Ejercicios de Matemáticas I
Relación 5: Diferenciación en varias variables

1. Calcúlese el vector gradiente de la función f en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y,\ \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   b) $f(x,y) = \operatorname{sen}(x \operatorname{sen} y), \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$.

   c) $f(x,y,z) = x^{y+z},\ \forall x \in \mathbb{R}^+, y,z \in \mathbb{R}$.

   d) $f(x,y,z) = (x+y)^z,\ \forall x,y \in \mathbb{R}^+, z \in \mathbb{R}$.

2. Encontrar la derivada direccional de f en a según la dirección v en los siguientes casos:

   a) $f(x,y) = xy^2$, $a = (2,1)$, $v = (2/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$.

   b) $f(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3$, $a = (1,1,0)$, $v = (0,0,1)$.

3. Determinar la dirección respecto de la cual, la derivada direccional de la función $f(x,y,z) = xy^2 + yz + x^2z^2$ en el punto $(1,2,-1)$, tenga un valor máximo.

4. Sea $f : \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}$. Calcular en el punto $(2,3)$ la derivada según la dirección dada por la recta $y = \dfrac{2}{3}x$ y el valor máximo de la derivada direccional.

5. Calcúlese el plano tangente a las siguientes superficies en el punto que se indica:

   a) $z = \ln(1 + x^2 + y^2)$, en $(0,0,0)$.

   b) $z^2 + 3x - x^2 - y^2 = 2$, en $(1,1,1)$.

   c) $x^3 + y^3 + z^3 + xyz - 6 = 0$, en $(1,2,-1)$.

   d) $z = \operatorname{sen} x \ \operatorname{sen} y$, en $(\pi/2, \pi/4, \sqrt{2}/2)$.

6. Sean $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ y $g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$, definidas por

$$f(x,y) = (x^2, y^2, x - y)\ ,\ \ g(x,y,z) = x^2 + 2y - z.$$

   Definimos $h = g \circ f$. Calcular $Dh(1,-1)$.

7. Sean $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ y $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, definidas por

$$f(x,y,z) = (\operatorname{sen}(xy+z), (1+x^2)^{yz})\ ,\ \ g(u,v) = (u + e^v, v + e^u).$$

a) Calcular $Df(1,-1,1)$.

b) Calcular $Dg(0,\frac{1}{2})$.

c) Calcular $D(g\circ f)(1,-1,1)$.

8. Sea $f:\mathbb{R}^2\longrightarrow\mathbb{R}$ una función diferenciable. Sea $h:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por $h(x,y,z)=f(x^2+2yz,y^2+2xz),\forall(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$. Probar que:

$$(y^2-xz)\frac{\partial h}{\partial x}+(x^2-yz)\frac{\partial h}{\partial y}+(z^2-xy)\frac{\partial h}{\partial z}=0.$$

9. Calcular $\dfrac{\partial F}{\partial x}$ y $\dfrac{\partial F}{\partial y}$ de la función $F(u,v)=u^2+3uv+4v^2$, siendo $u=2-2xy^2$, $v=1+x$:

   a) Mediante la regla de la cadena.

   b) Sustituyendo u y v por sus valores.

10. Sean $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ derivables. Se define la función de dos variables $z(x,y)=x^2yf(u)+xy^2g(v)$, con $u=\dfrac{x}{y}$, $v=\dfrac{y}{x}$. Calcular $x\,\dfrac{\partial z}{\partial x}(x,y)+y\,\dfrac{\partial z}{\partial y}(x,y)$.

11. Calcular las derivadas parciales de segundo orden de las siguientes funciones:

    a) $f(x,y)=\operatorname{sen}\big(x\operatorname{sen}y\big)$

    b) $g(x,y,z)=x^{y+z}$

    c) $h(x,y,z)=(x+y)^z$

12. Una función f se dice que es **armónica** en un abierto $\Omega\subseteq\mathbb{R}^2$ si

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)+\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=0$$

en todo punto $(x,y)\in\Omega$. ¿Son armónicas las siguientes funciones?

   a) $f(x,y)=\operatorname{arc\,tg}\left(\dfrac{x}{y}\right)$, $\Omega=\mathbb{R}^2\backslash\{(x,0):\ x\in\mathbb{R}\}$.

   b) $g(x,y)=e^{-x}\cos y+e^{-y}\cos x$, $\Omega=\mathbb{R}^2$.

   c) $h(x,y)=\dfrac{e^{x+y}}{x^2+y^2}$, $\Omega=\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$.

13. Calcular los extremos relativos de las siguientes funciones. Estudiar si dichos extremos son absolutos o no lo son.

    a) $f(x,y)=x^3+3xy^2-15x-12y$.

b) $f(x,y) = x^4 + 2x^2y - x^2 + 3y^2$.

c) $f(x,y) = \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y + \cos(x+y),\ 0 < x < 2\pi,\ 0 < y < 2\pi$.

d) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3x - 12y + 20$.

e) $f(x,y) = (x-1)^4 + (x-y)^4$.

f) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4a^2xy \quad (a > 0)$.

g) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x^2+y^2+1}$.

h) $f(x,y) = (x^2+2y^2)e^{-(x^2+y^2)}$.

i) $f(x,y) = \operatorname{sen}(xy)$.

j) $f(x,y) = 2x^4 + y^2 - 3xy^2$.

k) $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + 3z^2 + yz + 2xz - xy$.

l) $f(x,y,z) = xy + xz + yz$.

m) $f(x,y,z) = (x+z^2)e^{x(y^2+z^2+1)}$.

14. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = x^2 + y^2 - 2ax - 2by$. Estudiar la existencia de extremos relativos de f en función de los parámetros a y b.

15. Sean $a,b \in \mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = e^{ax+y^2} + b\ \operatorname{sen}(x^2+y^2)$. Discutir los valores de a y b para que f tenga un extremo relativo en $(0,0)$.

16. Encuéntrense los puntos donde la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = x^2 + y^2 - xy - x - y$$

alcanza sus extremos absolutos, siendo

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x,y \geq 0,\ x+y \leq 3\}.$$

17. Encuéntrense los puntos del conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x^2+y^2 \leq 2x,\ y \geq 0\}$ donde la función $f(x,y) = x^2 - 2xy + y^2$ alcanza su máximo y mínimo absolutos.

18. Calcular los máximos y mínimos absolutos de la función $f(x,y) = x^2 - xy + y^2 + 1$ en la placa triangular cerrada y acotada por las rectas $x = 0$, $y = 4$, $y = x$.

19. Una placa circular plana tiene la forma del disco $x^2 + y^2 \leq 1$. La placa, incluyendo el borde, se calienta de manera que la temperatura en un punto (x,y) es

$$T(x,y) = x^2 + 2y^2 - x.$$

Determinar los puntos con mayor y menor temperatura de la placa, así como la temperatura en cada uno de ellos.

20. Determínese el punto $P(x,y,z)$ en el plano $2x+y-z=5$ que está más cerca del origen.

21. Calcúlese la distancia mínima del origen a la superficie de $\mathbb{R}^3$ dada por la ecuación $x^2-z^2-1=0$

22. Hállense dos números reales cuya suma de cuadrados sea 18 y la suma de sus cubos sea máxima. Hágase lo mismo con tres números reales con suma de cuadrados 12.

23. Se trata de montar un radiotelescopio en un planeta recién descubierto. Para minimizar la interferencia se desea emplazarlo donde el campo magnético del planeta sea más débil (aunque por supuesto, en la superficie). El planeta es esférico, con un radio de 6 unidades; la fuerza del campo magnético viene dada por

$$M(x,y,z)=6x-y^2+xz+60$$

basado en un sistema coordenado cuyo origen está en el centro del planeta. ¿Dónde habrá de ser ubicado el radiotelescopio?.

24. Determínese el rectángulo de mayor área que se puede inscribir en la elipse $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, donde a,b son reales positivos.

25. Hállese la mínima distancia entre la recta $x+y=4$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$.

26. Hallar la mínima distancia entre la recta $x+y=4$ y la circunferencia $x^2+y^2=1$.

27. Hállense los extremos condicionados de la función $f(x,y)=x^3+xy^2$ donde $xy-a^2=0,\ \ (a\neq 0)$.

28. Calcular el mínimo relativo de $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ condicionado a que

$$2x+y+z=2\ ,\ \ x-y-3z=4.$$

Dar una interpretación geométrica del resultado.

29. Estudiar los extremos condicionados de $f(x,y,z)=x^2+2y^2+6z^2-4xy-12z$ con condiciones:

$$x-y=0\ ,\ \ x-z+3=0.$$

30. Hallar los extremos relativos de la función $f(x,y,u,v)=x^2+y^2$ con las condiciones:

$$x^2+u^2+v^2-4=0\ ,\ \ y^2+2u^2+3v^2-9=0.$$

31. El área de una caja rectangular sin tapa es de $108u^2$. Hállese que dimensiones debe tener para que conseguir el máximo volumen.

32. Calcular los valores máximo y mínimo de la función $f(x,y,z) = xyz$ cuando el punto (x,y,z) pertenece a la curva definida por la intersección del plano $x+y+z=0$ y la esfera $x^2+y^2+z^2-1=0$.

33. El plano $x+y+z=24$ corta al paraboloide $z=x^2+y^2$ en una elipse. Calcula los puntos más altos y más bajos de dicha elipse.