Ejercicios de Matemáticas I
Relación 7: Cálculo integral en una variable

1. Calcúlense las siguientes primitivas:

$$\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,dx \qquad \int x\sqrt{3-x^2}\,dx \qquad \int \frac{\sqrt[3]{1+\ln x}}{x}\,dx$$

$$\int (\operatorname{arc\,sen} x)^2\,dx \qquad \int \cos x\,\ln(\operatorname{sen} x)\,dx \qquad \int \operatorname{arctg} x\,dx$$

$$\int \ln(x+\sqrt{1+x^2})\,dx \qquad \int \cos^2(\ln x)\,dx \qquad \int \frac{\operatorname{arc\,sen}\sqrt{x}}{\sqrt{1-x}}\,dx$$

2. Pruébense las siguientes igualdades:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}}\,dx = 2 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}\,dx = 2 \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \frac{1}{\ln 2} \qquad \int_0^1 \ln x\,dx = -1$$

$$\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\cos(\beta x)\,dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \qquad \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x}\operatorname{sen}(\beta x)\,dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2}$$

$(\alpha \in \mathbb{R}^+,\ \beta \in \mathbb{R})$.

3. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x^4-1} \qquad \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3\,x^2+x+5}\,dx \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}$$

$$\int_3^4 \frac{2-x^2}{x^3-3x^2+2x}\,dx \qquad \int_2^{+\infty} \frac{x+2}{(x-1)(x+1)^2(x^2+1)(x^2+x+1)^2}\,dx \qquad \int_0^1 \frac{dx}{x^4+1}$$

4. Calcúlense las siguientes integrales:

a) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{2-\cos x}$

b) $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{dx}{\cos x+2\,\operatorname{sen} x+3}$

c) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{1-2\,\cos x}{3-4\,\cos x}\,dx$

d) $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx$ (sugerencia: utilizar el cambio $x = \arccos t$)

e) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \cos^3 x\,\operatorname{sen}^4 x\,dx$ (sugerencia: utilizar el cambio $x = \operatorname{arcsen} t$)

f) $\displaystyle\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx$ (sugerencia: utilizar el cambio $x = \arctan t$)

5. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\operatorname{senh} x} \qquad \int_0^{+\infty} \frac{dx}{e^x+1} \qquad \int_0^1 x \operatorname{senh} x\, dx$$

6. Calcúlense las siguientes integrales:

$$\int_2^{+\infty} \frac{dx}{(x-1)\sqrt{x^2-2x}} \qquad \int_8^{+\infty} \frac{dx}{x^2\sqrt{4+x^2}} \qquad \int_2^3 \frac{dx}{\sqrt{x^2-2}}$$

$$\int_1^{3/2} \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}} \qquad \int_0^1 x\sqrt{x^2+x+1}\, dx \qquad \int_1^3 \frac{dx}{x^2\sqrt{3+2x-x^2}}$$

7. Hállense las derivadas de cada una de las funciones siguientes:
   a) $F(x) = \int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\, dt$
   b) $F(x) = \int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$
   c) $F(x) = \int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$
   d) $F(x) = \int_a^b \frac{tx}{1+t^2+\operatorname{sen} t}\, dt$

8. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = e^{-x^2}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
   a) Sea $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$g(x) = \int_0^{\operatorname{sen} x} f(t)\, dt,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$
   Probar que g es derivable en todo $\mathbb{R}$ y calcular su derivada.
   b) Sea $h : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
   $$h(x) = \int_0^{\sqrt{x}} f(t)\, dt,\ \forall x \in \mathbb{R}_0^+.$$
   Estudiar la derivabilidad de h.

9. Encontrar todas las funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$ tales que
$$(f(x))^2 = \int_0^x \left[(f(t))^2 + (f'(t))^2\right] dt \ + \ 1$$

10. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo además $g(0) = 0$. Estudiar la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}\displaystyle\int_0^x \frac{g(t)}{t}\, dt & \text{si } \ x \neq 0 \\ g'(0) & \text{si } \ x = 0 \end{cases}$$
¿Es f de clase C^1?

Aplicaciones del cálculo integral

1. Calcular las siguientes áreas:

   a) Area limitada por las curvas $y = x^2$, $y^2 = 8x$.

   b) Area de los dos recintos delimitados por la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ y la recta $x + y = 1$.

   c) Area comprendida entre el eje de abcisas y la parábola de ecuación $y = 4x - x^2$.

   d) Area comprendida entre la parábola de ecuación $y^2 = 4x$ y la recta $y = 2x - 4$.

   e) Area limitada por $y = x\ e^{-x^2}$, el eje OX, la ordenada en el punto $x = 0$ y la ordenada en el máximo.

   f) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x - 1)(x - 2)$ y el eje OX.

   g) Area comprendida entre la curva $y = \tan x$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

   h) Area del recinto limitado por las rectas $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1 + x^2)^2}$.

   i) Area de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje OX.

2. Longitudes de curvas.

   a) Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4 + 48}{24x}$ en $[2, 4]$.

   b) Hallar la longitud de la curva $y = \ln(1 - x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

   c) Hallar la longitud de la *catenaria*. Dicha curva es la gráfica de la función $f : [-a, a] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{1}{2}a(e^{x/a} + e^{-x/a}),\ \forall x \in [-a, a] \quad (a > 0).$$

3. Volúmenes de sólidos de revolución.

   a) La curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, $x \in [0, \pi]$, gira en torno al eje OX determinando un sólido. Calcular su volumen.

   b) Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2 + 9}$.

   c) Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

      - alrededor del eje OX
      - alrededor del eje OY

   d) Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.