CÁLCULO I

1^0 Grado en Matemáticas y 1^0 Doble Grado en Física y Matemáticas,
Curso 2019–2020, Primer cuatrimestre

V. Ejercicios (continuidad)

1. Estudia la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma:
$$f(x) = x \qquad \forall x \in \mathbb{Q} \qquad \text{y} \qquad f(x) = 1 - x \qquad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$$

2. Da un ejemplo de una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que sea continua solamente en 0.

3. Sean $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ funciones continuas y supongamos que $f_{|\mathbb{Q}} = g_{|\mathbb{Q}}$. Prueba que $f = g$.

4. Sea A un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}$ y $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por
$$f(x) = \text{ínf}\,\{|x - a| \,:\, a \in A\} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$
Prueba que $|f(x) - f(y)| \leq |x - y|$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}$ y deducir que f es continua.

5. Prueba que la función valor absoluto es continua.

6. Dadas dos funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$, consideremos las funciones $\varphi, \psi : A \longrightarrow \mathbb{R}$ dadas por
$$\varphi(x) = \text{máx}\{f(x), g(x)\}, \quad \psi(x) = \text{mín}\{f(x), g(x)\} \quad \forall x \in A$$
Prueba que si f y g son continuas, entonces φ y ψ también son continuas.
Indicación: Si $a, b \in \mathbb{R}$, se verifica que
$$\text{máx}\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a + b + |a - b|\big), \qquad \text{mín}\{a, b\} = \frac{1}{2}\big(a + b - |a - b|\big).$$

7. Prueba que toda función $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua.

8. Sea I un intervalo no vacío y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua, tal que $f(I) \subset \mathbb{Q}$. Prueba que f es constante.

9. Prueba que si P es un polinomio de grado impar, existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $P(x) = 0$.

10. Probar que existe un número real positivo x tal que
$$\log x + \sqrt{x} = 0.$$

11. Probar que la ecuación $\tan x = x$ tiene infinitas soluciones.

12. Probar que la ecuación
$$x + e^x + \arctan\, x = 0$$
tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

13. Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función continua. Prueba que f tiene un punto *fijo*, es decir, que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

14. Prueba que la función f es continua, donde $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ está definida por $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ si $x \in \mathbb{R}^+$ y $f(0) = e$.

15. Suponiendo que la temperatura varía de manera continua a lo largo del Ecuador, prueba que en cada instante, existen dos puntos antípodas en el Ecuador que se encuentran a la misma temperatura.

16. Un corredor recorre 6 kilómetros en media hora. Demostrar que durante su carrera existe un intervalo de tiempo de 5 minutos en el que el corredor recorre exactamente un kilómetro.

17. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(0) = f(1) = 0$, $a \in (0,1)$. Demostrar que:

    a) Si $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [0,1]$, o bien

    b) Si $a = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$,

    entonces existe x tal que $f(x) = f(x+a)$. Encontrar un ejemplo de función $f(x)$ que cambie de signo, $a \in (0,1)$, de forma que la afirmación anterior sea falsa.

18. Para cada una de las siguientes funciones f, hállese número real y tal que $f(x) = 0$ para algún $x \in [y, y+1]$.

    a) $f(x) = x + \log x - 4$,

    b) $f(x) = e^x + \mathrm{sen}(\frac{\pi}{2}\mathrm{x})$.

    c) $f(x) = 1/x - \log x$

    d) $f(x) = \cos(\frac{\pi}{2}x) + x - 2$.

19. Sea $f : \mathbb{R}\backslash\{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

    Estúdiese la continuidad de f y su comportamiento en el punto 1, en $+\infty$ y en $-\infty$.

20. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua tal que $f(x) \geq |x|$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Prueba que la función f alcanza su mínimo, pero que no está acotada superiormente.

21. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Prueba que si $f_{|\mathbb{Q}}$ es monótona, entonces f es monótona.

22. Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ una función creciente y supongamos que f es continua en un punto $a \in \mathbb{R}$. Prueba que

$$\sup\{f(x) \,:\, x < a\} = f(a) = \inf\{f(y) \,:\, y > a\}$$

23. Calcular la imagen de la función $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \frac{x^2}{1+x^2} \quad \forall\, x \in [-1,1]$$

24. Sea $f :]-2,2[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}} \qquad \forall\, x \in]-2,2[$$

Calcula $f\big(]-2,2[\big)$, $f\big([0,2[\big)$, $f\big(]-1,1[\big)$ y $f\big([-1,1]\big)$.

25. Sea $f : [-1,1[\longrightarrow \mathbb{R}$ la función definida por

$$f(x) = \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} \quad \forall\, x \in [-1,1[$$

Calcula $f\big([-1,1[\big)$ y $f\big([-1/2,1/2]\big)$.

26. Prueba que, para cada $y \in \mathbb{R}_0^+$, la ecuación $x^5 + x^4 + x = y$ tiene una única solución $x \in \mathbb{R}_0^+$, y que denotando por $g(y)$ a dicha solución, se obtiene una función continua $g : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$. Deduce que si $x_n \geq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n^5 + x_n^4 + x_n\} \to 3$, entonces $\{x_n\} \to 1$.

27. Sea I un intervalo y $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ una función inyectiva. Analizar la relación existente entre las siguientes afirmaciones:

   - f es continua
   - $f(I)$ es un intervalo
   - f es estrictamente monótona
   - f^{-1} es continua