Ejercicios de Matemáticas I
Relación 2: Cálculo diferencial en una variable

1. Calcúlese la derivada de las siguientes funciones cuyas ley viene dada por:

   a) $f(x) = \operatorname{sen}(x+3)$.

   b) $f(x) = \cos^2(x^3)$.

   c) $f(x) = \dfrac{1}{\cos x}$.

   d) $f(x) = \sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.

   e) $f(x) = \sqrt{x^2+1}$.

   f) $f(x) = \left(\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt[5]{x}}\right)^5$.

   g) $f(x) = \cos(\cos(\cos x))$.

   h) $f(x) = x^4 e^x \ln x$.

   i) $f(x) = x^x$.

   j) $f(x) = \sqrt{x}^{\sqrt{x}}$.

2. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 40$ que es paralela al eje OX.

3. Calcúlese la tangente de la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto P en cada uno de los siguientes casos:

   a) $f(x) = x^2 + 1$, $P = (3, 10)$.

   b) $f(x) = \cos x$, $P = (\pi/2, 0)$.

   c) $f(x) = |x|$, $P = (1, 1)$.

   d) $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$, $P = (0, 0)$.

4. Dada una función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$, estúdiese la continuidad y la derivabilidad en cada uno de los siguientes casos:

   a) $A = [-1, 1]$ y $f(x) = \sqrt{1-x^2}$.

   b) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \sqrt[3]{|x|}$.

   c) $A = \mathbb{R}$ y $f(x) = \dfrac{2x}{1+|x|}$.

d) $A=\mathbb{R}_0^+,\ f(x)=\begin{cases} x^x & \text{si } x>0 \\ 1 & \text{si } x=0 \end{cases}$

5. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=x^2+\alpha x+\beta$. Encuéntrense los valores de α y β que hacen que el punto $(2,4)$ pertenezca a la gráfica de f y que la recta tangente a la misma en dicho punto sea la recta de ecuación $2x-y=0$.

6. Sean $a,b,c\in\mathbb{R}$ y $f,g:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definidas por

$$f(x)=x^2+ax+b,\ g(x)=x^3-c,\ \forall x\in\mathbb{R}.$$

   Determinar los valores de a,b,c que hacen que las gráficas de f y g pasen por el punto $(1,2)$ y tengan la misma recta tangente en dicho punto.

7. Sean $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ y $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} \alpha x+\beta & \text{si } x\leq 0 \\ x^2 & \text{si } x>0 \end{cases}$$

   Determinar para qué valores de α,β es f derivable en cero.

8. Probar que la función $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definida por

$$f(x)=\begin{cases} x & \text{si } x\in\mathbb{R}_0^- \\ \ln(1+x) & \text{si } x\in\mathbb{R}^+ \end{cases}$$

   es derivable en $\mathbb{R}$ y encontrar su función derivada.

9. Probar que $\operatorname{arcsen} x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2},\ \forall x\in[-1,1]$.

10. Demuéstrese que

$$1+x\leq e^x\leq 1+x\,e^x,\ \forall x\in\mathbb{R}$$

11. Demuéstrese que, para cada $x>0$, se verifica que

$$\frac{x}{1+x}<\ln(1+x)<x.$$

12. Demuéstrese que, para $x\in]0,\frac{\pi}{2}[$ se verifica que

$$\frac{2x}{\pi}<\operatorname{sen}x<x<\tan x\ ,\ \ \cos x>1-\frac{x^2}{2}.$$

13. Demuéstrese que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$|\operatorname{sen}(ax) - \operatorname{sen}(ay)| \leq |a||x-y|.$$

14. Demuéstrese que, para cada $x, y \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$|\arctan x - \arctan y| \leq |x-y|.$$

15. Sea $a > 0$. Pruébese que
$$\frac{ea}{x} \leq e^{\frac{a}{x}}, \quad \forall x > 0$$
y se da la igualdad si, y sólo si, $x = a$.

16. Sea $a > 0$ un número real que verifica
$$a^{\frac{x}{a}} \geq x, \quad \forall x > 0.$$
Pruébese que $a = e$.

17. Calcúlese el número de ceros y la imagen de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^6 - 3x^2 + 2$.

18. Calcúlese el número de soluciones de la ecuación $3\ln x - x = 0$.

19. Pruébese que para $0 < a < 1$ se verifica
$$(1+x)^a \leq 1 + ax, \;\; \forall x > -1.$$

20. Sea $a > 1$. Probar que la ecuación $x + e^{-x} = a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

21. Sean $a, b, c \in \mathbb{R}$ con $a^2 < 3b$. Pruébese que la ecuación
$$x^3 + ax^2 + bx + c = 0$$
tiene una solución real única.

22. Determínese el número de raíces reales de la ecuación
$$2x^3 - 3x^2 - 12x = m$$
según el valor de m.

23. Sea $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable en $\mathbb{R}^+$. Supongamos que f y f' tienen límite en $+\infty$. Pruébese que $\lim_{x \mapsto +\infty} f'(x) = 0$.

24. Sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un a función derivable, verificando que $f(0) = 0$ y que para cada $x \in [0,1]$, $|f'(x)| \leq |f(x)|$. Pruébese que $f(x) = 0$, $\forall x \in [0,1]$.

25. Estúdiese el comportamiento de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en el punto α en cada uno de los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{\operatorname{sen}(3x)}{x}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = 0.$

    b) $A = \mathbb{R} \backslash \{\pi/2 + k\pi, \ k \in \mathbb{Z}\}, \quad f(x) = \dfrac{2x - \pi}{\cos x}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = \pi/2.$

    c) $A = \mathbb{R} \backslash \{-2, 2\}, \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+5} - 3}{x^2 - 4}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = 2.$

    d) $A =]2, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{\sqrt{x} - \sqrt{2} + \sqrt{x-2}}{\sqrt{x^2 - 4}}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = 2.$

    e) $A = \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}, \quad f(x) = \dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = 1.$

    f) $A =]1, +\infty[, \quad f(x) = \dfrac{x^x - x}{1 - x - \ln x}, \quad \forall x \in A, \ \alpha = 1.$

    g) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \dfrac{1}{x}\left(e - (1+x)^{\frac{1}{x}}\right), \quad \alpha = 0.$

26. Estúdiese el comportamiento en el punto cero de la función $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ en los siguientes casos:

    a) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{\sqrt{x}}, \quad \forall x \in A.$

    b) $A = \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}, \quad \forall x \in A.$

    c) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (\operatorname{sen} x + \cos x)^{\frac{1}{x}}, \quad \forall x \in A.$

    d) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \left(\cos x + \dfrac{x^2}{2}\right)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$

    e) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = (1 - \tan x)^{\frac{1}{x^2}}, \quad \forall x \in A.$

    f) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = x^{\operatorname{sen} x}, \quad \forall x \in A.$

    g) $A =]0, \pi/2[, \quad f(x) = \dfrac{x - \arctan x}{\operatorname{sen}^3 x}, \quad \forall x \in A.$

27. Sea $f : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1 - \operatorname{sen} x) - 2\ln(\cos x)}{\operatorname{sen} x} & \text{si } x \neq 0 \\ a & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estúdiese para qué valor de a la función f es continua en cero.

28. Estúdiese el comportamiento en $+\infty$ de las funciones $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

    a) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = \dfrac{\ln(2+3e^x)}{\sqrt{2+3x^2}}, \qquad \forall x \in A.$

    b) $A = \mathbb{R}^+, \quad f(x) = (a^x + x)^{\frac{1}{x}}, \qquad \forall x \in A \quad (a > 0).$

    c) $A =]1, +\infty[\quad f(x) = \dfrac{x\left(x^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\ln x}, \qquad \forall x \in A.$

29. Encontrar los extremos relativos de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

    a) $f(x) = x^5 - 5\,x^4 + 5\,x^3 + 10$

    b) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3\,x + 2}{x^2 + 1}$

    c) $f(x) = \begin{cases} x\ \ln|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$

    d) $f(x) = \begin{cases} x^2\ \ln|x| & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = 0 \end{cases}.$

    e) $f(x) = \cosh x + \cos x.$

30. Una caja abierta está construida con un rectángulo de cartón, quitando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hállense las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse con ese procedimiento si el rectángulo tiene como lados **(a)** 10 y 10, **(b)** 12 y 18.

31. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcúlense las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

32. Se traza la tangente en un punto de la elipse $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ de forma que el segmento (de dicha tangente) interceptado por los ejes sea mínimo. Demuéstrese que la longitud de dicho segmento es 9 unidades.

33. Se inscribe un rectángulo en la elipse $\dfrac{x^2}{400}+\dfrac{y^2}{225}=1$ con sus lados paralelos a los ejes. Hállense las dimensiones del rectángulo para que **(a)** el área sea máxima, **(b)** el perímetro sea máximo.

34. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica sin suelo de un volumen determinado. Calcúlense sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

35. Demuéstrese que la suma de un número positivo y su inverso es mayor o igual a 2.

36. Se proyecta un jardín de forma de sector circular de radio R y ángulo central θ. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro que bordea el jardín?.

37. Un triángulo rectángulo cuya hipotenusa tiene una longitud a se hace girar alrededor de uno de sus catetos. ¿Qué volumen máximo puede tener un cono engendrado de esta manera?.

38. Una persona desea cortar un pedazo de alambre de 1 m. de largo en dos trozos. Uno de ellos se va a doblar en forma de circunferencia, y el otro en forma de cuadrado. ¿Cómo debe cortar el alambre para que la suma de áreas sea mínima?.

39. Un muro de 4 metros de altura está a 3 metros de la fachada de una casa. Hallar la escalera más corta que llegará desde el suelo hasta la casa por encima del muro.

40. Demuéstrese que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

41. ¿Cuál es la longitud de la barra más larga que puede hacerse pasar horizontalmente a través de la esquina, en ángulo recto, que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b?

42. Un cultivador de naranjas estima que, si planta 60 naranjos, obtendrá una cosecha media de 400 naranjas por árbol. Este número bajará 4 unidades por cada árbol más que se plante en el mismo terreno. Hállese el número de árboles que hace máxima la cosecha.

43. Durante la tos, el diámetro de la tráquea disminuye. La velocidad v del aire en la tráquea durante la tos se relaciona con el radio, r, mediante la ecuación $v=Ar^2(r_0-r)$, donde A es una constante y r_0 es el radio en estado de relajación.

Determínese el radio de la tráquea cuando la velocidad es máxima, así como esta velocidad.

44. Una fábrica de plásticos recibe del Ayuntamiento de la ciudad un pedido de 8.000 tablas flotadoras para el programa de natación del verano. La fábrica posee 10 máquinas, cada una de las cuales produce 50 tablas por hora. El coste de preparar las máquinas para hacer el trabajo es de 800 EUROS por máquina. Una vez que las máquinas están preparadas, la operación es automática y puede ser supervisada por una sóla persona, que gana 35 EUROS/hora.

    a) ¿Cuántas máquinas hay que usar para minimizar el coste de producción?

    b) Si se usa el número óptimo de máquinas, ¿cuánto ganará el supervisor durante el proceso?

45. Las palomas domésticas no suelen volar sobre extensiones grandes de agua a menos que se vean forzadas a ello, posiblemente porque se requiera más energía para mantener la altitud sobre el agua fría. Supongamos que se suelta una paloma desde un barco situado a 3 km de la costa, siendo A el punto costero más cercano. El palomar se encuentra en un punto de la costa situado a 10 km de A. Si la paloma gasta dos veces más energía volando sobre el agua que sobre la tierra firme y sigue un camino que hace mínima la energía gastada, determínese el punto dónde la paloma abandona el agua.

46. Calcúlese, haciendo uso de un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-3} en cada uno de los casos siguientes:

    a) $\alpha = \sqrt{e}$

    b) $\alpha = \sqrt{102}$

    c) $\alpha = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{2}\right)$

47. Exprésese el polinomio $x^4 - 5x^3 - 3x^2 + 7x + 6$ en potencias de $x - 2$