Grado en Ingeniería Civil – Ejercicios de Matemáticas I

1. Estudia la convergencia de las siguientes series.

$$(1)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{2n+\sqrt{n}}{n^3+2\sqrt{n}}\qquad (2)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2}{\mathrm{e}^n+1}\qquad (3)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(n+2)!}$$

$$(4)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n^2+2}{2n^3+6n-5}\qquad (5)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{3^{\ln n}}\qquad (6)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n(n!)^2}{(2n)!}$$

$$(7)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{n^n}\qquad (8)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)^{2n^3-2n}\qquad (9)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\operatorname{arc\,tg}(n^3)}{1+n^2}$$

$$(10)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\cos(n^2)+2}{\sqrt{n+1}}\qquad (11)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\left(\frac{n^2+2n+3}{n^2+2n}\right)\qquad (12)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

$$(13)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\qquad (14)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n}\qquad (15)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(n+1)(n+2)\cdots(2n+1)}$$

$$(16)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n^3\ln(n+1)}\qquad (17)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-\mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}\right)\qquad (18)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{-n^2}$$

$$(19)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{((3n!))^2}{4^{6n}(n!)^6}\qquad (20)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{n!}{(2n)^n}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n^2}\qquad (21)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}$$

$$(22)\ \sum_{n\geqslant 1}a^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}\qquad (23)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{((n+2)!)^3}{(n+1)^{3n}}9^n\qquad (24)\ \sum_{n\geqslant 1}\sqrt{\frac{4\cdot 6\cdot 8\ldots(2n+2)}{9\cdot 11\cdot 13\ldots(2n+7)}}$$

$$(25)\ \sum_{n\geqslant 2}\frac{\sqrt{n}+\ln n}{\sqrt{n^3}(\ln n)^2}\qquad (26)\ \sum_{n\geqslant 1}\ln\left(n\operatorname{sen}\frac{1}{n}\right)\qquad (27)\ \sum_{n\geqslant 1}\left(1+\ln\frac{3n^2+1}{3n^2+n+7}\right)^{2n^2}$$

2. Estudia la convergencia y la convergencia absoluta de las siguientes series.

$$(1)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{n^n}{3^n n!}\qquad (2)\ \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+1}+(-1)^n}\qquad (3)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{n^a}\,(a\in\mathbb{R})$$

$$(4)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n}{n}\qquad (5)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt[3]{n}}\qquad (6)\ \sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\frac{\sqrt{n}}{n\sqrt{n}+1}$$

3. Calcula el límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{1+\ln(1+x^2)-\cos x}{x^2}$$

Y usa el resultado obtenido para estudiar la convergencia de la serie:

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(1+\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)-\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

4. Para cada una de las series de potencias:

$$\sum_{n\geqslant 1}nx^n,\quad \sum_{n\geqslant 1}n^2x^n,\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n,\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n}$$

a) Calcula el intervalo de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del mismo.

b) Calcula la función suma de la serie.

c) Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

5. Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

   a) Calcula el intervalo de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del mismo.

   b) Calcula a función suma de la serie.

   c) Calcula la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n-1)}$.

6. Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$.

   a) Calcula el intervalo de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del mismo.

   b) Calcula a función suma de la serie.

7. Sea la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{n}}{n(n+2)}$.

   a) Calcula el intervalo de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del mismo.

   b) Calcula a función suma de la serie.

8. Para cada una de las series de potencias:

$$\sum_{n\geqslant 0}\left(2^{n+1}-n\right)x^n,\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(n^2+\frac{1}{n}\right)(x-1)^n,\quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n(x-2)^n}{n},\quad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{(-1)^n}{(n+1)2^n}-\frac{n}{3^n}\right)x^n$$

   a) Calcula el intervalo de convergencia y estudia la convergencia en los extremos del mismo.

   b) Calcula la función suma de la serie.

9. Expresa mediante la suma de una serie de potencias centrada en $x=0$ las funciones:

$$f(x)=\ln(x^2+4),\quad g(x)=\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right),\quad h(x)=\frac{x^2-3x+1}{x^2-5x+6}$$

   Indica en cada caso el intervalo en que dichas series convergen. Utiliza la serie que representa a la función g para obtener la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}$.