# Ejercicios de Matemáticas I
# Relación 6: Series de números reales. Series de potencias

1. Estúdiese la convergencia de las siguientes series de números reales:

$$a)\ \sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2},\ b)\ \sum\frac{n^n}{e^{n^2+1}},\ c)\ \sum\frac{2^n\, n!}{n^n},\ d)\ \sum\frac{(n!)^2}{(2n)!},$$

$$e)\ \sum\frac{2^n}{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)},\ f)\ \sum\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^3,\ g)\ \sum\ln\left(1+\frac{1}{n}\right),$$

$$h)\ \sum\ln\left(\frac{n^2+3}{n^2+2}\right),\ i)\ \sum\frac{\sqrt[3]{n}\,\ln n}{n^2+1},\ j)\ \sum\left(1-e^{-\frac{1}{n}}\right)^2,$$

$$k)\ \sum\frac{1}{n\ln n},\ l)\ \sum\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right),\ m)\ \sum\left[\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)-\operatorname{tg}\left(\frac{1}{n}\right)\right],$$

$$n)\ \sum\left[\frac{1}{n}-\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{n}\right)\right],\ \tilde{n})\ \sum\frac{1}{n2^n},\ o)\ \sum\frac{\ln n}{n},\ p)\ \sum\frac{2^n}{n},$$

$$q)\ \sum\frac{1}{n(\ln n)^2},\ r)\ \sum\frac{\sqrt[3]{n}}{(n+1)\sqrt{n}},\ s)\ \sum\frac{\ln(1+n^2)}{1+n^2},\ t)\ \sum\frac{n^{\ln n}}{(\ln n)^n}$$

$$u)\ \sum_{n\geq 2}\frac{n^n}{(n-1)^{n+2}},\ v)\ \sum\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n}},\ w)\ \sum\frac{\operatorname{arctg} n}{1+n^2},\ x)\ \sum\left[\cos\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3}$$

$$y)\ \sum\left[n\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\right]^{n^3},\ z)\ \sum\left[n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right]^{n^2}$$

2. Estudiar la convergencia de las siguientes series:

$a)\ \sum(-1)^n\left(\sqrt{n^2+1}-n\right)$

$b)\ \sum\dfrac{(-1)^n\, e^{-\frac{1}{n}}}{n}$

$c)\ \sum(-1)^n\,\dfrac{\ln n}{n}$

$d)\ \sum(-1)^n\dfrac{2n-1}{2^n}$

3. Calcular la suma de las siguientes series de números reales:

$a)\ \sum\dfrac{1}{n^2+2n}$

$b)\ \sum\dfrac{1}{n(n+1)(n+2)}$

$c)\ \sum\dfrac{1}{(n+1)\sqrt{n}+n\sqrt{n+1}}$

*d*) $\sum_{n\geq 0} \frac{2^{n+1}+3^{n+1}}{6^n}$

*e*) $\sum_{n\geq 2} \frac{\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\ln\left((n+1)^{\ln n}\right)}$

*f*) $\sum_{n\geq 1} \frac{(n-1)!}{(n+3)!}$

*g*) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+n+1}{n!}$

4. Hállese el radio de convergencia $R$ de cada una de las series de potencias que siguen y, en caso de que $R\in\mathbb{R}^+$ estúdiese el comportamiento de la serie en los puntos $R$ y $-R$:

   *a*) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n(2n+1)}\, x^n$

   *b*) $\sum_{n\geq 0} \frac{n!}{(n+1)^n}\, x^n$

   *c*) $\sum_{n\geq 0} \frac{1}{\ln(n+2)}\, x^n$

   *d*) $\sum_{n\geq 0} \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}\, x^n$

   *e*) $\sum_{n\geq 0} \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}\, x^n$

   *f*) $\sum_{n\geq 0} (n+1)^{\ln(n+1)}\, x^n$

5. Calcúlese el radio de convergencia y la suma de las series:

   *a*) $\sum_{n\geq 1} n\, x^n$

   *b*) $\sum_{n\geq 1} n^2\, x^n$

   *c*) $\sum_{n\geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n$

6. Encuéntrese, cuando ello sea posible, el desarrollo en serie de potencias centrado en el punto $a$ de la función $f$ en cada uno de los casos siguientes:

   *a*) $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\ f(x)=\frac{1}{1+x}\,,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\,;\ a=0.$

   *b*) $f:\mathbb{R}\backslash\{-1\}\longrightarrow\mathbb{R}\,,\ f(x)=\frac{x}{(1+x)^3}\,,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\backslash\{-1\}\,;\ a=0.$

*c*) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ a=0.$

*d*) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}^*\ ,\ f(0)=1\ ;\ a=0.$

*e*) $f:;]0,1[\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\dfrac{1}{x(x-1)}\ ,\ \forall x\ \in]0,1[\ ;\ a=\dfrac{1}{2}.$

*f*) $f:]-1,1[\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)\ ,\ \forall x\in]-1,1[\ ;\ a=0.$

*g*) $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}\ ,\ f(x)=\operatorname{senh}x\ ,\ \ \forall x\in\mathbb{R}\ ;\ a=0.$

7. Demuéstrese, usando el desarrollo en serie de Taylor de la función arcotangente, que

$$\frac{\pi}{4}=\arctan(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{2n+1}.$$