CÁLCULO I

1^0 Grado Matemáticas y 1^0 Doble Grado Física y Matemáticas,
Curso 2017–2018, Primer cuatrimestre

V. Ejercicios (Funciones continuas. Temas 12 y 13.)

1. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:

$$f(x) = x \quad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad f(x) = 1 - x \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en 0.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y supongamos que $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Prueba que $f = g$.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \inf\{|x - a| \,:\, a \in A\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

   Prueba que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y deducir que f es continua.

5. Estudia la continuidad de las funciones $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por:

$$f(x) = E\big(x^2\big) \ \ \forall x \in \mathbb{R}; \quad g(x) = x\, E\left(\frac{1}{x}\right) \ \ \forall x \in \mathbb{R}^*, \ \ g(0) = 1$$

6. Prueba que la función valor absoluto es continua.

7. Dadas dos funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos las funciones $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por

$$\varphi(x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in A$$

   Prueba que si f y g son continuas, entonces φ y ψ también son continuas.

   Indicación: Si $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que

$$\max\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a + b + |a - b|\big), \qquad \min\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a + b - |a - b|\big).$$

8. Prueba que toda función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

9. Sea I un intervalo no vacío y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Prueba que f es constante.

10. Prueba que si P es un polinomio de grado impar, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 0$.

11. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow [0, 1]$ una función continua. Prueba que f tiene un punto *fijo*, es decir, que existe $x \in [0, 1]$ tal que $f(x) = x$.

12. Prueba que la función f es continua, donde $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $f(0) = e$.

13. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, prueba que en cada instante, existen dos puntos antípodas en el Ecuador que se encuentran a la misma temperatura.

14. Sea $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ un función continua y supongamos que, para cada $x \in [0, 1]$ existe $y \in [0, 1]$ tal que $|f(y)| \leq |f(x)|/2$. Prueba que existe $c \in [0, 1]$ tal que $f(c) = 0$.

15. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función f alcanza su mínimo, pero que no está acotada superiormente.

16. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que si $f_{|\mathbb{Q}}$ es monótona, entonces f es monótona.

17. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. Prueba que

$$\sup \{f(x) \,:\, x < a\} = f(a) = \text{ínf} \{f(y) \,:\, y > a\}$$

18. Calcular la imagen de la función $f : [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{1 + x^2} \quad \forall x \in [-1, 1]$$

19. Sea $f :]-2, 2[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4 - x^2}} \qquad \forall x \in]-2, 2[$$

Calcula $f\big(]-2, 2[\big)$, $f\big([0, 2[\big)$, $f\big(]-1, 1[\big)$ y $f\big([-1, 1]\big)$.

20. Sea $f : [-1, 1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1 + x}{1 - x}} \quad \forall x \in [-1, 1[$$

Calcula $f\big([-1, 1[\big)$ y $f\big([-1/2, 1/2]\big)$.

21. Prueba que, para cada $y \in \mathbb{R}_0^+$, la ecuación $x^5 + x^4 + x = y$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}_0^+$, y que denotando por $g(y)$ a dicha solución, se obtiene una función continua $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Deduce que si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n^5 + x_n^4 + x_n\} \to 3$, entonces $\{x_n\} \to 1$.

22. Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Analizar la relación existente entre las siguientes afirmaciones:

- f es continua
- $f(I)$ es un intervalo
- f es estrictamente monótona
- f^{-1} es continua