Ejercicios de Matemáticas I
Relación 8: Cálculo integral en varias variables

1. Calcúlense las siguientes integrales:

   a) $\int_I \operatorname{sen}^2 x \operatorname{sen}^2 y \, d(x,y), \ I = [0,\pi] \times [0,\pi].$

   b) $\int_I \frac{x^2}{1+y^2} \, d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   c) $\int_I y \ \ln x \, d(x,y), \ I = [1,e] \times [1,e].$

   d) $\int_I x^3 \, y^3 \, d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   e) $\int_I \frac{1}{(1+x+y)^2} \, d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,1].$

   f) $\int_I \frac{1}{(1+x+y+z)^3} \, d(x,y,z), \ I = [0,1] \times [0,1] \times [0,1].$

   g) $\int_I x \ \ln(xy) \, d(x,y), \ I = [2,3] \times [1,2].$

   h) $\int_I y \ \cos(xy) \, d(x,y), \ I = [0,1] \times [0,\pi].$

   i) $\int_I |\cos(x+y)| \, d(x,y), \ I = [0,\pi] \times [0,\pi].$

   j) $\int_I E(x+y) \, d(x,y), \ I = [0,2] \times [0,2].$

2. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$. Calcúlese su integral en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = 1 - x - y$, $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : \ x+y \leq 1\}$.

   b) $f(x,y) = x+y$, $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] : \ x^2 \leq y \leq 2x^2\}$.

   c) $f(x,y) = \frac{y}{x^2}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ 0 \leq x \leq 1, \ 0 \leq y \leq x\}$.

   d) $f(x,y) = 1$, siendo A la región limitada por $y^2 = x^3, \ y = x$.

   e) $f(x,y) = x^2$, siendo A la región limitada por $xy = 16, \ y = x, \ y = 0, \ x = 8$.

   f) $f(x,y) = x$, siendo A el triángulo de vértices $(0,0), (1,1), (0,1)$.

   g) $f(x,y) = x$, siendo A la región limitada por la recta que pasa por $(0,2)$ y $(2,0)$ y la circunferencia de centro $(0,1)$ y radio 1.

   h) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$, siendo A la región limitada por $y^2 = x, \ x = 0, \ y = 1$.

   i) $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$, siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}, \ y = x$.

   j) $f(x,y) = xy^2$, siendo A la región limitada por $y^2 = 2x, \ x = 1$.

k) $f(x,y) = xy$, siendo A la región limitada por la semicircunferencia superior $(x-2)^2 + y^2 = 1$ y el eje OX.

l) $f(x,y) = 4 - y^2$, siendo A la región limitada por $y^2 = 2x,\ y^2 = 8 - 2x$

m) $f(x,y) = e^{x^2}$, siendo el conjunto A el triángulo formado por las rectas $2y = x,\ x = 2$ y el eje OX.

3. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x,y) \in [0,1] \times [0,1] :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

b) $f(x,y) = y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq r^2\}$

c) $f(x,y) = 1$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x^2 + y^2 \leq 2x\}$

d) $f(x,y) = \cos(x^2 + y^2)$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq \pi/2\}$

e) $f(x,y) = \dfrac{1}{(1 + x^2 + y^2)^2}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

f) $f(x,y) = \dfrac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

g) $f(x,y) = x\,y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 2\}$

h) $f(x,y) = x^2\,y$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4,\ x \geq 0\}$

i) $f(x,y) = x$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x^2 + y^2 - 2x \geq 0\}$

j) $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \overline{B}((0,0),1)$

k) $f(x,y) = y$, $A = \{(x,y) \in \overline{B}((\frac{1}{2},0),\frac{1}{2}) :\ y \geq 0\}$

l) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = \overline{B}((1,0),1)$

m) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

n) $f(x,y) = x$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2x\}$

ñ) $f(x,y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x,y \geq 0\}$

o) $f(x,y) = e^{\frac{x}{y}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ y^3 \leq x \leq y^2,\ \ x \geq 0, y \geq 0\}$

p) $f(x,y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x \leq y,\ x + y \geq 1,\ x^2 + y^2 \leq 1\}$

q) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ (x^2 + y^2)^2 \leq 4(x^2 - y^2),\ x \geq 0\}$

r) $f(x,y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2 + y^2 \leq 2y,\ x^2 + y^2 \leq 1,\ x \geq 0\}$

4. Calcúlese el volumen de la región A definida por:

a) $A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 :\ x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2,\ \ x^2 + y^2 - ry \leq 0\},\ r > 0.$

b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\geq 1,\ \ x^2+y^2\leq 2,\ \ z(x^2+y^2)\leq 1,\ \ z\geq 0\}$.

c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z^2\leq x^2+y^2\leq z\}$.

d) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq 1-(x^2+y^2)\}$.

e) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq r^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2rz\},\ r>0$.

f) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 0\leq z\leq x^2+y^2,\ x+y\leq 1, x\geq 0,\ y\geq 0\}$.

5. Calcúlense las siguientes integrales triples:

a) $f(x,y,z)=z\,e^{-(x^2+y^2)},\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ 2(x^2+y^2)\leq z^2,\ 0\leq z\leq 1\}$.

b) $\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 4\}$

c) $f(x,y,z)=x+y-2z,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ z^2\geq x^2+y^2,\ 0\leq z\leq 3\}$.

d) $\int_A \left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)^n d(x,y,z),\ \ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \ x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$ $(n\in\mathbb{N},\ a\in\mathbb{R}^+)$

e) $\int_A (x+y+z)^2\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: x^2+y^2+z^2\leq 1, x^2+y^2+z^2\leq 2z\}$

f) $\int_A z\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2\leq z^2, 0\leq z\leq 1\}$

g) $\int_A x^2\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x\geq 0,\ x^2+y^2+(z-1)^2\leq 1,\ 4z^2\geq 3(x^2+y^2)\}$

h) $\int_A zy\sqrt{x^2+y^2}\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3: 0\leq z\leq x^2+y^2,\ 0\leq y\leq \sqrt{2x-x^2}\}$

i) $\int_A z\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq 2,\ x^2+y^2\leq z\}$

j) $\int_A z^2\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+y^2+z^2\leq R^2,\ x^2+y^2+z^2\leq 2Rz\}$ $(R>0)$

k) $\int_A \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,d(x,y,z),\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ \sqrt{x^2+y^2}\leq z\leq 3\}$

6. Demuéstrese que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-ax^2}{2}}\,dx=\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$, donde $a>0$.

7. Calcúlese $\int_A f$ en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\}$

b) $f(x,y)=1,\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \dfrac{x^2}{4}+y^2\leq 1,\ x^2\leq y\}$

c) $f(x,y,z)=z,\ A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:\ x^2+\dfrac{y^2}{4}+\dfrac{z^2}{9}\leq 1,\ z\geq 0\}$

d) $f(x,y)=e^{\frac{y-x}{y+x}},\ A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ x,y\geq 0,\ x+y\leq 2\}$