x_1 > x_2$ la sucesión $\{x_n\}$ es estrictamente decreciente.

4. Usa el resultado del ejercicio anterior para estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones:

a) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{x_n + 1}.$

b) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{-x_n + 1}{x_n - 2}.$

c) $x_1 = 1, \quad x_{n+1} = \frac{5x_n + 7}{x_n + 5}.$

d) $x_1 = a > 0, \quad x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3} \quad (a \neq 3).$