Funciones elementales

Concepto de función. Sean A y B dos conjuntos. Una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un **único** elemento de B*. Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow B$$

Cuando $A \subset \mathbb{R}$ y $B = \mathbb{R}$, se llaman *funciones reales*. El conjunto A recibe el nombre de ***dominio*** de la función. Simbólicamente escribimos:

$$f : A \longrightarrow \mathbb{R}$$

para indicar que f es una función real definida en A.

Notación $f(x)$. Sea $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ una función real. Para cada $x \in A$ representamos $f(x)$ el **número** que se obtiene **evaluando** f en x.

No debe confundirse nunca una función f con uno de sus valores $f(x)$.

Criterio de igualdad para funciones. Dos funciones f y g son iguales ***cuando tienen igual dominio*** y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Dominio natural de una función. Cuando una función se define mediante una fórmula y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de $x \in \mathbb{R}$ para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Dicho conjunto es llamado ***dominio natural*** de la función.

Conjunto imagen de una función. Sea $f: A \to \mathbb{R}$. Sea $C \subset A$. El conjunto $\{f(x) : x \in C\}$ de todos los valores que toma f en C se llama la imagen de C por f y se representa por $f(C)$. El conjunto $f(A)$ suele llamarse *rango o recorrido de f*, o simplemente, *la **imagen*** de f.

Calcular el conjunto imagen de una función, es decir, todos los valores que dicha función toma, no es en general fácil de hacer. Se necesitan herramientas de Cálculo que veremos muy pronto.

Suma y producto de funciones. Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se define su *función suma* $f + g : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x).$$

Se define su *función producto* $fg : A \to \mathbb{R}$ como la función que a cada número $x \in A$ asigna el número real

$$(fg)(x) = f(x)g(x).$$

Composición de funciones. Supongamos que $f: A \to \mathbb{R}$ y $g: B \to \mathbb{R}$ son funciones verificando que $f(A) \subset B$. En tal caso, la función $h: A \to \mathbb{R}$ dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in A$ se llama *composición de g con f* y se representa por $h = g \circ f$.

Funciones inyectivas. Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$ es inyectiva en un conjunto $C \subset A$, si en puntos distintos de C toma valores distintos; es decir, si $x, y \in C$ y $x \neq y$, entonces se verifica que $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en A.

Función inversa de una función inyectiva. Si $f: A \to \mathbb{R}$ es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1}: f(A) \to \mathbb{R}$ que llamaremos *función inversa de f*, que a cada número $y \in f(A)$ asigna el único número $x \in A$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in A$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in f(A)$.

Funciones monótonas. Se dice que una función $f: A \to \mathbb{R}$ es **creciente** (resp. **decreciente**) en un conjunto $C \subseteq A$, si f conserva (resp. invierte) el orden entre puntos de C, es decir, si $x, y \in C$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es ***estrictamente monótona***, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

En general, no es fácil probar directamente que una función es monótona o inyectiva. Veremos en su momento que las derivadas proporcionan la herramienta adecuada para hacerlo.

Funciones pares e impares. Una función f es *par* si $f(-x) = f(x)$ e *impar* si $f(-x) = -f(x)$.

Funciones elementales. La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las ***funciones elementales***. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones, que ahora vamos a recordar, realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Funciones polinómicas. Son las funciones de la forma

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \cdots + c_n x^n$$

donde $c_0, c_1, \ldots, c_n$ son números reales llamados *coeficientes* del polinomio; $n \in \mathbb{N}$ es un número natural que, si $c_n \neq 0$, se llama grado del polinomio. Las funciones polinómicas tienen como dominio natural de definición la totalidad de $\mathbb{R}$ aunque con frecuencia nos interesará estudiar una función polinómica en un intervalo.

Las funciones polinómicas son derivables en $\mathbb{R}$ y su derivada viene para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$P'(x) = c_1 + 2c_2 x + \cdots + n c_n x^{n-1}$$

Funciones racionales. Una función racional es una función de la forma:

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

donde P (el numerador) y Q (el denominador) son polinomios y Q no es el polinomio constante igual a 0. La función R tiene como dominio natural de definición el conjunto $\{x \in \mathbb{R} : Q(x) \neq 0\}$. Observa que las funciones polinómicas son también funciones racionales (con denominador constante 1).

Las funciones racionales son derivables en su dominio natural de definición y su derivada viene para todo $x \in \mathbb{R}$ en el que $Q(x) \neq 0$ por:

$$R'(x) = \frac{P'(x)Q(x) - P(x)Q'(x)}{(Q(x))^2}$$

Raíces de un número real. Dados un número real $x \geqslant 0$ y un número natural $k \geqslant 2$, hay un único número real ***mayor o igual que cero***, $z \geqslant 0$, que verifica que $z^k = x$. Dicho número real z se llama la *raíz k-ésima o de orden k de x* y se representa por $\sqrt[k]{x}$ o por $x^{1/k}$.

Se verifica que $\sqrt[k]{xy} = \sqrt[k]{x}\,\sqrt[k]{y}$.

La función $x \mapsto \sqrt[k]{x}$ es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Es decir, se verifica que $0 \leqslant x < y \Longleftrightarrow \sqrt[k]{x} < \sqrt[k]{y}$.

Si $x < 0$ y k es ***impar*** se define $\sqrt[k]{x} = -\sqrt[k]{|x|}$.

Las raíces pares solamente están definidas en $\mathbb{R}_o^+$ y toman valores en $\mathbb{R}_o^+$.

Las raíces impares están definidas en todo $\mathbb{R}$. Una raíz impar de un número negativo es otro número negativo.

Observación importante: $\sqrt{x^2} = |x|$.

Potencias racionales. Si r es un número racional, $r = \dfrac{p}{q}$ donde $p \in \mathbb{Z}$ y $q \in \mathbb{N}$, definimos para todo $x > 0$:

$$\boxed{x^r = x^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{x^p}}$$

Función exponencial. El número e es un número irracional que puede aproximarse arbitrariamente por números de la forma $(1+1/n)^n$ para valores grandes de $n\in\mathbb{N}$. Un valor *aproximado* de e es 2.7182818284.

La función exponencial es la función $\exp:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida para todo $x\in\mathbb{R}$ por $\exp(x)=\mathrm{e}^x$. Dicha función se representa en la siguiente gráfica.

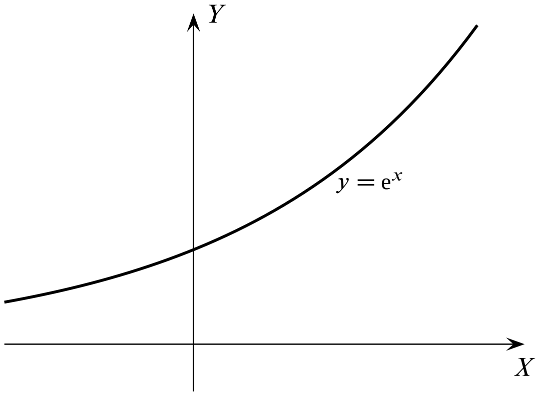

Figura 1. Función exponencial

Observa que la función exponencial es siempre positiva y no se anula nunca.
La función exponencial es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$.
Se verifica que:

$$\lim_{x\to-\infty}\mathrm{e}^x=0,\qquad \lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^x=+\infty$$

La propiedad fundamental de la función exponencial es que convierten sumas en productos:

$$\boxed{\mathrm{e}^{x+y}=\mathrm{e}^x\,\mathrm{e}^y\qquad(x,y\in\mathbb{R})}$$

En particular $\mathrm{e}^0=1$.
La función exponencial es derivable y su derivada es ella misma $\boxed{\exp'(x)=\mathrm{e}^x}$.

Logaritmo natural o neperiano. La biyección inversa de la función exponencial se llama logaritmo natural o neperiano y se representa por ln.

$$\ln:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}\qquad \mathrm{e}^{\ln x}=x\ \ (x\in\mathbb{R}^+),\ \ \ln(\mathrm{e}^x)=x\ \ (x\in\mathbb{R})$$

Su gráfica es la siguiente:

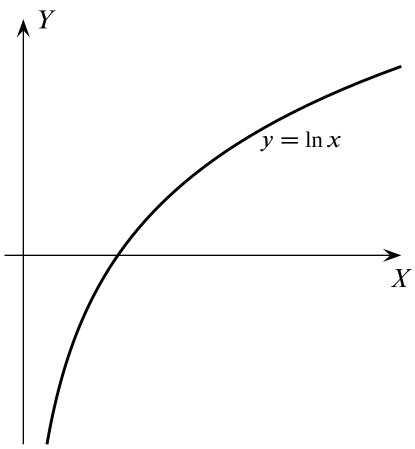

Figura 2. Función logaritmo natural

El logaritmo natural es una biyección estrictamente creciente de $\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\ln x=-\infty,\qquad \lim_{x\to+\infty}\ln x=+\infty$$

La propiedad fundamental de la función logaritmo natural es que convierte productos en sumas:

$$\boxed{\ln(xy)=\ln x+\ln y\qquad(x,y\in\mathbb{R}^+)}$$

En particular $\ln 1=0$. También se deduce de lo anterior que:

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right)=\ln x-\ln y\qquad(x,y\in\mathbb{R}^+)$$

La función logaritmo natural es derivable y su derivada viene dada por:

$$\boxed{\ln'(x)=\frac{1}{x}\qquad(x>0)}$$

Funciones exponenciales. Dado un número real $a > 0$, la función que a cada $x \in \mathbb{R}$ hace corresponder el número $e^{x \ln a}$ se llama *función exponencial de base a*. Puede comprobarse que si r es un número racional entonces $e^{r \ln a} = a^r$, por lo que se se usa la notación a^x para designar el número $e^{x \ln a}$.

$$\boxed{a^x = e^{x \ln a} \qquad (x \in \mathbb{R})}$$

También usaremos para esta función la notación $\exp_a = a^x$. Las propiedades de esta función se deducen fácilmente de las de las funciones exponencial y logaritmo natural.

Se verifica que $\exp_a$ es una biyección de$\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}^+$. Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

La propiedad básica de $\exp_a$ es que convierte sumas en productos:

$$a^{x+y} = a^x a^y \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

La derivada viene dada por:

$$\exp_a{}'(x) = \ln a a^x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Funciones logaritmo. Dado un número real $a > 0$ y $a \neq 1$, la función que a cada $x \in \mathbb{R}^+$ hace corresponder el número $\dfrac{\ln x}{\ln a}$ se llama *función logaritmo en base a* y suele representarse por $\log_a$.

$$\boxed{\log_a(x) = \frac{\ln x}{\ln a} \qquad (x > 0)}$$

Las propiedades de esta función se deducen fácilmente de las de las funciones exponencial y logaritmo natural.

Las funciones $\log_a$ y $\exp_a$ son inversas una de la otra:

$$\exp_a(\log_a x) = x \quad (x \in \mathbb{R}^+), \qquad \log_a(\exp_a x) = x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Se verifica que $\log_a$ es una biyección de$\mathbb{R}^+$ sobre $\mathbb{R}$. Es estrictamente creciente si $a > 1$ y estrictamente decreciente si $0 < a < 1$.

La propiedad básica de $\log_a$ es que convierte productos en sumas:

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y \qquad (x, y \in \mathbb{R}^+)$$

La derivada viene dada por:

$$\log_a{}'(x) = \frac{1}{x \ln a} \qquad (x > 0)$$

Los *logaritmos decimales* corresponden a tomar $a = 10$.

Función potencia de exponente real $a \neq 0$. Se llama así la función cuyo dominio es $\mathbb{R}^+$ que a cada $x > 0$ asigna el número x^a. Puesto que $x^a = \exp(a \ln x)$, las propiedades de esta función se deducen con facilidad de las propiedades de las funciones exponencial y logaritmo natural.

$$(xy)^a = x^a y^a; \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(x^a\right) = a x^{a-1}$$

Si $a > 0$ es estrictamente creciente con

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^a = 0, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = +\infty$$

Si $a < 0$ es estrictamente decreciente con

$$\lim_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} x^a = +\infty, \qquad \lim_{x \to +\infty} x^a = 0$$

Funciones trigonométricas

Medida de ángulos. Para medir ángulos suelen usarse dos unidades de medida.

Medida de ángulos en grados. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la longitud total de la circunferencia dividida por 360. Un ángulo de un grado es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a $\frac{2\pi r}{360}$.

Medida de ángulos en radianes. Se toma como unidad de medida un arco cuya longitud sea igual a la del radio. Un ángulo de un radián es el que intercepta en una circunferencia de radio r un arco cuya longitud es igual a r.

La relación entre grados y radianes viene dada por:

$$360 \ \text{grados} = 2\pi \ \ \text{radianes}$$

Grados y *radianes* no son otra cosa que *unidades de medida* de longitudes, al igual que lo son el metro y el centímetro. La ventaja de medir arcos en radianes es que, en tal caso, la misma unidad con la que medimos el radio nos sirve para medir arcos.

Convenio. Salvo indicación contraria, siempre supondremos que los ángulos están medidos en radianes.

Funciones seno y coseno. En geometría se habla del *seno de un ángulo* y en Cálculo usamos la expresión $\operatorname{sen}(\sqrt{2})$ para referirnos al *seno del número* $\sqrt{2}$. ¿Qué relación hay entre uno y otro?

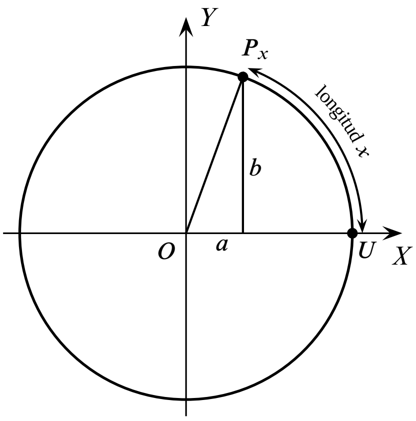

Figura 3. La circunferencia unidad

Antes que nada hay que decir que tanto el seno de un ángulo como el seno de un número *son números*, pero mientras que el seno de un ángulo tiene una sencilla definición geométrica, no es evidente, a priori, cómo se puede definir el seno de un número. La idea consiste en asociar a cada número un (único) ángulo y definir el seno del número como el seno del ángulo que le corresponde. Es evidente que a cada número $x \geqslant 0$ le podemos asignar de manera única un ángulo "enrollando" el segmento $[0, x]$ sobre la circunferencia unidad, *en sentido contrario a las agujas del reloj*, de forma que el origen de dicho segmento coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto P_x de la circunferencia unidad.

Pues bien, si las coordenadas de P_x son (a, b), se define:

$$\operatorname{sen} x = \text{seno del ángulo}(\widehat{P_x OU}) = b$$
$$\cos x = \text{coseno del ángulo}(\widehat{P_x OU}) = a$$

Al ser igual a 2π la longitud de la circunferencia unidad, es claro que $P_{x+2\pi} = P_x$, por lo que $\operatorname{sen}(x) = \operatorname{sen}(x + 2\pi)$ y $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$. Observa también que si $0 \leqslant x < 2\pi$, entonces la *medida en radianes* del ángulo $\widehat{P_x OU}$ es igual a x, es decir:

$$\operatorname{sen}(x) = \ \text{seno del ángulo de} \ \ x \ \ \text{radianes} \ \ (0 \leqslant x < 2\pi)$$

Si $x < 0$ podemos proceder con el segmento $[x, 0]$ de forma análoga a la anterior, con la diferencia de que ahora enrollamos dicho segmento sobre la circunferencia unidad *en el sentido de las agujas del reloj*, de forma que su extremo 0 coincida con el punto $U = (1, 0)$ de la circunferencia. Obtenemos así un punto $P_x = (c, d)$ de la circunferencia unidad y se define, igual que antes $\operatorname{sen}(x) = d$, $\cos(x) = c$. Es fácil ver que si $P_x = (c, d)$, entonces $P_{-x} = (c, -d)$. Resulta así que $\operatorname{sen}(x) = -\operatorname{sen}(-x)$ y $\cos(x) = \cos(-x)$.

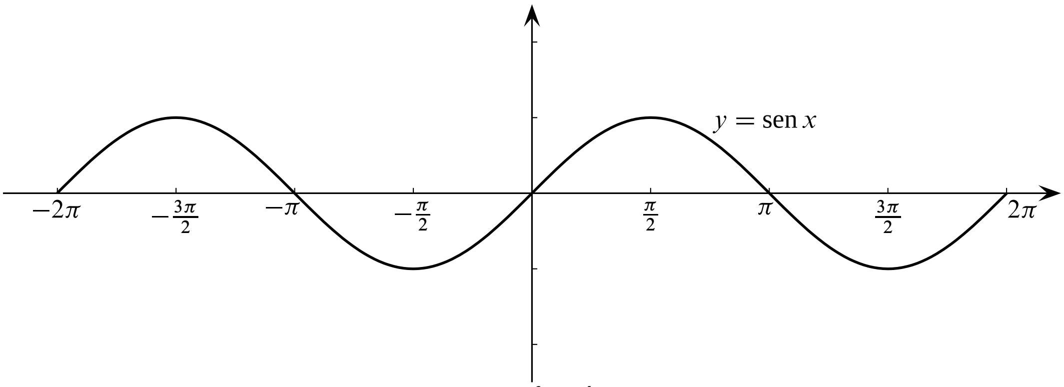

Figura 4. La función seno

Observaciones. Para indicar el seno del ángulo cuya medida en grados es x es frecuente escribir $\operatorname{sen}(x^{o})$. Naturalmente, la relación entre el *seno en grados* y la función seno usual viene dada por:

$$\operatorname{sen}(x^{o}) = \operatorname{sen} \frac{\pi x}{180}$$

En este curso de Cálculo el número $\operatorname{sen} x$ significará siempre el seno del ángulo cuya medida en radianes (salvo múltiplos enteros de 2π) es x.

Propiedades de las funciones seno y coseno. Las funciones seno y coseno son funciones reales cuyo dominio es todo $\mathbb{R}$. Las identidades básicas que dichas funciones verifican son:

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Como se ha dicho antes, las funciones seno y coseno son periódicas de período 2π:

$$\operatorname{sen}(x + 2\pi) = \operatorname{sen} x\,, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno es impar y la función coseno es par:

$$\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x\,, \quad \cos(-x) = \cos x \quad (x \in \mathbb{R})$$

Todas las propiedades anteriores se deducen fácilmente de las definiciones dadas. Las siguientes igualdades, se conocen como *fórmulas de adición*:

$$\operatorname{sen}(x + y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y \tag{1}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \tag{2}$$

La función seno se anula en los múltiplos enteros de π, es decir, en los puntos de la forma $k\pi$ donde k es un entero cualquiera. La función coseno se anula en los puntos de la forma $k\pi + \pi/2$ donde k es un entero cualquiera.

Las funciones seno y coseno son derivables siendo

$$\operatorname{sen}' x = \cos x, \qquad \cos' x = -\operatorname{sen} x \qquad (x \in \mathbb{R})$$

Las funciones tangente, cotangente, secante y cosecante. Las funciones **tangente** y **secante**, que se representan por tg y sec son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi + \pi/2 : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \cos x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,, \quad \sec x = \frac{1}{\cos x}$$

Las funciones **cotangente** y **cosecante**, que se representan por cotg y csc son las funciones definidas en el conjunto $\mathbb{R} \setminus \{k\pi : k \in \mathbb{Z}\} = \{x \in \mathbb{R} : \operatorname{sen} x \neq 0\}$, por:

$$\operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\,, \quad \csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$$

Las propiedades de estas funciones y sus derivadas se deducen fácilmente de las correspondientes del seno y del coseno. Por ejemplo, $\operatorname{tg}(x) = \operatorname{tg}(x + \pi)$; esto es, la función tangente es periódica de período π.

Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente. Lo primero que hay que decir es que ninguna de las funciones "seno", "coseno", "tangente", es inyectiva y, en consecuencia, ninguna de ellas tiene inversa en el sentido de la definición antes dada de *función inversa*. Por tanto, no debe decirse que las funciones *arcoseno*, *arcocoseno*, *arcotangente* sean las funciones inversas del seno, del coseno o de la tangente: eso no es cierto. Hecha esta observación imprescindible, pasemos a definir dichas funciones.

La función seno es estrictamente creciente en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1, $\operatorname{sen}([-\pi/2, \pi/2]) = [-1, 1]$. En consecuencia, dado un número $x \in [-1, 1]$ hay un único número $y \in [-\pi/2, \pi/2]$ tal que $\operatorname{sen} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,sen} x$ y se llama el *arcoseno de* x. Es decir, el arcoseno es la función $\operatorname{arc\,sen}:[-1, 1] \to \mathbb{R}$ definida por $\operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x$ y $-\frac{\pi}{2} \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \frac{\pi}{2}$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x$, es cierta si, y sólo si, $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$.

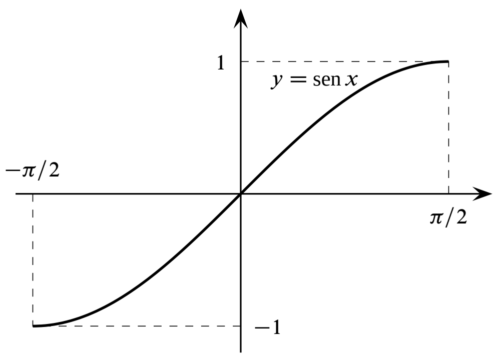

Figura 5. La función seno en $[\frac{-\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

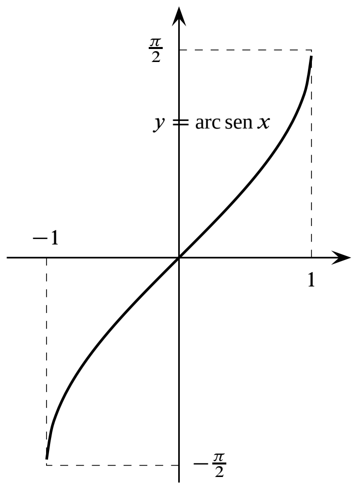

Figura 6. La función arcoseno

Es decir, *la función arcoseno es la inversa de la función seno restringida al intervalo* $[-\pi/2, \pi/2]$, esto es, cuando consideramos que la función seno está solamente definida en el intervalo $[-\pi/2, \pi/2]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}:[-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 \leqslant \operatorname{arc\,sen} x \leqslant \pi/2, \quad \operatorname{sen}(\operatorname{arc\,sen} x) = x} \tag{3}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,sen}(\operatorname{sen} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2} \tag{4}$$

La función coseno es estrictamente decreciente en el intervalo $[0, \pi]$ y en dicho intervalo toma todos los valores comprendidos entre -1 y 1. Por tanto, dado un número $x \in [-1, 1]$, hay un único número $y \in [0, \pi]$ tal que $\cos y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,cos} x$ y se llama *arcocoseno de* x. Es decir, arcocoseno es la función $\operatorname{arc\,cos}:[-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $\cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x$ y $0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi$. Observa que la igualdad $\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x$, es cierta si, y sólo si, $0 \leqslant x \leqslant \pi$. Es decir, *la función arcocoseno es la inversa de la función coseno restringida al intervalo* $[0, \pi]$, esto es, cuando consideramos que la función coseno está solamente definida en el intervalo $[0, \pi]$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}:[-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad 0 \leqslant \operatorname{arc\,cos} x \leqslant \pi, \quad \cos(\operatorname{arc\,cos} x) = x} \tag{5}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,cos}(\cos x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi} \tag{6}$$

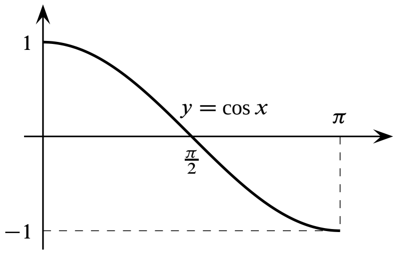

Figura 7. La función coseno en $[0, \pi]$

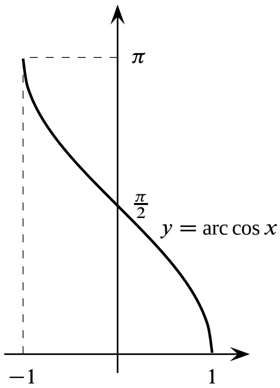

Figura 8. La función arcocoseno

La función tangente es estrictamente creciente en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$ y en dicho intervalo toma todos los valores reales, $\operatorname{tg}(]-\pi/2, \pi/2[) = \mathbb{R}$. En consecuencia, dado un número $x \in \mathbb{R}$, hay un único número $y \in]-\pi/2, \pi/2[$ tal que $\operatorname{tg} y = x$; dicho número y se representa por $\operatorname{arc\,tg} x$ y se llama el *arcotangente de* x. Es decir, *la función arcotangente es la inversa de la función tangente restringida al intervalo* $]-\pi/2, \pi/2[$, esto es, cuando consideramos que la función tangente está solamente definida en el intervalo $]-\pi/2, \pi/2[$.

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad -\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} x < \pi/2, \quad \operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x) = x} \tag{7}$$

$$\boxed{\operatorname{arc\,tg}(\operatorname{tg} x) = x \quad \Longleftrightarrow \quad -\pi/2 < x < \pi/2} \tag{8}$$

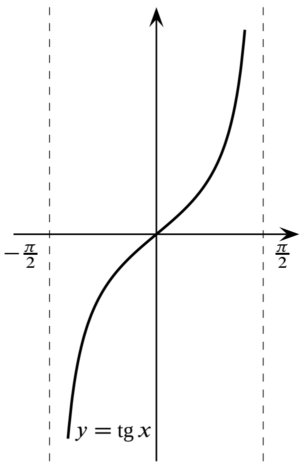

Figura 9. La función tangente en $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

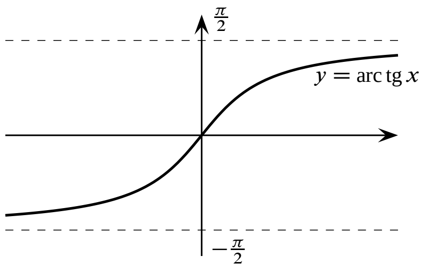

Figura 10. La función arcotangente

Las funciones arcoseno, arcocoseno y arcotangente son derivables en sus intervalos de definición y sus derivadas viene dadas por:

$$\operatorname{arc\,sen}' x = -\operatorname{arc\,cos}' x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad (-1 < x < 1), \qquad \operatorname{arc\,tg}' x = 1 + \operatorname{tg}^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} \quad (x \in \mathbb{R})$$

Las funciones arcoseno y arcotangente son estrictamente crecientes y él arcocoseno es estrictamente decreciente. Se verifica que:

$$\lim_{\substack{x \to \frac{-\pi}{2} \\ x > \frac{-\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = -\infty, \qquad \lim_{\substack{x \to \frac{\pi}{2} \\ x < \frac{\pi}{2}}} \operatorname{tg} x = +\infty$$

$$\boxed{\lim_{x \to -\infty} \operatorname{arc\,tg} x = -\frac{\pi}{2}, \qquad \lim_{x \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} x = \frac{\pi}{2}}$$

Las funciones hiperbólicas. Las funciones *seno hiperbólico*, representada por senh, y *coseno hiperbólico*, representada por cosh, están definidas para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{senh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \qquad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

La identidad básica que dichas funciones verifican es:

$$\cosh^2 x - \operatorname{senh}^2 x = 1 \qquad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es impar y la función coseno hiperbólico es par:

$$\operatorname{senh}(-x) = -\operatorname{senh} x\,, \quad \cosh(-x) = \cosh x \quad (x \in \mathbb{R})$$

La función seno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}$. La función coseno hiperbólico es estrictamente creciente en $\mathbb{R}_o^+$.

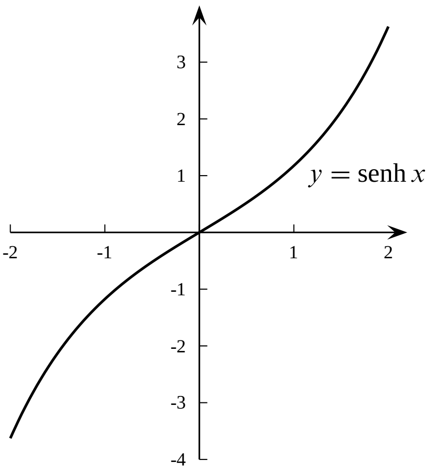

Figura 11. La función seno hiperbólico

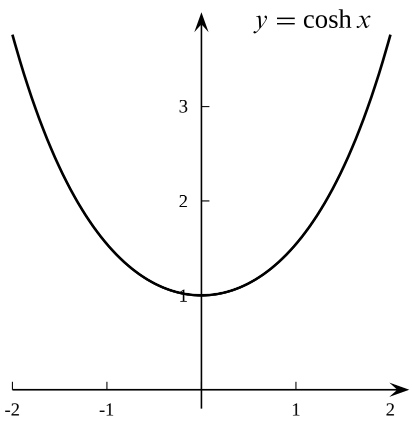

Figura 12. La función coseno hiperbólico

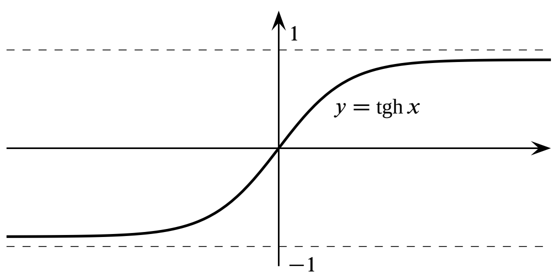

Figura 13. La función tangente hiperbólica

La función **tangente hiperbólica** que se representa por tgh es la función definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por:

$$\operatorname{tgh} x = \frac{\operatorname{senh} x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

De forma análoga se definen las funciones cotangente, secante y cosecante hiperbólicas.

Las funciones hiperbólicas inversas. La función seno hiperbólico es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre $\mathbb{R}$ cuya inversa, representada por, argsenh, (léase **argumento seno hiperbólico**) viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argsenh} x = \log(x + \sqrt{x^2+1}) \quad (x \in \mathbb{R})} \tag{9}$$

La función coseno hiperbólico es inyectiva en $\mathbb{R}_o^+$ y su imagen es la semirrecta $[1, +\infty[$. La función, definida en $[1, +\infty[$, que a cada número $x \geqslant 1$ asigna el único número $y > 0$ tal que $\cosh y = x$, se llama **argumento coseno hiperbólico**, se representa por, argcosh, y viene dada por:

$$\boxed{\operatorname{argcosh} x = \log(x + \sqrt{x^2-1}) \quad (x \geqslant 1)} \tag{10}$$

La función tangente hiperbólica es una biyección de $\mathbb{R}$ sobre el intervalo $]-1, 1[$ cuya inversa, representada por, argtgh, (léase **argumento tangente hiperbólica**) es la función definida en el intervalo $]-1, 1[$ por:

$$\boxed{\operatorname{argtgh} x = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \quad (-1 < x < 1)} \tag{11}$$

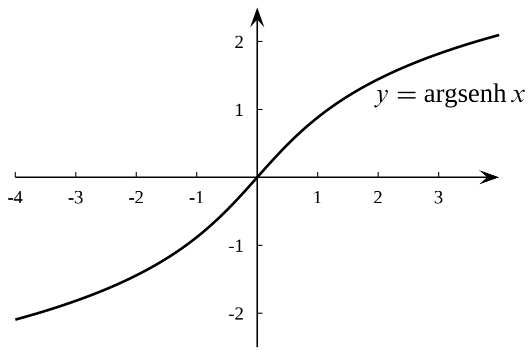

Figura 14. La función argumento seno hiperbólico

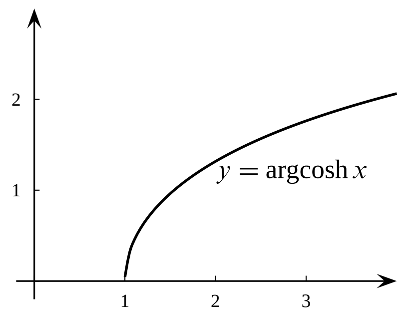

Figura 15. La función argumento coseno hiperbólico

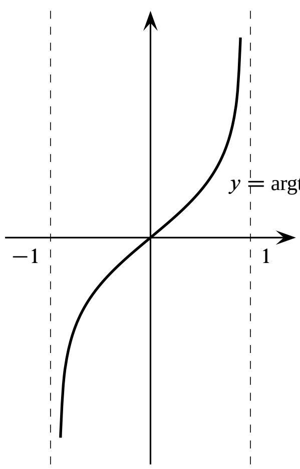

Figura 16. La función argumento tangente hiperbólica

Las funciones hiperbólicas y sus inversas son derivables en sus respectivos intervalos de definición. Las derivadas de las funciones hiperbólicas inversas son muy útiles para calcular primitivas de funciones en las que intervienen raíces cuadradas de trinomios de segundo grado.

$\operatorname{argsenh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$	$\operatorname{argsenh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argcosh}(x) = \log\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) \quad x > 1$	$\operatorname{argcosh}'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{argcosech}(x) = \operatorname{argsenh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad x \neq 0$	$\operatorname{argcosech}'(x) = \dfrac{-1}{\lvert x\rvert\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{argsech}(x) = \operatorname{argcosh}\left(\dfrac{1}{x}\right) \quad 0 < x < 1$	$\operatorname{argsech}'(x) = \dfrac{-1}{x\sqrt{1-x^2}}$

Ejercicios propuestos

1. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas y, cuando no lo sean, proporciona un contraejemplo. Se supone que f, g, h son funciones definidas en $\mathbb{R}$.

   a) $f \circ (g + h) = f \circ g + f \circ h$.

   b) $(g + h) \circ f = g \circ f + h \circ f$.

   c) $\dfrac{1}{f \circ g} = \dfrac{1}{f} \circ g$.

   d) $\dfrac{1}{f \circ g} = f \circ \dfrac{1}{g}$.

2. Sea $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=2x+1$. Calcula los valores de x para los que $(f \circ g)(x)=(g \circ f)(x)$.

3. a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.

   b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

4. Prueba que la función dada por $f(x) = \dfrac{x}{1+x}$, es estrictamente creciente en $\mathbb{R}^+$. Deduce que

$$\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leqslant \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} \qquad (x, y \in \mathbb{R})$$

5. Prueba que la función $f : [1/2, +\infty[\to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^2 - x + 1$ para todo $x \geqslant 1/2$, es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de f.

6. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\ln\left(|x-3|(1+|x-6|)\right)}$.

7. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{\ln \dfrac{x^2-8x+4}{x^2-3x+2}}$.

8. Calcula el dominio natural de definición de la función $f(x) = \sqrt{-\operatorname{sen} x} + \sqrt{16-x^2}$.

9. Compara $a^{\ln b}$ con $b^{\ln a}$.

10. Indica si es correcto escribir:

$$\ln(1-x)(x-2) = \ln(1-x) + \ln(x-2)$$

11. Prueba que $\ln(x + \sqrt{1+x^2}) + \ln(\sqrt{1+x^2} - x) = 0$.

12. Resuelve $x^{\sqrt{x}} = (\sqrt{x})^x$.
13. Simplifica las expresiones $a^{\ln(\ln a)/\log a}$, $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$.
14. Calcula x sabiendo que:
$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$
15. Sea $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=2x+1$. Calcula los valores de x para los que $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$.
16. Usando las definiciones de las funciones arcoseno y arcocoseno prueba las igualdades:
    (a) $\operatorname{arc}\cos x + \operatorname{arc}\operatorname{sen} x = \dfrac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1,1]$
    (b) $\tan(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}$; $\sec(\operatorname{arc}\operatorname{sen} x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in]-1,1[$
17. Usando la definición de la función arcotangente, prueba que para todo $x > 0$ se verifica que:
$$\operatorname{arc}\operatorname{tg}(x) + \operatorname{arc}\operatorname{tg}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}.$$
18. *a*) Prueba las igualdades:
$$\cos x = \frac{1-\operatorname{tg}^2(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}; \qquad \operatorname{sen} x = \frac{2\operatorname{tg}(x/2)}{1+\operatorname{tg}^2(x/2)}.$$
    b) Sean $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $a^2+b^2=1$ y $a \neq -1$. Definamos
$$\vartheta = 2\operatorname{arc}\operatorname{tg}\frac{b}{a+1}$$
    Prueba que ϑ es el único número que verifica que $-\pi < \vartheta < \pi$, $\cos\vartheta = a$ y $\operatorname{sen}\vartheta = b$.
19. Prueba las igualdades:
$$\cos a = 4\cos^3(a/3) - 3\cos(a/3) = 2\cos^2(a/2) - 1.$$
    Usando que $\cos 0 = 1$, $\cos\pi = -1$, deduce el valor de $\cos(\pi/6)$, $\cos(\pi/4)$ y $\cos(\pi/8)$.
20. Prueba que para todos $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:
$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = 2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}; \qquad \cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}.$$
    Deduce que para $k \in \mathbb{N}$:
$$2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos(kx) = \operatorname{sen}(2k+1)\frac{x}{2} - \operatorname{sen}(2k-1)\frac{x}{2}.$$
    Utiliza esta igualdad para probar que:
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\big(\cos x + \cos(2x) + \cdots + \cos(nx)\big) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\cos\frac{n+1}{2}x.$$
    Prueba análogamente que:
$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}\big(\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}(2x) + \cdots + \operatorname{sen}(nx)\big) = \operatorname{sen}\frac{nx}{2}\operatorname{sen}\frac{n+1}{2}x.$$
21. Dado un número $x \neq 0$, calcula un número $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{1}{\operatorname{senh} t} = x$.
22. a) Dado $x \in \mathbb{R}$ prueba que hay un único $t \in \mathbb{R}$ tal que $\dfrac{\mathrm{e}^t - \mathrm{e}^{-t}}{2} = x$.
    b) Dado $x \geqslant 1$, prueba que hay un único $t \geqslant 0$ tal que $\dfrac{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}{2} = x$.
    Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular t. La sustitución $\mathrm{e}^t = u$ te permitirá calcular u.