

# CÁLCULO I

1<sup>o</sup> Grado Matemáticas y 1<sup>o</sup> Doble Grado Física y Matemáticas,  
Curso 2019–2020, Primer cuatrimestre

## II. Ejercicios (Raíces, intervalos, densidad de $\mathbb{Q}$ y de $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ en $\mathbb{R}$ . Tema 4.)

1. Probar que:

$$\sqrt{n} \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 2\sqrt{n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

2. Sea  $\emptyset \neq A \subset \mathbb{R}$  y  $\alpha \in \mathbb{R}$ ; pruébense las siguientes afirmaciones:

1)

$$\alpha = \text{Sup } A \Leftrightarrow \begin{cases} a \leq \alpha, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists a \in A : \alpha - \varepsilon < a \end{cases}$$

2)

$$\alpha = \text{Inf } A \Leftrightarrow \begin{cases} a \geq \alpha, \forall a \in A \\ \forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \exists a \in A : a < \alpha + \varepsilon \end{cases}$$

3. Sean  $a, b \in \mathbb{R}$  tal que  $a < b$ . Pruébese que  $a = \text{Inf } ]a, b[$  y que  $b = \text{Sup } ]a, b[$ . ¿Qué ocurre para los intervalos  $[a, b]$ ,  $]a, b]$  y  $[a, b[$ ?

4. En cada uno de los siguientes casos, comprobar que el conjunto que se indica está acotado, calcular su supremo e ínfimo, y justificar si tiene máximo y mínimo:

$$A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + x < 2\}; \quad B = \{x \in \mathbb{Q} : x^2 \leq 3\}; \quad C = \{x \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{Q} : x^2 \leq 2\}$$

5. Comprobar las siguientes igualdades:

$$\text{Sup } \left\{ 1 - \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \right\} = 1; \quad \text{Inf } \left\{ \frac{1}{m} + \frac{1}{2^n} : m, n \in \mathbb{N} \right\} = 0$$

6. Prueba que si  $x \in \mathbb{R}$ , se verifica que

$$\text{Sup } \{y \in \mathbb{Q} : y < x\} = x = \text{Inf } \{y \in \mathbb{Q} : x < y\},$$

$$\text{Sup } \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : y < x\} = x = \text{Inf } \{y \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} : x < y\},$$

7. Probar que  $\mathbb{Q}$  no verifica la siguiente versión del axioma de Dedekind, es decir, dar un ejemplo de dos conjuntos  $A, B \subset \mathbb{Q}$  tales que  $a \leq b$  para cualesquiera  $a \in A$  y  $b \in B$ , pero no existe  $x \in \mathbb{Q}$  verificando que  $a \leq x \leq b$  para todo  $a \in A$  y todo  $b \in B$ .

8. Pruébese que si  $n, m \in \mathbb{N}$  entonces  $\sqrt[n]{m} \in \mathbb{N} \cup \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ .

9. Probar que  $\frac{\sqrt{5} + 2}{3\sqrt{5} + 4}$  es un número irracional.

10. Prueba por inducción que para  $y_1, y_2, \dots, y_n \in \mathbb{R}^+$  se tiene

$$\prod_{k=1}^n y_k = 1 \implies \sum_{k=1}^n y_k \geq n$$

dándose la igualdad si, y sólo si,  $y_1 = y_2 = \dots = y_n = 1$ .

Deduce la llamada “**desigualdad de las medias**”: para  $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}^+$ , se tiene

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k} \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k$$

¿Cuándo se da la igualdad?

11. Probar que cualquier natural  $n$  tal que  $n > 1$ , se verifica:

$$n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

**Indicación:** Es una aplicación directa de la desigualdad de las medias.