

$$W = \int_S \vec{I} \cdot d\vec{S} = \int_S I_n dS$$

»» Tema 3: Del Cálculo Diferencial a las Ecuaciones Diferenciales

Antonio M. Peralta



UGR

Universidad
de Granada

Historia de las Matemáticas, Grupo B
Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada
<http://www.ugr.es/local/aperalta/>

Contenidos:

1 Antecedentes: Aritmética y Abstracción

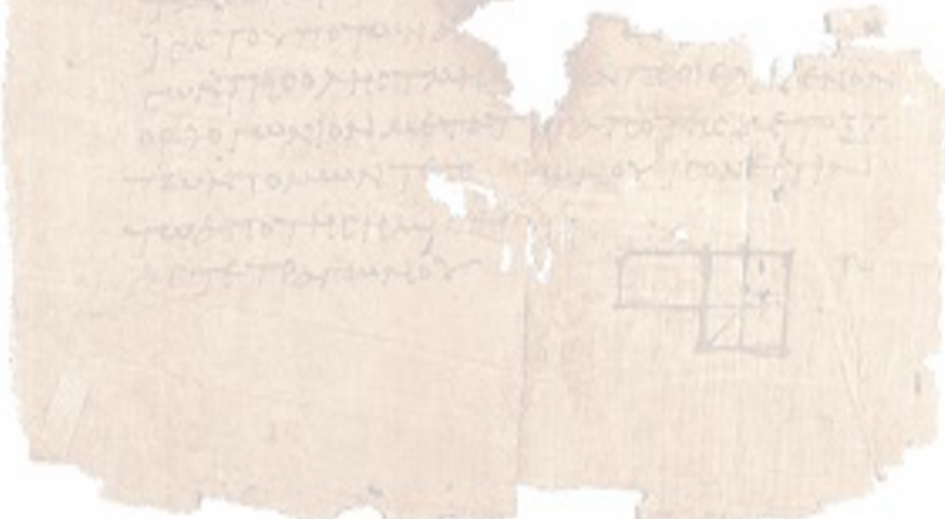
2 Los infinitésimos y el nacimiento del Cálculo Diferencial

- La Integral precede a la derivada
- Derivación

3 Curvas Parametrizadas

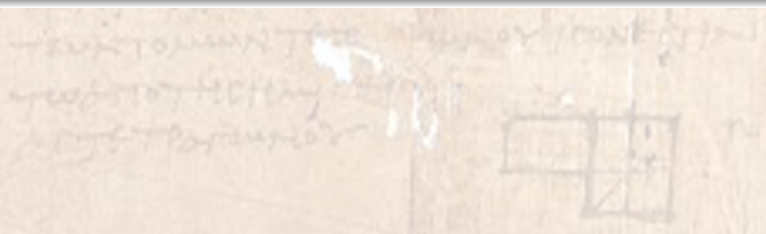
- Matemática Vectorial
- Introducción Curvas Paramétricas
- Introducción Superficies Paramétricas
- Sistemas Matriciales

Vivimos rodeados de números, estamos tan acostumbrados a contar que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Multitud de modelos matemáticos regulan nuestro modelo de civilización. Sin embargo el desarrollo de esta capacidad llevó un largo tiempo en la historia del hombre.



Vivimos rodeados de números, estamos tan acostumbrados a contar que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Multitud de modelos matemáticos regulan nuestro modelo de civilización. Sin embargo el desarrollo de esta capacidad llevó un largo tiempo en la historia del hombre.

Incluso en nuestros días se tienen noticias de tribus aisladas que no saben contar más allá de cuatro o cinco objetos; cuando tienen que referirse a una cantidad mayor emplean una expresión que quiere decir "muchos".



Vivimos rodeados de números, estamos tan acostumbrados a contar que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Multitud de modelos matemáticos regulan nuestro modelo de civilización. Sin embargo el desarrollo de esta capacidad llevó un largo tiempo en la historia del hombre.

Incluso en nuestros días se tienen noticias de tribus aisladas que no saben contar más allá de cuatro o cinco objetos; cuando tienen que referirse a una cantidad mayor emplean una expresión que quiere decir "muchos".

Aún quedan arcaísmos en nuestro lenguaje de términos distintos para referir a la misma cantidad: par de zapatos, yunta de bueyes.

Vivimos rodeados de números, estamos tan acostumbrados a contar que cuesta trabajo imaginar un mundo sin números. Multitud de modelos matemáticos regulan nuestro modelo de civilización. Sin embargo el desarrollo de esta capacidad llevó un largo tiempo en la historia del hombre.

Incluso en nuestros días se tienen noticias de tribus aisladas que no saben contar más allá de cuatro o cinco objetos; cuando tienen que referirse a una cantidad mayor emplean una expresión que quiere decir "muchos".

Aún quedan arcaísmos en nuestro lenguaje de términos distintos para referir a la misma cantidad: par de zapatos, yunta de bueyes.

El desarrollo de la agricultura, el calendario y posteriormente el comercio favoreció el proceso de contar colecciones concretas de objetos dándose comienzo a la elaboración del concepto de "número abstracto". Se facilitan los cálculos mediante el uso de objetos materiales, como hojas secas o piedrecillas (nuestra palabra cálculo proviene del latín "calculi" (que significa guijarros).

En el momento actual, la mayoría de los autores y expertos coinciden en afirmar que los textos matemáticos más antiguos de los que tenemos conocimiento proceden de Mesopotamia, de una de las ciudades sumerias: Uruk.

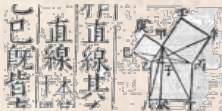


Tablas de cálculo mesopotámicas.
Periodo de Uruk III
Jemdet Nasr, 3100-2900 a.c.

En el momento actual, la mayoría de los autores y expertos coinciden en afirmar que los textos matemáticos más antiguos de los que tenemos conocimiento proceden de Mesopotamia, de una de las ciudades sumerias: Uruk.



Tablas de cálculo mesopotámicas.
Periodo de Uruk III
Jemdet Nasr, 3100-2900 a.c.



Se conservan textos matemáticos cuneiformes de hace más de 5.000 años. Sumerios y babilonios ya utilizaban complejos sistemas de numeración y otros procedimientos matemáticos. Los conocimientos matemáticos de los egipcios fueron rudimentarios pero muy prácticos. las aportaciones en China, Japón, India quedan fuera de nuestro alcance.

Para poder adaptarnos al tiempo del que disponemos en esta asignatura, nos situaremos y comenzaremos nuestra presentación, de forma muy somera, en algunas aportaciones de los matemáticos griegos.

Para poder adaptarnos al tiempo del que disponemos en esta asignatura, nos situaremos y comenzaremos nuestra presentación, de forma muy somera, en algunas aportaciones de los matemáticos griegos.

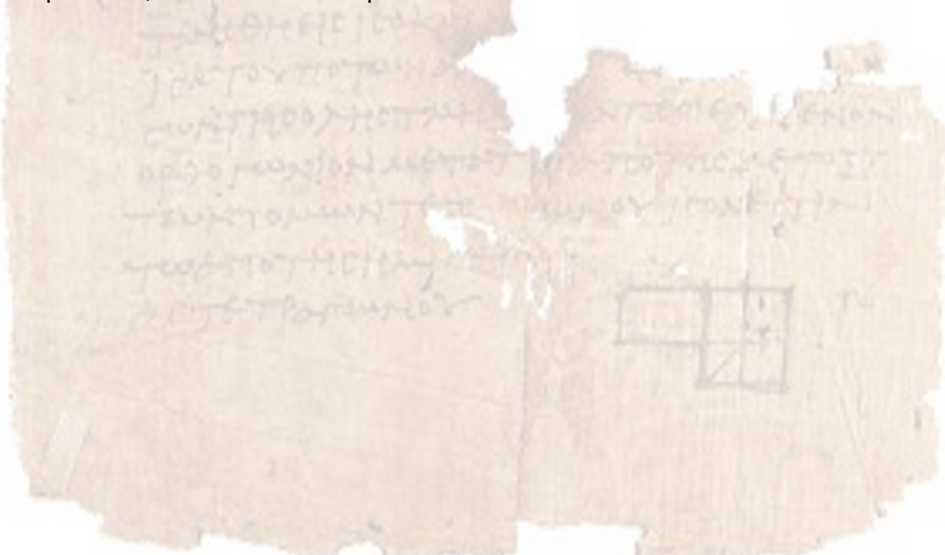
Más tarde, veremos que la cultura griega nunca dispone de una teoría aritmética satisfactoria, esta laguna hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última.

Para poder adaptarnos al tiempo del que disponemos en esta asignatura, nos situaremos y comenzaremos nuestra presentación, de forma muy somera, en algunas aportaciones de los matemáticos griegos.

Más tarde, veremos que la cultura griega nunca dispone de una teoría aritmética satisfactoria, esta laguna hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última.

Este punto de vista marcó el desarrollo de las matemáticas durante más de 2.000 años. La aportación de los matemáticos helenos clásicos es fundamentalmente geométrica y se ha tratado en otra parte del curso.

Una vez que aparece el concepto abstracto de número, el siguiente paso es aplicar los números para medir magnitudes tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos.



Una vez que aparece el concepto abstracto de número, el siguiente paso es aplicar los números para medir magnitudes tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos.

Método de Medida:

Queremos medir un segmento \overline{AB}

(1) Fijamos una unidad de medida de referencia en un segmento \overline{AU} .

Una vez que aparece el concepto abstracto de número, el siguiente paso es aplicar los números para medir magnitudes tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos.

Método de Medida:

Queremos medir un segmento \overline{AB}

- (1) Fijamos una unidad de medida de referencia en un segmento \overline{AU} .
- (2) Con suerte, un múltiplo de \overline{AU} coincide con la longitud de \overline{AB} , es decir $\overline{AB} = m\overline{AU}$.

Una vez que aparece el concepto abstracto de número, el siguiente paso es aplicar los números para medir magnitudes tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos.

Método de Medida:

Queremos medir un segmento \overline{AB}

- (1) Fijamos una unidad de medida de referencia en un segmento \overline{AU} .
- (2) Con suerte, un múltiplo de \overline{AU} coincide con la longitud de \overline{AB} , es decir $\overline{AB} = m\overline{AU}$.
- (3) Subdividimos \overline{AU} en n partes, notadas mediante $\overline{AU'}$, con la esperanza de que \overline{AB} coincida con un múltiplo de $\overline{AU'}$. Es decir, $\overline{AU} = n\overline{AU'}$ y $\overline{AB} = m\overline{AU'}$.

Una vez que aparece el concepto abstracto de número, el siguiente paso es aplicar los números para medir magnitudes tales como longitudes, superficies, volúmenes o tiempos.

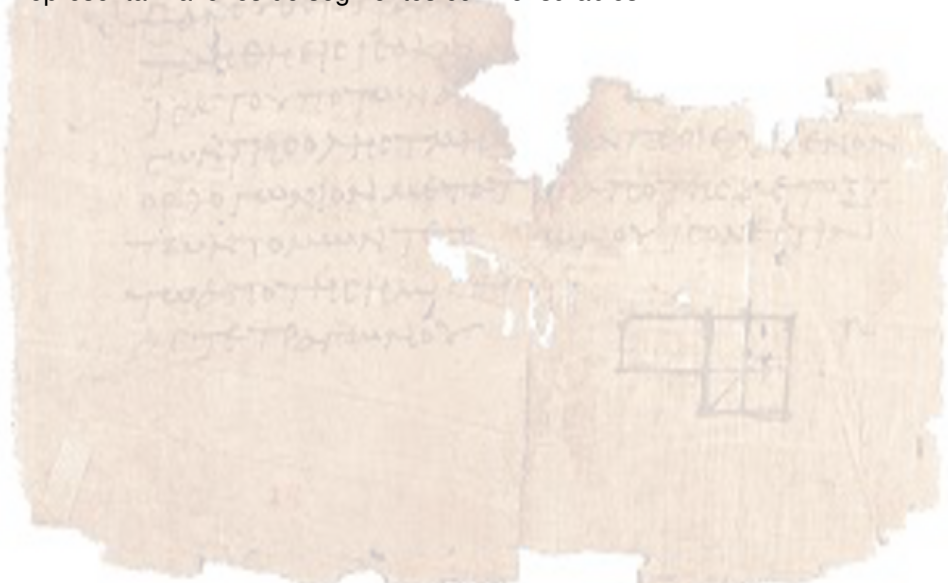
Método de Medida:

Queremos medir un segmento \overline{AB}

- (1) Fijamos una unidad de medida de referencia en un segmento \overline{AU} .
- (2) Con suerte, un múltiplo de \overline{AU} coincide con la longitud de \overline{AB} , es decir $\overline{AB} = m\overline{AU}$.
- (3) Subdividimos \overline{AU} en n partes, notadas mediante $\overline{AU'}$, con la esperanza de que \overline{AB} coincida con un múltiplo de $\overline{AU'}$. Es decir, $\overline{AU} = n\overline{AU'}$ y $\overline{AB} = m\overline{AU'}$.

En este último caso, se dice que las longitudes \overline{AB} y \overline{AU} son **conmensurables** y que la razón de \overline{AB} respecto de \overline{OU} es $\frac{m}{n}$. Pero este último cociente es meramente comparativo, no es un concepto abstracto de número racional.

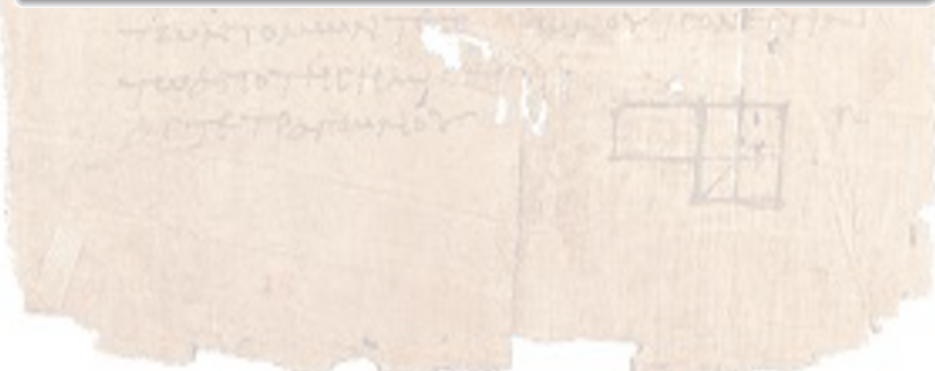
El concepto de magnitudes conmensurables dio lugar a los números racionales, cuyo nombre alude, precisamente, a que tales números representan razones de segmentos conmensurables.



El concepto de magnitudes conmensurables dio lugar a los números racionales, cuyo nombre alude, precisamente, a que tales números representan razones de segmentos conmensurables.

Primeros pasos de las matemáticas: Thales de Mileto (585 a.C.) y Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

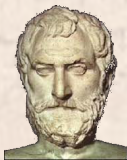
Sus obras no han llegado a nuestros días, ni de forma directa ni indirecta. Son conocidos sólo por la referencia que otros (por ejemplo Platón, Aristóteles, Arquímedes, Proclo -410-485, etc.) hacen de ellos.



El concepto de magnitudes conmensurables dio lugar a los números racionales, cuyo nombre alude, precisamente, a que tales números representan razones de segmentos conmensurables.

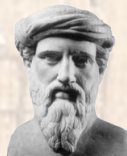
Primeros pasos de las matemáticas: Thales de Mileto (585 a.C.) y Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

Sus obras no han llegado a nuestros días, ni de forma directa ni indirecta. Son conocidos sólo por la referencia que otros (por ejemplo Platón, Aristóteles, Arquímedes, Proclo -410-485, etc.) hacen de ellos.



← Thales de Mileto

Pitágoras de Samos ⇒



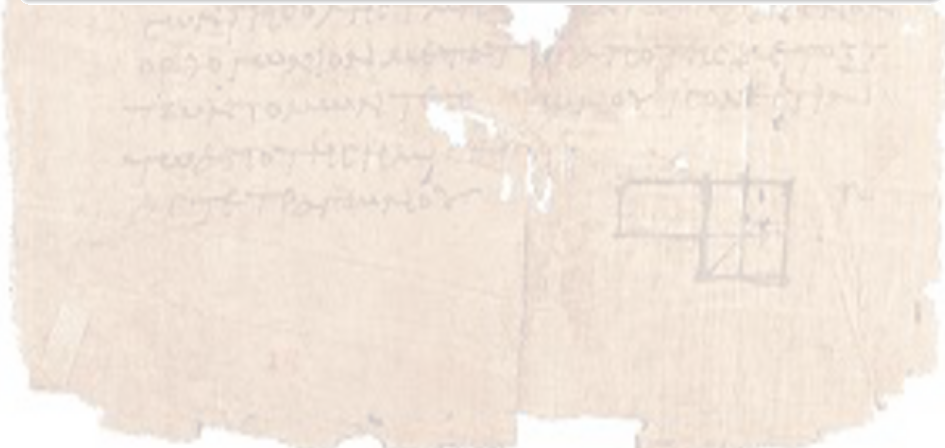


Thales de Mileto (585 a.C.)

Racionalidad: explicación de los fenómenos naturales sin acudir a causas extra-naturales, logró conquistas perdurables en la matemática, mediante la demostración rigurosa de sus propiedades.

Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

No tenemos certeza de la existencia de Pitágoras. Sin duda, existió una escuela Pitagórica donde se mezclaban por igual la ciencia, la filosofía, la mística, la política, los ritos arcaicos. Para ellos un número era un agregado de unidades.



Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

No tenemos certeza de la existencia de Pitágoras. Sin duda, existió una escuela Pitagórica donde se mezclaban por igual la ciencia, la filosofía, la mística, la política, los ritos arcaicos. Para ellos un número era un agregado de unidades.

- (✓) Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo - la unidad -, cuyas partes están separadas - son discontinuas - y tienen fronteras bien definidas. Carácter discreto de los números.

Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

No tenemos certeza de la existencia de Pitágoras. Sin duda, existió una escuela Pitagórica donde se mezclaban por igual la ciencia, la filosofía, la mística, la política, los ritos arcaicos. Para ellos un número era un agregado de unidades.

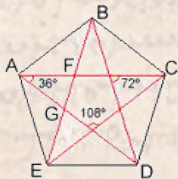
- (✓) Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo - la unidad -, cuyas partes están separadas - son discontinuas - y tienen fronteras bien definidas. Carácter discreto de los números.
- (✓) Solamente consideraban como números los enteros positivos y ni siquiera consideraban como número a la unidad.

Pitágoras de Samos (53 a.C.????)

No tenemos certeza de la existencia de Pitágoras. Sin duda, existió una escuela Pitagórica donde se mezclaban por igual la ciencia, la filosofía, la mística, la política, los ritos arcaicos. Para ellos un número era un agregado de unidades.

- (✓) Un número es una multiplicidad que se obtiene por repetición de un individuo - la unidad -, cuyas partes están separadas - son discontinuas - y tienen fronteras bien definidas. Carácter discreto de los números.
- (✓) Solamente consideraban como números los enteros positivos y ni siquiera consideraban como número a la unidad.
- (✓) Los números no tenían sentido separados de los objetos materiales o ideales a los que enumeran. Así, "tres árboles" tiene sentido, pero "tres" por sí mismo carece de significado. Es decir, un número es un atributo de un grupo de objetos y carece de autonomía propia.

Volviendo al concepto de conmensurabilidad, parecía asumido que dos segmentos cualesquiera deben ser conmensurables. Pues bien, la intuición aquí nos engaña. Algunos historiadores atribuyen este descubrimiento a Hipaso de Metaponto (siglo V a.C), que inicialmente fue pitagórico y quien al estudiar las propiedades geométricas del pentagrama, descubrió la existencia de segmentos inconmensurables.



La razón de la diagonal
sobre el lado es $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$
el número áureo
no es racional.

Hoy en día, tenemos herramientas para demostrar que la raíz cuadrada de un natural n es, o bien un natural, o bien un número real.

Hoy en día, tenemos herramientas para demostrar que la raíz cuadrada de un natural n es, o bien un natural, o bien un número real.

Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Hoy en día, tenemos herramientas para demostrar que la raíz cuadrada de un natural n es, o bien un natural, o bien un número real.

Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Tomemos una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ que coincida con \sqrt{n} .

Hoy en día, tenemos herramientas para demostrar que la raíz cuadrada de un natural n es, o bien un natural, o bien un número real.

Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Tomemos una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ que coincida con \sqrt{n} .

Notemos que la irreducibilidad de $\frac{p}{q}$ nos asegura que

$$q = \min\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt{n} \in \mathbb{N}\}.$$

Hoy en día, tenemos herramientas para demostrar que la raíz cuadrada de un natural n es, o bien un natural, o bien un número real.

Supongamos, por el contrario, que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$.

Tomemos una fracción irreducible $\frac{p}{q}$ que coincida con \sqrt{n} .

Notemos que la irreducibilidad de $\frac{p}{q}$ nos asegura que

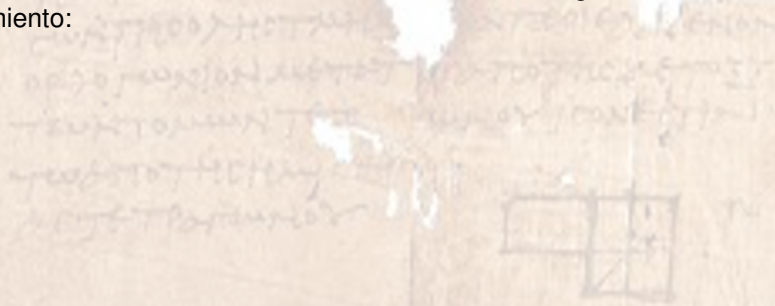
$$q = \min\{k \in \mathbb{N} : k\sqrt{n} \in \mathbb{N}\}.$$

Como hemos supuesto que $\sqrt{n} \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$, al restar su parte entera, $\sqrt{n} - E(\sqrt{n})$, obtenemos un número en el intervalo abierto $(0, 1)$. En este caso $0 < q(\sqrt{n} - E(\sqrt{n})) < q$, y además

$$[(\sqrt{n} - E(\sqrt{n}))q]\sqrt{n} = qn - q\sqrt{n}E(\sqrt{n}) \in \mathbb{N},$$

lo que contradice la minimalidad de q .

En la época de Hipaso de Metaponto (siglo V a.C), no se disponía de las herramientas aritméticas que hemos empleado; no obstante Hipaso es capaz de demostrar la irracionalidad del número áureo con el siguiente razonamiento:



En la época de Hipaso de Metaponto (siglo V a.C), no se disponía de las herramientas aritméticas que hemos empleado; no obstante Hipaso es capaz de demostrar la irracionalidad del número áureo con el siguiente razonamiento:

Consideramos inicialmente un pentágono regular y un pentágono interior construido por las diagonales. Este proceso puede continuarse indefinidamente con el resultado de que vamos obteniendo pentágonos que llegan a ser tan pequeños como queramos, y que nos llevan a la conclusión de que la razón de la diagonal al lado en un pentágono regular no es una razón racional.



Aristóteles menciona otra demostración
basada en la distinción de lo par e impar





Aristóteles menciona otra demostración
basada en la distinción de lo par e impar

Llamemos s a la medida del lado y d a la de la diagonal. Por el teorema de Pitágoras, $d^2 = 2s^2$. Así pues $(\frac{d}{s})^2 = 2$. Escribamos $\frac{d}{s} = \frac{p}{q}$ con $\text{mcd}(p, q) = 1$ y veamos que esto nos lleva a una contradicción. Podemos considerar pues que p y q no son ambos pares. Así $p^2 = 2q^2$ es un número par, y en consecuencia p también lo es, esto es, existe r tal que $p = 2r$. Sustituyendo en la ecuación obtenemos que q tiene que ser par, y esto es contradictorio.

El razonamiento de Hipaso nos ha introducido en un proceso que se puede repetir indefinidamente, es decir un número potencialmente infinito de repeticiones, estamos ante una de las primeras apariciones del concepto de infinito en la historia.

El razonamiento de Hipaso nos ha introducido en un proceso que se puede repetir indefinidamente, es decir un número potencialmente infinito de repeticiones, estamos ante una de las primeras apariciones del concepto de infinito en la historia.

“¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre, ni ninguna otra idea ha estimulado tan intensamente su intelecto”

— David Hilbert (1862-1943).

El razonamiento de Hipaso nos ha introducido en un proceso que se puede repetir indefinidamente, es decir un número potencialmente infinito de repeticiones, estamos ante una de las primeras apariciones del concepto de infinito en la historia.

“¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre, ni ninguna otra idea ha estimulado tan intensamente su intelecto”

— David Hilbert (1862-1943).

Veremos más ejemplos.....

La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, es decir, de los números irracionales, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última. La consecuencia fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.

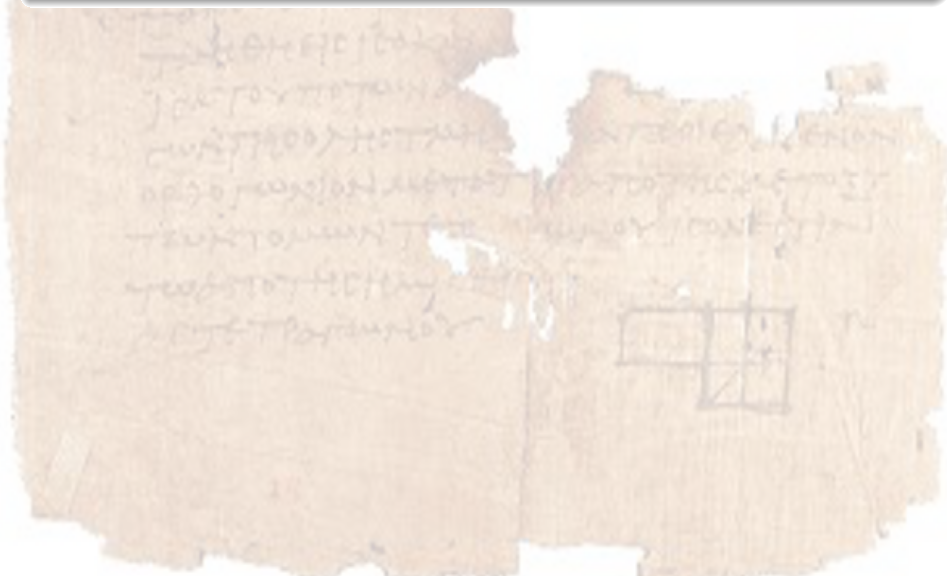
La carencia de una teoría aritmética satisfactoria de las cantidades inconmensurables, es decir, de los números irracionales, hizo que los matemáticos griegos consideraran la Geometría como una ciencia más general que la Aritmética, y dedicaran sus esfuerzos al estudio de la primera en detrimento de la última. La consecuencia fue que durante casi 2000 años, en Europa, casi todo razonamiento matemático riguroso se expresó en lenguaje geométrico.



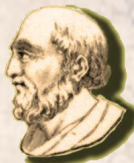
Excepción: Diofanto de Alejandría (214 - 298):

*En su obra llamada Aritmética
resuelve diversos tipos de ecuaciones algebraicas
admitiendo como soluciones números enteros
o números fraccionarios positivos
no solamente como proporciones.*

Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.



Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.

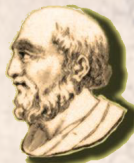


Anaxágoras de Clazomene (500 - 428 a.c.) :

Problemas de cuadraturas:

*dada una figura, construir un cuadrado
con área igual a la de la figura dada.*

Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.



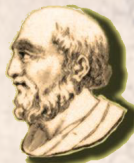
Anaxágoras de Clazomene (500 - 428 a.c.) :

Problemas de cuadraturas:

*dada una figura, construir un cuadrado
con área igual a la de la figura dada.*

Reglas del juego (ver “Elementos de Euclides” (c. 300 a.C.)): Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás en un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.



Anaxágoras de Clazomene (500 - 428 a.c.) :

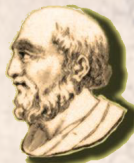
Problemas de cuadraturas:

*dada una figura, construir un cuadrado
con área igual a la de la figura dada.*

Reglas del juego (ver “Elementos de Euclides” (c. 300 a.C.)): Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás en un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- 1 Trazar una recta que una dos puntos.

Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.



Anaxágoras de Clazomene (500 - 428 a.c.) :

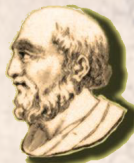
Problemas de cuadraturas:

*dada una figura, construir un cuadrado
con área igual a la de la figura dada.*

Reglas del juego (ver “Elementos de Euclides” (c. 300 a.C.)): Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás en un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- 1 Trazar una recta que una dos puntos.
- 2 Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.

Inicio de la época heroica: mitad del siglo V a.c.



Anaxágoras de Clazomene (500 - 428 a.c.) :

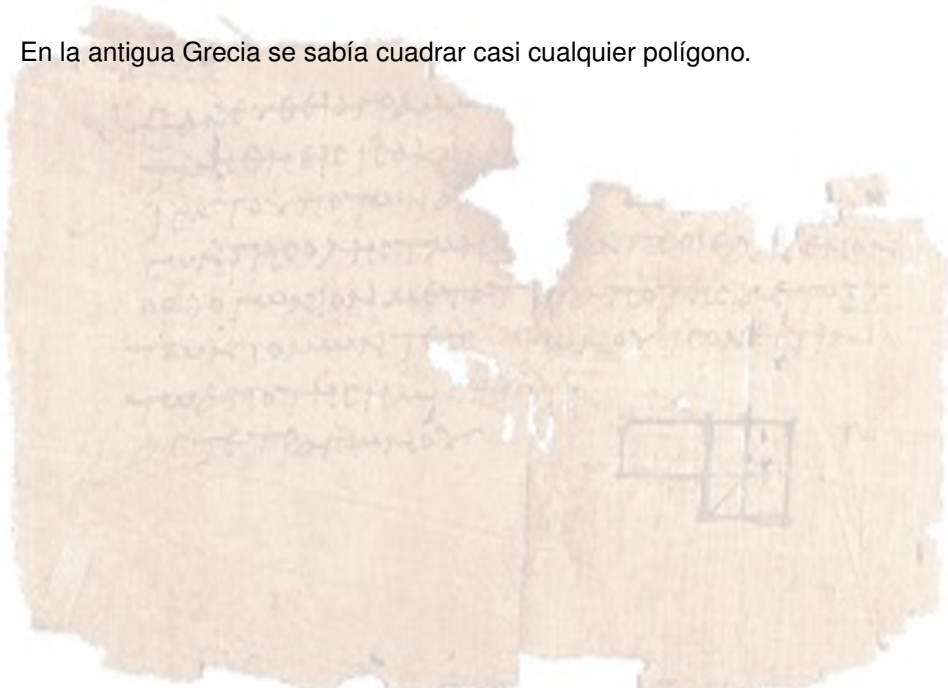
Problemas de cuadraturas:

*dada una figura, construir un cuadrado
con área igual a la de la figura dada.*

Reglas del juego (ver “Elementos de Euclides” (c. 300 a.C.)): Esta construcción debía hacerse con regla no graduada y compás en un número finito de pasos, cada uno de ellos consistente en:

- 1 Trazar una recta que una dos puntos.
- 2 Trazar una circunferencia de centro y radio arbitrarios.
- 3 Intersecar dos de las figuras anteriores.

En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.



En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.

Problemas famosos:

En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.

Problemas famosos:

- 1 Cuadratura del círculo: Mientras estaba en prisión se ocupó del problema de la cuadratura del círculo: Construir con sólo regla y compás un cuadrado con el mismo área que un círculo dado.

En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.

Problemas famosos:

- 1 Cuadratura del círculo: Mientras estaba en prisión se ocupó del problema de la cuadratura del círculo: Construir con sólo regla y compás un cuadrado con el mismo área que un círculo dado.
- 2 Duplicación del cubo: (Pericles - oráculo de Delos-) duplicar el altar cúbico de Apolo. (Dada la arista de un cubo construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero.

En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.

Problemas famosos:

- 1 Cuadratura del círculo: Mientras estaba en prisión se ocupó del problema de la cuadratura del círculo: Construir con sólo regla y compás un cuadrado con el mismo área que un círculo dado.
- 2 Duplicación del cubo: (Pericles - oráculo de Delos-) duplicar el altar cúbico de Apolo. (Dada la arista de un cubo construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero.
- 3 Trisección de un ángulo: Dado un ángulo arbitrario, construir un ángulo igual a un tercio del ángulo dado.

En la antigua Grecia se sabía cuadrar casi cualquier polígono.

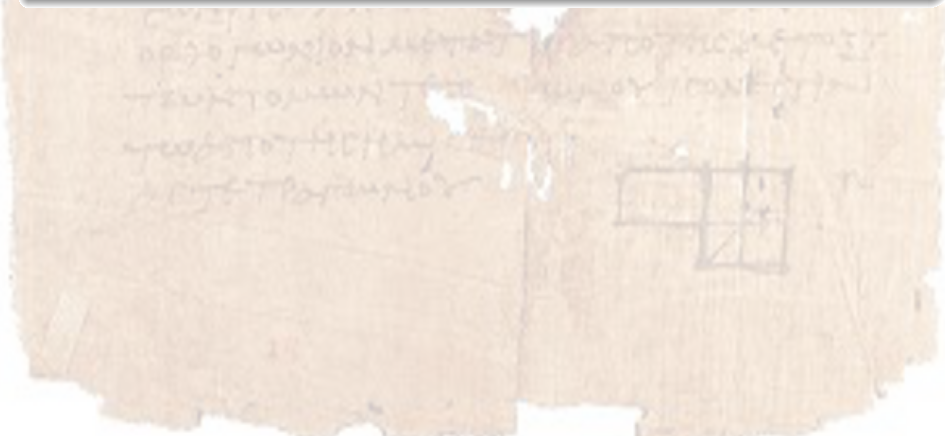
Problemas famosos:

- 1 Cuadratura del círculo: Mientras estaba en prisión se ocupó del problema de la cuadratura del círculo: Construir con sólo regla y compás un cuadrado con el mismo área que un círculo dado.
- 2 Duplicación del cubo: (Pericles - oráculo de Delos-) duplicar el altar cúbico de Apolo. (Dada la arista de un cubo construir, usando únicamente la regla y el compás, la arista de otro cubo que tenga volumen doble que el del primero.
- 3 Trisección de un ángulo: Dado un ángulo arbitrario, construir un ángulo igual a un tercio del ángulo dado.

Más de 2200 años más tarde se iba a demostrar que estos tres problemas eran insolubles con el uso único de la regla y el compás (Teoría de Galois 1811-1832). Pero, ¿cuantos resultados y avances han motivado?

Eudoxo de Cnido (400 - 347 a.C.)

Desarrolló el método exhaustivo, por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas.



Eudoxo de Cnido (400 - 347 a.C.)

Desarrolló el método exhaustivo, por el cual podían lograr la cuadratura de algunas regiones delimitadas por curvas.

Principio de convergencia de Eudoxo:

“Si de cualquier magnitud sustraemos una parte no menor que su mitad, y si del resto sustraemos de nuevo una cantidad no menor que su mitad, y si continuamos repitiendo este procesos de sustracción, terminaremos por obtener como resto una magnitud menor que cualquier magnitud del mismo tipo dada de antemano.”



Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)
Perfecciona el método exhaustivo en su libro
"La Esfera y el Cilindro"

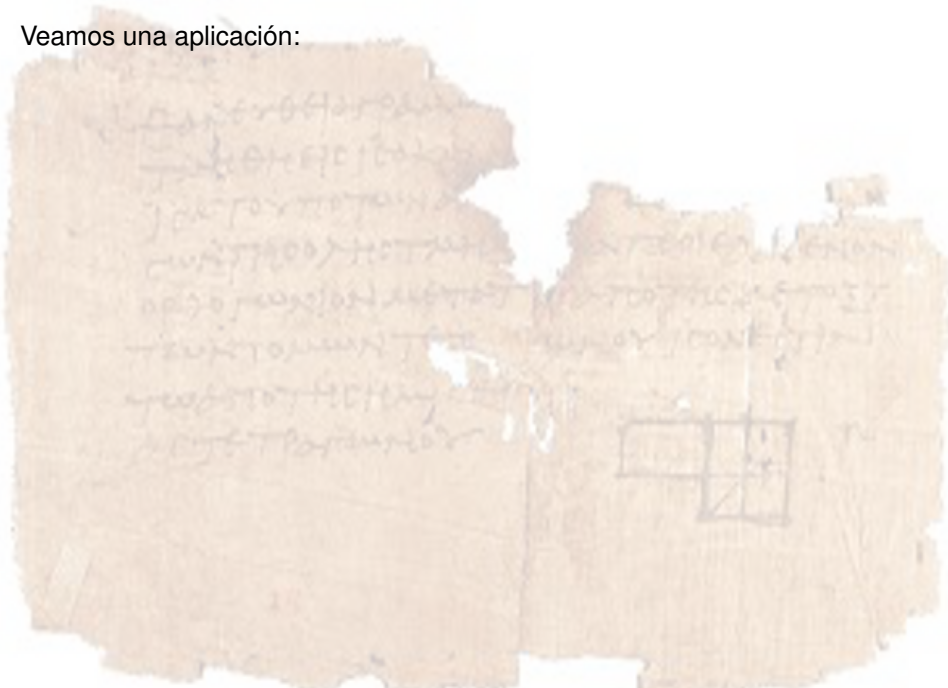


Arquímedes de Siracusa (287 - 212 a.C.)
Perfecciona el método exhaustivo en su libro
"La Esfera y el Cilindro"

Propiedad Arquimediana o Axioma de Arquímedes

"Dadas magnitudes cualesquiera $a > 0$ y $b > 0$, siempre es posible, por pequeña que sea a y grande que sea b , conseguir que un múltiplo conveniente de a exceda a b , es decir existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $na > b$."

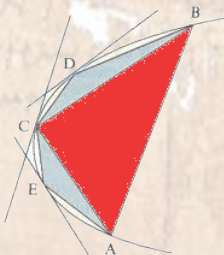
Veamos una aplicación:



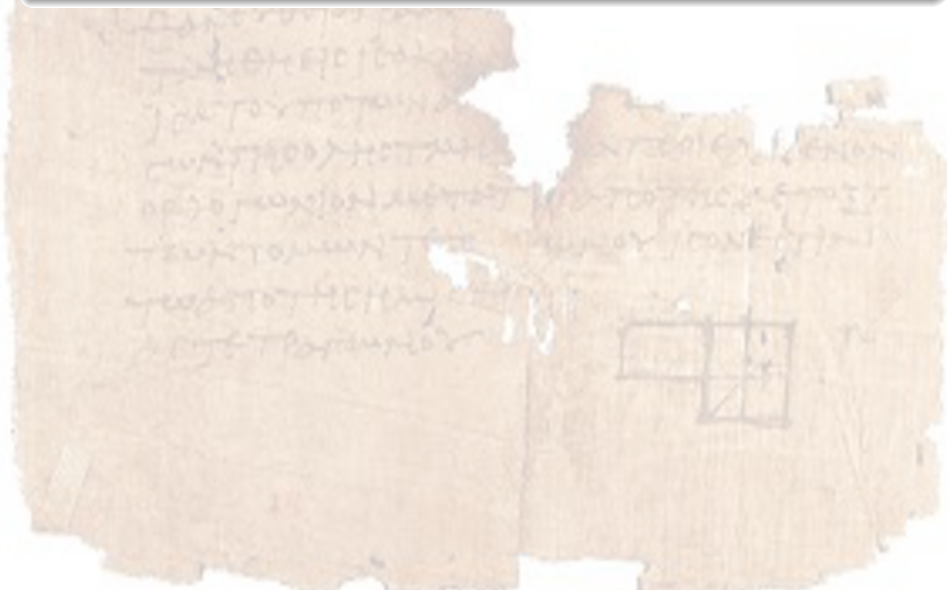
Veamos una aplicación:

Teorema (Arquímedes)

El área de un segmento parabólico determinado por una cuerda es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito formado por los extremos de la cuerda y el vértice del segmento. Donde el vértice de un segmento parabólico es el punto de la parábola en el cual la tangente es paralela a la cuerda que define el segmento.



Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:



Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:

- (✓) Se verifica que el vértice C de un segmento parabólico \overline{AB} es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} .

Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:

- (✓) Se verifica que el vértice C de un segmento parabólico \overline{AB} es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} .
- (✓) El triángulo ACB , cuya base es el segmento \overline{AB} y cuyo otro vértice es el vértice C del segmento parabólico, recibirá el nombre de triángulo inscrito.

Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:

- (✓) Se verifica que el vértice C de un segmento parabólico \overline{AB} es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} .
- (✓) El triángulo ACB , cuya base es el segmento \overline{AB} y cuyo otro vértice es el vértice C del segmento parabólico, recibirá el nombre de triángulo inscrito.
- (✓) En la figura se han representado también los triángulos AEC y CDB inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas \overline{AC} y \overline{CB} .

Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:

- (✓) Se verifica que el vértice C de un segmento parabólico \overline{AB} es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} .
- (✓) El triángulo ACB , cuya base es el segmento \overline{AB} y cuyo otro vértice es el vértice C del segmento parabólico, recibirá el nombre de triángulo inscrito.
- (✓) En la figura se han representado también los triángulos AEC y CDB inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas \overline{AC} y \overline{CB} .
- (✓) Área(AEC) = $\frac{1}{4}$ área(ACO) y área(CDB) = $\frac{1}{4}$ área(COB). Por tanto el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ACB .

Carta que escribe Arquímedes a su amigo Dositheus:

- (✓) Se verifica que el vértice C de un segmento parabólico \overline{AB} es el punto intersección con la parábola de la recta paralela al eje de la parábola que pasa por el punto medio del segmento \overline{AB} .
- (✓) El triángulo ACB , cuya base es el segmento \overline{AB} y cuyo otro vértice es el vértice C del segmento parabólico, recibirá el nombre de triángulo inscrito.
- (✓) En la figura se han representado también los triángulos AEC y CDB inscritos, respectivamente, en los segmentos parabólicos determinados por las cuerdas \overline{AC} y \overline{CB} .
- (✓) Área(AEC) = $\frac{1}{4}$ área(ACO) y área(CDB) = $\frac{1}{4}$ área(COB). Por tanto el área de los dos nuevos triángulos es $\frac{1}{4}$ del área del triángulo ACB .
- (✓) Este proceso se puede repetir indefinidamente. Pero aparece una serie infinita.

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series!!!!

Pero se puede usar la propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes y el principio de convergencia de Eudoxo. Sea K el área del segmento parabólico \overline{AB} .

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series!!!!

Pero se puede usar la propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes y el principio de convergencia de Eudoxo. Sea K el área del segmento parabólico \overline{AB} .

Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

- (✓) Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico ACB es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series!!!!

Pero se puede usar la propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes y el principio de convergencia de Eudoxo. Sea K el área del segmento parabólico \overline{AB} .

Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

- (✓) Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico ACB es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series!!!!

Pero se puede usar la propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes y el principio de convergencia de Eudoxo. Sea K el área del segmento parabólico \overline{AB} .

Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

- (✓) Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico ACB es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

Pero Arquímedes, que no sabe de convergencia de series!!!!

Pero se puede usar la propiedad arquimediana o axioma de Arquímedes y el principio de convergencia de Eudoxo. Sea K el área del segmento parabólico \overline{AB} .

Supongamos que $K > \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S > 0$.

- (✓) Como el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico ACB es la mitad del área del paralelogramo circunscrito, la cual, a su vez, es mayor que el área del segmento, se sigue que el área del triángulo inscrito en un segmento parabólico es mayor que la mitad del área de dicho segmento, lo que permite aplicar el principio de convergencia de Eudoxo.

(✓) En la sucesión $K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \dots$ cada término es menor que la mitad del que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S).$$

Es decir,

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S,$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que: $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4^{n+1}})S$.

- (✓) En la sucesión $K, K - S, K - (S + \frac{1}{4}S), K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S), \dots$ cada término es menor que la mitad del que le precede y, por tanto, en virtud del citado principio, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que

$$K - \frac{4}{3}S > K - (S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S).$$

Es decir,

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S > \frac{4}{3}S,$$

lo que es contradictorio con la igualdad, conocida por Arquímedes, que dice que: $S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S = \frac{4}{3}(1 - \frac{1}{4^{n+1}})S$.

- (✓) Por tanto, no puede ser $K > \frac{4}{3}$.

Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S < 0$.

Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S < 0$.

- (✓) Cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > 1/3\left(\frac{1}{4^n}S\right) = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S\right).$$

- (✓) Lo que implicaría que $K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S$, lo que es absurdo, pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico.

Supongamos que $K < \frac{4}{3}S$; es decir, que $K - \frac{4}{3}S < 0$.

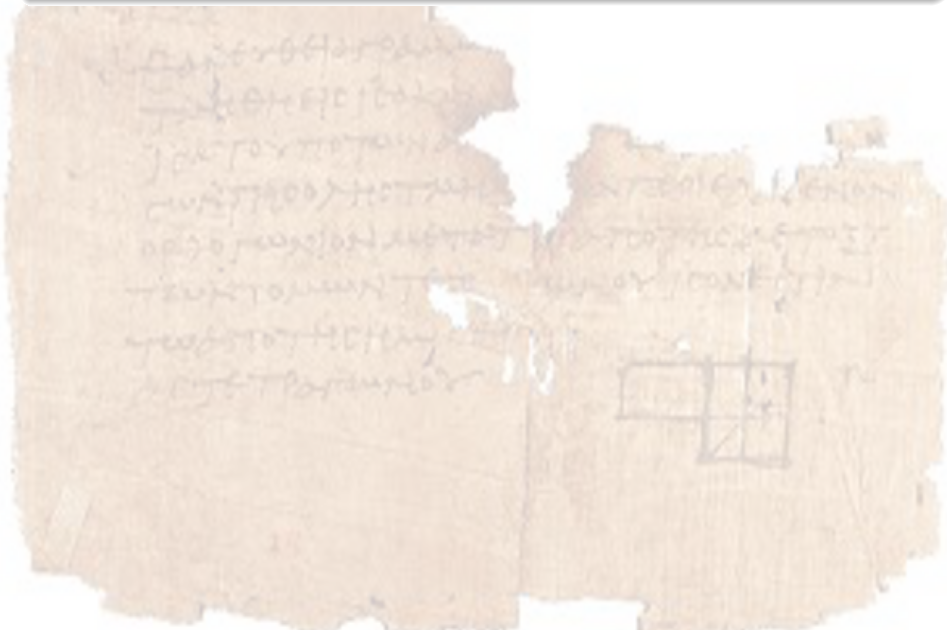
- (✓) Cada una de las áreas $S, \frac{1}{4}S, \frac{1}{16}S, \dots, \frac{1}{4^n}S$ es menor que la mitad de la que le precede y, por tanto, en virtud del principio de convergencia de Eudoxo, podemos concluir que en alguna etapa se tendrá que $\frac{1}{4^n}S < \frac{4}{3}S - K$. Entonces

$$\frac{4}{3}S - K > \frac{1}{4^n}S > 1/3\left(\frac{1}{4^n}S\right) = \frac{4}{3}S - \left(S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S\right).$$

- (✓) Lo que implicaría que $K < S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{16}S + \dots + \frac{1}{4^n}S$, lo que es absurdo, pues la suma de la derecha es el área de un polígono inscrito en el segmento parabólico.

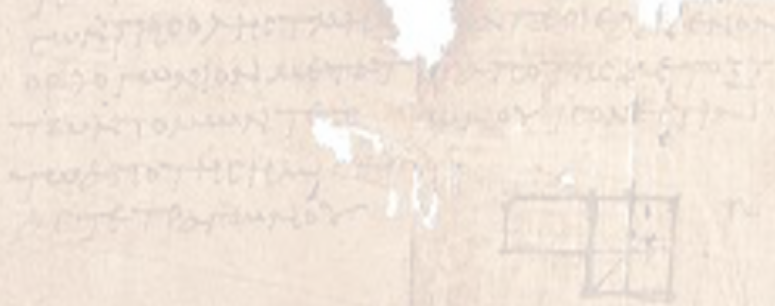
La única posibilidad es $K = \frac{4}{3}S$.

Dicotomía continuo-discreto.



Dicotomía continuo-discreto.

Los pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes. Los elementos últimos que forman una pluralidad se suponía, por una parte, que tenían las características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de las unidades numéricas o de los números.



Dicotomía continuo-discreto.

Los pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes. Los elementos últimos que forman una pluralidad se suponía, por una parte, que tenían las características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de las unidades numéricas o de los números.

Escuela eleática:

movimiento filosófico rival de la de los pitagóricos, de la que Parménides (510-450 a.C.) es el filósofo más famoso. Su concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres y/o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.

Dicotomía continuo-discreto.

Los pitagóricos habían supuesto que el espacio y el tiempo pueden ser imaginados como constituidos por puntos e instantes. Los elementos últimos que forman una pluralidad se suponía, por una parte, que tenían las características de la unidad geométrica, el punto, y por otra las características de las unidades numéricas o de los números.

Escuela eleática:

movimiento filosófico rival de la de los pitagóricos, de la que Parménides (510-450 a.C.) es el filósofo más famoso. Su concepto del Ser excluye toda posibilidad de nueva generación de seres y/o sustancias y, por tanto, el cambio y el movimiento son mera ilusión, porque ambos presuponen que lo que no es pueda llegar a ser.



Zenón de Elea (450 a.C.)

discípulo de Parménides ideó sus paradojas o aporías para desacreditar a quienes negaban las ideas de Parménides y demostrar la inconsistencia de los conceptos de multiplicidad y de divisibilidad.

Paradojas de Zenon:

Paradojas de Zenon:

Dicotomía:

“... antes de que un objeto en movimiento pueda recorrer una distancia dada, debe recorrer en primer lugar la mitad de esta distancia, pero aún antes de recorrer un primer cuarto de la mitad inicial, y así indefinidamente, a través de una cantidad infinita de subdivisiones. El corredor que quiere iniciar su carrera debe realizar un número infinito de etapas sin ninguna primera en un tiempo finito, pero es obviamente imposible agotar una colección infinita y, por lo tanto el mismo comienzo del movimiento es imposible.

Aquiles y la tortuga (subdivisión es en sentido progresivo):

Aquiles deja una distancia inicial a la tortuga. Cuando Aquiles llega a la posición inicial de la tortuga ésta se encuentra en una posición más avanzada, cuando Aquiles llega a esta posición la tortuga se encuentra en una tercera posición, y así el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles permanece corriendo sin alcanzar jamás a la tortuga que le lleva unos pocos metros de ventaja. El veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.



Aquiles y la tortuga (subdivisión es en sentido progresivo):

Aquiles deja una distancia inicial a la tortuga. Cuando Aquiles llega a la posición inicial de la tortuga ésta se encuentra en una posición más avanzada, cuando Aquiles llega a esta posición la tortuga se encuentra en una tercera posición, y así el proceso continúa indefinidamente, con el resultado de que el veloz Aquiles permanece corriendo sin alcanzar jamás a la tortuga que le lleva unos pocos metros de ventaja. El veloz Aquiles no puede alcanzar a la lenta tortuga.



Estas paradojas parten del supuesto de que el espacio y el tiempo son infinitamente divisibles y el movimiento continuo y uniforme. Zenón no niega el movimiento sino su inteligibilidad.

La filosofía del atomismo:

Los átomos son indivisibles e invisibles, infinitos en número y de diversas formas y tamaños, perfectamente sólidos, indestructibles y permanentes. Se admite la pluralidad y el movimiento y niegan la infinita divisibilidad del espacio y la materia y afirman que cualquier magnitud contiene elementos últimos indivisibles. (Demócrito de Abdera (460-370 a.C.), Leucipo (450-420 a.C.)). Principio de Cavalieri.

La filosofía del atomismo:

Los átomos son indivisibles e invisibles, infinitos en número y de diversas formas y tamaños, perfectamente sólidos, indestructibles y permanentes. Se admite la pluralidad y el movimiento y niegan la infinita divisibilidad del espacio y la materia y afirman que cualquier magnitud contiene elementos últimos indivisibles. (Demócrito de Abdera (460-370 a.C.), Leucipo (450-420 a.C.)). Principio de Cavalieri.

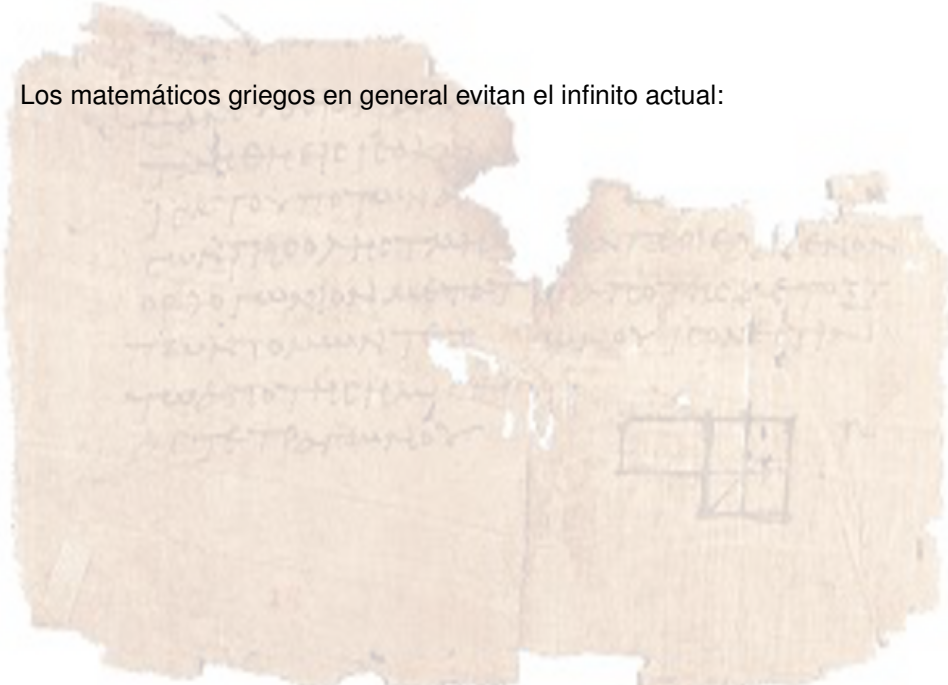
Defensa del continuo:

Aristóteles para defender la divisibilidad infinita debía refutar el argumento atomista. Su solución es muy original, pues afirma que aunque una magnitud continua puede ser dividida en cualquier punto, no puede ser dividida en todo punto. Un continuo tiene la propiedad de densidad, es decir, entre dos cualesquiera de sus puntos siempre hay otro punto del continuo, por tanto, es imposible llegar, por divisiones sucesivas, a reducir un continuo a puntos.

El infinito en Grecia:

Fue Aristóteles el que se enfrentó con más audacia y mejor método al problema del infinito. Existen dos clases diferentes de infinito: el infinito potencial y el infinito actual. El infinito actual está concebido como obra terminada y cuya existencia niega. El infinito potencial es un proceso constante proceso secuencial de adición o de subdivisión sin final. “El infinito potencial nunca será plenamente realizado pues no hay un infinito tal que después sea en acto.”

Los matemáticos griegos en general evitan el infinito actual:



Los matemáticos griegos en general evitan el infinito actual:

Euclides:

“Segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos”, en una clara alusión al infinito potencial, pero no rectas infinitas”. Igualmente, al enunciar que los números primos son infinitos, lo expresa diciendo que “Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta”.

Los matemáticos griegos en general evitan el infinito actual:

Euclides:

“Segmentos cuya longitud la podemos hacer todo lo larga que queramos”, en una clara alusión al infinito potencial, pero no rectas infinitas”. Igualmente, al enunciar que los números primos son infinitos, lo expresa diciendo que “Hay más números primos que cualquier cantidad de números primos propuesta”.

El método exhaustivo parece consistir en una aproximación al área seguida de un proceso límite. No es así. Aunque su nombre sugiere “agotamiento” de una figura plana por polígonos inscritos, el método, como ya hemos indicado, estaba basado en un razonamiento muy cuidadoso de doble reducción al absurdo (llamado razonamiento apagógico), precisamente para evitar la consideración de un infinito actual.

Los orígenes del Cálculo

En el siglo XVII, las universidades (Bolonía, París, Oxford etc.) se han consolidado como verdaderos focos de difusión del conocimiento científico. A la sombra de estas universidades existen algunos grupos de científicos más o menos organizados tales como la Accademia dei Lincei (a la que perteneció Galileo) y la Accademia del Cimento en Italia, el Cabinet Du Puy en Francia, el Invisible College en Inglaterra y aparecen otros nuevos como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París. A partir de este momento la matemática se desarrolló más bien movida por su propia lógica interna que por fuerzas de tipo económico, social o tecnológico.

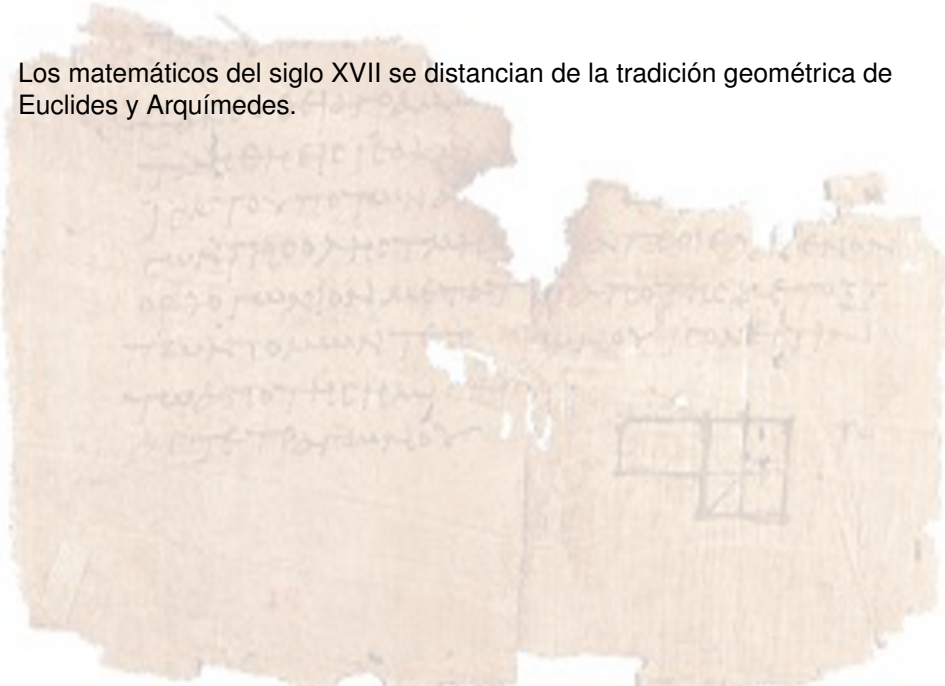
Los orígenes del Cálculo

En el siglo XVII, las universidades (Bolonía, París, Oxford etc.) se han consolidado como verdaderos focos de difusión del conocimiento científico. A la sombra de estas universidades existen algunos grupos de científicos más o menos organizados tales como la Accademia dei Lincei (a la que perteneció Galileo) y la Accademia del Cimento en Italia, el Cabinet Du Puy en Francia, el Invisible College en Inglaterra y aparecen otros nuevos como la Royal Society (1660) en Londres y la Académie des Sciences (1666) en París. A partir de este momento la matemática se desarrolló más bien movida por su propia lógica interna que por fuerzas de tipo económico, social o tecnológico.

Antecedentes del Cálculo Diferencial Moderno:

Esta es la época de René Descartes (1596- 1650), Pierre de Fermat (1601 - 1665), Evangelista Torricelli (1608- 1647), Gilles Persone de Roberval (1602- 1675), Girard Desargues (1591 - 1661) y Blaise Pascal (1623 - 1662).

Los matemáticos del siglo XVII se distancian de la tradición geométrica de Euclides y Arquímedes.



Los matemáticos del siglo XVII se distancian de la tradición geométrica de Euclides y Arquímedes.

“Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.”

— J. Kepler en *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615).

Los matemáticos del siglo XVII se distancian de la tradición geométrica de Euclides y Arquímedes.

“Podríamos obtener demostraciones perfectas de los libros de Arquímedes, a nosotros no nos repele la espinosa lectura de ellos.”

— J. Kepler en *Nova stereometria doliorum vinariorum* (1615).

“Basta hacer esta observación [sobre las condiciones para poder aplicar el método de Arquímedes] una vez, para no obligarse a recordar y a insistir constantemente sobre un artificio bien conocido de todos los geómetras . . . Así alcanzamos la conclusión que podría ser fácilmente conformada por una más prolija prueba llevada a cabo a la manera de Arquímedes.”

— P. Fermat en *De acuationum localium in quadraticis infinitis parabolis el hiperbolis* (tratado de cuadraturas) (1658).

“Este procedimiento es altamente heterodoxo, pero puede verificarse mediante el bien conocido método apagógico [la doble reducción al absurdo del método de exhaustión] de figuras inscritas y circunscritas, lo que es superfluo, porque la frecuente iteración produce náusea en el lector. Cualquiera ducho en Matemáticas puede realizar tal prueba.”

— J. Wallis en Arithmetica infinitorum (1656).

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhaustión que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un agotamiento de la figura a determinar. Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhaustión, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos

El método de integración geométrica que se consideraba ideal durante la primera mitad del siglo XVII era el método de exhaustión que había sido inventado por Eudoxo y perfeccionado por Arquímedes. El nombre es desafortunado porque la idea central del método es la de evitar el infinito y por lo tanto este método no lleva a un agotamiento de la figura a determinar. Entre los matemáticos del siglo XVII era general el deseo de encontrar un método para obtener resultados y que, a diferencia del método de exhaustión, fuera directo. Y mejor que mejor si el nuevo método, aparte de dar resultados, pudiera ser utilizado para demostrarlos

La integración precede a la derivación!!!



René Descartes (1596-1650))

*filósofo, matemático y físico francés,
considerado como el padre de la filosofía moderna,
así como uno de los nombres más destacados
de la revolución científica.*



René Descartes (1596-1650))
*filósofo, matemático y físico francés,
considerado como el padre de la filosofía moderna,
así como uno de los nombres más destacados
de la revolución científica.*

El método que Descartes:

Descomponer los problemas complejos en partes progresivamente más sencillas hasta hallar los más básicos. En ese punto deberían captarse las naturalezas simples, que se presentan a la razón de un modo evidente, proceder a partir de ellas, por síntesis, a reconstruir todo el complejo, exigiendo a cada nueva relación establecida entre ideas simples la misma evidencia de éstas. **¿No es esto Análisis Matemático?**

- (✓) Entre las consecuencias de su obra “La géométrie” (1636), obra puramente teórica sin intención práctica, podemos considerar la primera aparición de la Geometría Analítica, disciplina que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$, donde f representa una cierta expresión matemática. Coordenadas Cartesianas para expresiones de Geometría Analítica.

- (✓) Entre las consecuencias de su obra “La géométrie” (1636), obra puramente teórica sin intención práctica, podemos considerar la primera aparición de la Geometría Analítica, disciplina que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$, donde f representa una cierta expresión matemática. Coordenadas Cartesianas para expresiones de Geometría Analítica.
- (✓) Aunque como sabemos, la teoría de funciones sacó finalmente un gran partido de la obra de Descartes, pero lo cierto es que la idea de «forma» o de «función» no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana.

- (✓) Entre las consecuencias de su obra “La géométrie” (1636), obra puramente teórica sin intención práctica, podemos considerar la primera aparición de la Geometría Analítica, disciplina que permite representar figuras geométricas mediante fórmulas del tipo $f(x, y) = 0$, donde f representa una cierta expresión matemática. Coordenadas Cartesianas para expresiones de Geometría Analítica.
- (✓) Aunque como sabemos, la teoría de funciones sacó finalmente un gran partido de la obra de Descartes, pero lo cierto es que la idea de «forma» o de «función» no pareció jugar ningún papel entre las motivaciones que condujeron a la geometría cartesiana.
- (✓) Descartes también afirma que el problema de hallar la normal (o, equivalentemente, la tangente) a una curva es de gran importancia, pero el método que desarrolla en “La géométrie” no es ni directo ni fácil de aplicar.



Pierre de Fermat (1601 - 1665)
jurista y matemático francés.



Pierre de Fermat (1601 - 1665)
jurista y matemático francés.

- (✓) Estudió derecho en Toulouse, para incorporarse más tarde a las tareas del parlamento local primero como abogado y después como miembro del consejo. Como resultado de su gusto por la literatura clásica incluida la ciencia y la matemática hacia el año 1629 comenzó a hacer descubrimientos matemáticos de una gran importancia. Los trabajos de Fermat se publicaron de forma póstuma.



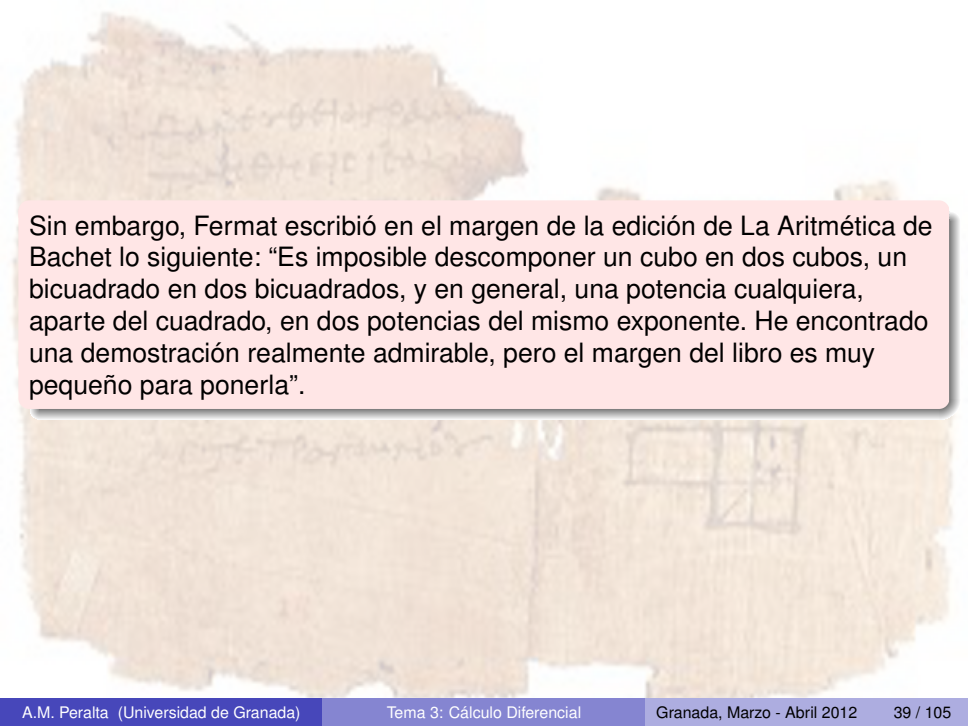
Pierre de Fermat (1601 - 1665)
jurista y matemático francés.

- (✓) Estudió derecho en Toulouse, para incorporarse más tarde a las tareas del parlamento local primero como abogado y después como miembro del consejo. Como resultado de su gusto por la literatura clásica incluida la ciencia y la matemática hacia el año 1629 comenzó a hacer descubrimientos matemáticos de una gran importancia. Los trabajos de Fermat se publicaron de forma póstuma.
- (✓) Lo que sí parece totalmente demostrado, es que la introducción del método de coordenadas deba atribuirse a Fermat y no a Descartes, sin embargo su obra no ejerció tanta influencia como la Geometría de Descartes, debido a la tardanza de su edición y al engorroso lenguaje algebraico utilizado.

- (✓) Dejó muchas proposiciones sin demostrar, pero nunca se demostró que Fermat se equivocara. Los matemáticos han logrado demostrar casi todas las proposiciones que dejó sin demostrar. Solo quedaba pendiente el teorema conocido como el último teorema de Fermat: Si n es un número entero mayor que 2, entonces no existen números enteros a , b y c (con a , b , c no nulos), tales que se cumpla la igualdad:

$$a^n + b^n = c^n.$$

El teorema fue conjeturado por Pierre de Fermat en 1637, pero no fue demostrado hasta 1995 por Andrew Wiles ayudado por el matemático Richard Taylor. La búsqueda de una demostración estimuló el desarrollo de la teoría algebraica de números en el siglo XIX y la demostración del teorema de la modularidad en el siglo XX.



Sin embargo, Fermat escribió en el margen de la edición de La Aritmética de Bachet lo siguiente: “Es imposible descomponer un cubo en dos cubos, un bicuadrado en dos bicuadrados, y en general, una potencia cualquiera, aparte del cuadrado, en dos potencias del mismo exponente. He encontrado una demostración realmente admirable, pero el margen del libro es muy pequeño para ponerla”.

The background of the slide features a collage of ancient papyrus fragments. On the left, there are several pieces of papyrus with faint, handwritten text in an ancient script, likely Demotic. On the right, a larger fragment shows a geometric diagram consisting of a rectangle divided into a 2x2 grid of squares. The top-left square is further subdivided into four smaller squares by a diagonal line. To the right of this diagram, there is some faint handwritten text. The overall image has a warm, brownish-tan color palette, characteristic of aged papyrus.

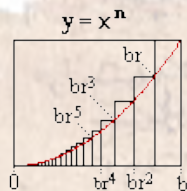
La Integral precede a la derivada

La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2, \dots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geoméricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

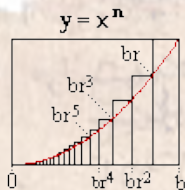
La cuadratura de las curvas definidas por $y = x^n$ donde n es un número natural o bien un entero negativo $n \neq -1$, había sido realizada para $n = 1, 2, \dots, 9$ por Cavalieri, aunque podemos remontarnos hasta Arquímedes que había resuelto geoméricamente los casos correspondientes a $n = 1, 2, 3$. Fermat, con una ingeniosa idea, logró obtener la cuadratura de áreas limitadas por arcos de hipérbolas generalizadas $x^n y^m = 1$ ($m, n \in \mathbb{N}$).

Fermat seguía un método clásico de exhaustión, pero con una variante que consistía en considerar rectángulos infinitesimales inscritos/circunscritos en la figura a cuadrar cuyas bases estaban en progresión geométrica. Fermat considera al principio las hipérbolas $yx^n = k$ y manifiesta:

“Digo que todas estas infinitas hipérbolas, excepto la de Apolonio, que es la primera, pueden ser cuadradas por el método de la progresión geométrica, de acuerdo a un procedimiento uniforme general.”

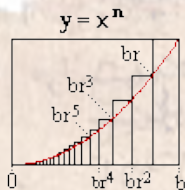


Fijemos un escalar $r < 1$, la base de cada rectángulo será $(br^k - br^{k+1})$, mientras que la altura estará determinada por $f(br^k) = b^n r^{kn}$.



Fijemos un escalar $r < 1$, la base de cada rectángulo será $(br^k - br^{k+1})$, mientras que la altura estará determinada por $f(br^k) = b^n r^{kn}$.

- 1 El área bajo la curva $f(x) = x^n$ entre $x = 0$ y $x = b$, (en nuestra notación $\int_0^b x^n dx$) se computa tomando las áreas de un número infinito de subintervalos; subintervalos mas grandes a x cerca de b , mas pequeños cuanto más cerca de 0 .



Fijemos un escalar $r < 1$, la base de cada rectángulo será $(br^k - br^{k+1})$, mientras que la altura estará determinada por $f(br^k) = b^n r^{kn}$.

- 1 El área bajo la curva $f(x) = x^n$ entre $x = 0$ y $x = b$, (en nuestra notación $\int_0^b x^n dx$) se computa tomando las áreas de un número infinito de subintervalos; subintervalos mas grandes a x cerca de b , mas pequeños cuanto más cerca de 0.
- 2 Aproximando mediante rectángulos inscritos/circunscritos, y combinando la construcción con el método de exhaustion de Arquímedes, tenemos:

$$\int_0^b x^n dx > (br)^n (b - br) + (br^2)^n (br - br^2) + (br^3)^n (br^2 - br^3) + \dots$$

$$\int_0^b x^n dx < b^n (b - br) + (br)^n (br - br^2) + (br^2)^n (br^2 - br^3) + \dots$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (br^{k+1})^n (br^k - br^{k+1}) < \int_0^b x^n dx < \sum_{k=0}^{\infty} (br^k)^n (br^k - br^{k+1})$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (br^{k+1})^n (br^k - br^{k+1}) < \int_0^b x^n dx < \sum_{k=0}^{\infty} (br^k)^n (br^k - br^{k+1})$$

$$b^{n+1} \frac{(1-r)r^n}{1-r^{n+1}} < \int_0^b x^n dx < b^{n+1} \frac{1-r}{1-r^{n+1}}$$

Es decir,

$$\sum_{k=0}^{\infty} (br^{k+1})^n (br^k - br^{k+1}) < \int_0^b x^n dx < \sum_{k=0}^{\infty} (br^k)^n (br^k - br^{k+1})$$

$$b^{n+1} \frac{(1-r)r^n}{1-r^{n+1}} < \int_0^b x^n dx < b^{n+1} \frac{1-r}{1-r^{n+1}}$$

Si tendemos $r \rightarrow 1$ podemos asegurar que los rectángulos tienen base tendiendo a cero y por tanto:

$$b^{n+1} \frac{1}{n+1} < \int_0^b x^n dx < b^{n+1} \frac{1}{n+1}$$



John Wallis (1616-1703)
matemático inglés.

- 1 Publicó en 1655 un tratado titulado “Arithmetica infinitorum”.
- 2 Ejerció una notable influencia sobre Newton y Leibniz, a quienes precedió.
- 3 Fue precisamente Wallis quien introdujo en 1655 en la obra “De Sectionibus Conicis”, el símbolo del lazo del amor ∞ con el significado de infinito.
- 4 Desarrolló una notación estándar para las potencias, ampliándola desde los números enteros positivos hasta los números racionales: $x^{-1} = \frac{1}{x}$,
 $x^{-p} = \frac{1}{x^p}$, $x^{\frac{1}{p}} = \sqrt[p]{x}$, $x^{\frac{q}{p}} = \sqrt[p]{x^q}$, ...

Regla de Wallis para la integración de polinomios



Bonaventura Cavalieri (Milán, 1598 - Bolonia, 1647)
jesuita y matemático italiano.
Fue alumno de Galileo Galilei.

Método de los indivisibles

En el tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota*, publicado en 1635, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los indivisibles de área y volumen respectivamente.

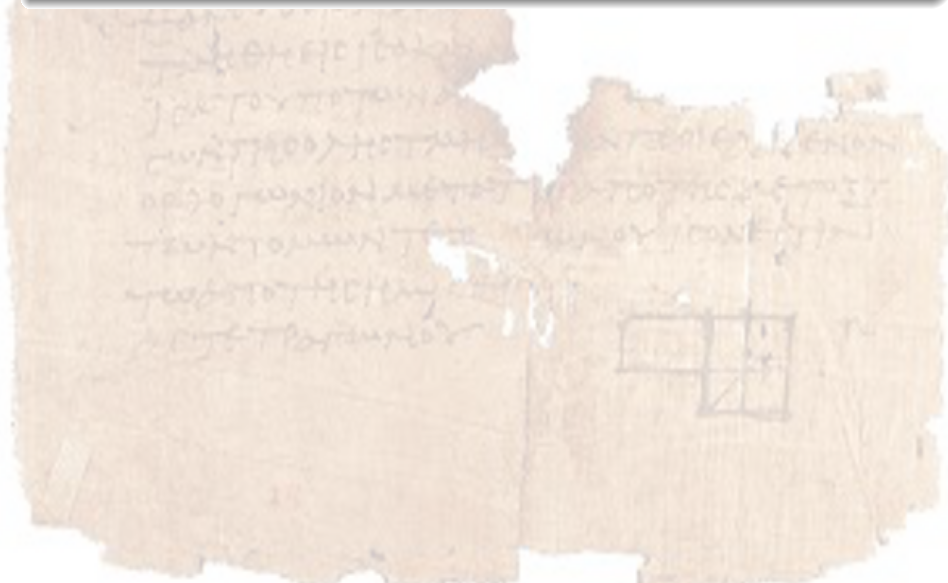
Método de los indivisibles

En el tratado *Geometria Indivisibilibus Continuorum Nova quadam Ratione Promota*, publicado en 1635, siguiendo ideas de Kepler y Galileo, desarrolló una técnica geométrica para calcular cuadraturas. En este método, un área de una región plana se considera formada por un número infinito de segmentos paralelos, cada uno de ellos se interpreta como un rectángulo infinitamente estrecho; un volumen se considera compuesto por un número infinito de áreas planas paralelas. A estos elementos los llama los indivisibles de área y volumen respectivamente.

En líneas generales los “indivisibilistas” mantenían, como expresa Cavalieri en sus *Exercitationes Geometricae Sex* (1647), que una línea está hecha de puntos como una sarta de cuentas; el plano está hecho de líneas, como un tejido de hebras y un sólido de áreas planas como un libro de hojas.

Regla de Wallis para la integración de polinomios

¿Área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \dots$) y sobre el segmento $[0, a]$?



Regla de Wallis para la integración de polinomios

¿Área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \dots$) y sobre el segmento $[0, a]$?

Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k . Por tanto, si dividimos el segmento de longitud a en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \dots + (nh)^k$$

mientras que en el rectángulo de base a y altura a^k , es $a^k + \dots + a^k$. Comparando la razón entre las áreas se obtiene el cociente

$$\frac{0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \dots + (nh)^k}{a^k + \dots + a^k} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + \dots + n^k}.$$

Regla de Wallis para la integración de polinomios

¿Área bajo la curva $y = x^k$ ($k = 1, 2, \dots$) y sobre el segmento $[0, a]$?

Siguiendo a Cavalieri, Wallis considera la región formada por un número infinito de líneas verticales paralelas, cada una de ellas con longitud igual a x^k . Por tanto, si dividimos el segmento de longitud a en n partes de longitud $h = a/n$, donde n es infinito, entonces la suma de estas infinitas líneas es del tipo

$$0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \dots + (nh)^k$$

mientras que en el rectángulo de base a y altura a^k , es $a^k + \dots + a^k$. Comparando la razón entre las áreas se obtiene el cociente

$$\frac{0^k + h^k + (2h)^k + (3h)^k + \dots + (nh)^k}{a^k + \dots + a^k} = \frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + \dots + n^k}.$$

Wallis observa ciertas regularidades en las mismas y, sin demostración explícita, afirma que para $n = \infty$ y para todo $k = 1, 2, \dots$ se tiene

$$\frac{0^k + 1^k + 2^k + 3^k + \dots + n^k}{n^k + n^k + n^k + n^k + \dots + n^k} = \frac{1}{k+1}.$$

Por tanto el área que se quiere calcular A verifica $\frac{A}{a^{k+1}} = \frac{1}{k+1}$.

Wallis afirma algo más fuerte, con una demostración poco convincente que

$$\int_0^a t^k dt = \frac{a^{k+1}}{k+1},$$

para todo $k \neq -1$.

Derivadas y tangentes:

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente.

Derivadas y tangentes:

El concepto de derivada presupone los de función y de límite funcional, los cuales tuvieron una larga evolución hasta alcanzar su significado actual, por eso la definición de derivada es relativamente reciente.

“Primero, la derivada fue usada, después descubierta, explorada y desarrollada y, finalmente, definida”

— *Judith V. Grabiner (historiadora de las matemáticas).*



Estudiando los lugares geométricos para curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$, Fermat descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o mínimo:

Fermat compara el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor $f(x + h)$ en un punto próximo; en general estos dos valores serán claramente distintos, pero en una “cumbre” o en el fondo de un “valle” de una curva “lisa”, la diferencia es casi imperceptible.

Estudiando los lugares geométricos para curvas polinómicas de la forma $y = f(x)$, Fermat descubrió un método muy ingenioso para hallar los puntos en los que la función toma un valor máximo o mínimo:

Fermat compara el valor de $f(x)$ en un cierto punto con el valor $f(x + h)$ en un punto próximo; en general estos dos valores serán claramente distintos, pero en una “cumbre” o en el fondo de un “valle” de una curva “lisa”, la diferencia es casi imperceptible.

En 1637 escribe una memoria titulada “Methodus ad disquirendam maximam et minimam” (Método para la investigación de máximos y mínimos). En ella se establecía el primer procedimiento general conocido para calcular máximos y mínimos. Debemos observar que el método de Fermat da una condición necesaria para los máximos y mínimos, pero esa condición no es suficiente y tampoco distingue máximos de mínimos. Es un método puramente algebraico y algorítmico, no geométrico ni analítico.

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- (1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- (1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
- (2) Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado.

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- (1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
- (2) Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado.
- (3) Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e , en términos de cualquier grado.

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- (1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
- (2) Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado.
- (3) Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e , en términos de cualquier grado.
- (4) Se “adigualará” para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.

Método de Fermat

Toda la teoría de la investigación de máximos y mínimos supone la consideración de dos incógnitas y la única regla siguiente:

- (1) Sea a una incógnita cualquiera del problema (que tenga una, dos o tres dimensiones, según convenga al enunciado).
- (2) Se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a en términos de cualquier grado.
- (3) Se sustituirá a continuación la incógnita original a por $a + e$, y se expresará la cantidad máxima o mínima por medio de a y e , en términos de cualquier grado.
- (4) Se “adigualará” para hablar como Diofanto, las dos expresiones de la cantidad máxima o mínima.
- (5) Se eliminarán los términos comunes de ambos lados, tras lo cual resultará que a ambos lados habrá términos afectados de e o de una de sus potencias.

- (6) Se dividirán todos los términos por e , o por alguna potencia superior de e , de modo que desaparecerá la e , de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.

- (6) Se dividirán todos los términos por e , o por alguna potencia superior de e , de modo que desaparecerá la e , de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
- (7) Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.

- (6) Se dividirán todos los términos por e , o por alguna potencia superior de e , de modo que desaparecerá la e , de al menos uno de los términos de uno cualquiera de los dos miembros.
- (7) Se suprimirán, a continuación, todos los términos donde todavía aparece la e o una de sus potencias, y se iguala lo que queda, o bien si en uno de los miembros no queda nada, se igualará, lo que viene a ser lo mismo, los términos afectados con signo positivo a los afectados con signo negativo.
- (8) La resolución de esta última ecuación dará el valor de a , que conducirá al máximo o mínimo, utilizando la expresión original.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- 1 Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- 1 Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
- 2 El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- 1 Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
- 2 El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
- 3 Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b , el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- 1 Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
- 2 El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
- 3 Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b , el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.
- 4 Se debe adigular al precedente: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- ❶ Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
- ❷ El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
- ❸ Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b , el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.
- ❹ Se debe adigular al precedente: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$.
- ❺ Suprimiendo términos comunes y dividiendo todos los términos por e y eliminando e tenemos: $b = 2a$.

Fermat ilustraba su método hallando el punto de un segmento \overline{AC} que hace máxima el área del rectángulo $\overline{AE} \times \overline{EC}$. Pongamos $\overline{AC} = b$.

- 1 Sea a uno de los segmentos, el otro será $b - a$.
- 2 El producto del que se debe encontrar el máximo es $ba - a^2$.
- 3 Sea ahora $a + e$ el primer segmento de b , el segundo segmento será $b - a - e$, y el producto de segmentos: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2$.
- 4 Se debe adigular al precedente: $ba - a^2 + be - 2ae - e^2 \sim ba - a^2$.
- 5 Suprimiendo términos comunes y dividiendo todos los términos por e y eliminando e tenemos: $b = 2a$.
- 6 Para resolver el problema se debe tomar por tanto la mitad de b .

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \Delta x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

$$1 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \equiv 0.$$

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \Delta x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

$$1 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \equiv 0.$$

$$2 \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv 0.$$

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \Delta x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

$$1 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \equiv 0.$$

$$2 \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv 0.$$

$$3 \quad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)_{\Delta x \equiv 0} = 0.$$

Es tentador reproducir este razonamiento en términos actuales. Hagamos $a = x$, $e = \Delta x$, y pongamos $f(x) = x(b - x)$.

$$1 \quad f(x + \Delta x) - f(x) \equiv 0.$$

$$2 \quad \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \equiv 0.$$

$$3 \quad \left(\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right)_{\Delta x \equiv 0} = 0.$$

$$4 \quad f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} = 0.$$

Cálculo de Tangentes

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. Con la invención de la geometría analítica, aparecen una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales geométricos.

Cálculo de Tangentes

Los matemáticos de la antigüedad sabían cómo trazar tangentes a diversos tipos de curvas. El concepto de tangencia de los griegos es estático y, naturalmente, geométrico. Inicialmente, la tangente se considera como una recta que toca a la curva sin cortarla. Esta definición resultaba apropiada para la circunferencia pero no lo era para otras curvas. Con la invención de la geometría analítica, aparecen una enorme variedad de nuevas curvas para cuyo estudio no servían los métodos tradicionales geométricos.

En el periodo de 1630 a 1660 empiezan a usarse técnicas en las que podemos apreciar el uso de derivadas. Suelen ser técnicas específicas para resolver problemas concretos que con frecuencia no se justifican sino que, simplemente, se comprueba que proporcionan soluciones correctas. Cuando Descartes y Fermat comienzan a aplicar la geometría analítica, redefinen conceptos antiguos, adaptándolos a su nueva geometría. Esto inspirará el nacimiento del Cálculo diferencial moderno en Barrow y en Newton.



Isaac Barrow (1630-1677)
teólogo, profesor y matemático inglés.



Isaac Barrow (1630-1677)
teólogo, profesor y matemático inglés.

- (✓) Completó su educación en el Trinity College, Cambridge, apoyado por su tío de homónimo nombre (quién más tarde fue obispo de St. Asaph), y que en ese tiempo era Miembro de la Junta de Gobierno del colegio. Muy a menudo aparece descrito como bajo de estatura, flaco y de pálido aspecto y enfermizo, despreocupado en sus vestimentas y un empedernido fumador. Destacó especialmente en matemáticas; tras graduarse en 1648, le fue concedido un puesto de investigación en 1649.

- (✓) En 1663 fue elegido primer profesor Lucasiano en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663). En este puesto fue sucedido por su alumno Isaac Newton.

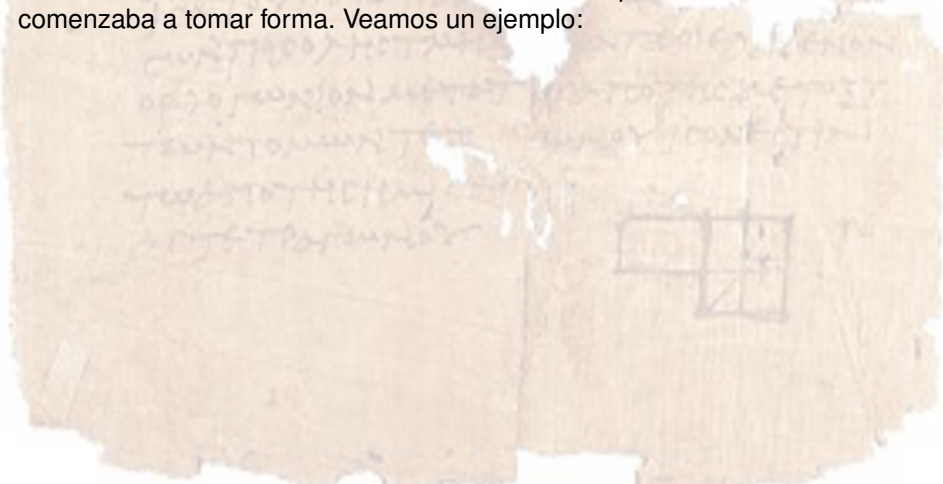
- (✓) En 1663 fue elegido primer profesor Lucasiano en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663). En este puesto fue sucedido por su alumno Isaac Newton.
- (✓) Editó las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras “Lectiones opticae” (1669) y “Lectiones geometricae” (1670) en la edición de las cuales participó Newton.

- (✓) En 1663 fue elegido primer profesor Lucasiano en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663). En este puesto fue sucedido por su alumno Isaac Newton.
- (✓) Editó las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras “*Lectioes opticae*” (1669) y “*Lectioes geometricae*” (1670) en la edición de las cuales participó Newton.
- (✓) Su aportación más importante a las Matemáticas fue la unión del cálculo diferencial e integral. Para algunos historiadores de las matemáticas, había sido precisamente Barrow quien más cerca estuvo del cálculo diferencial e integral antes de Newton. Por ejemplo, se supone que Barrow era consciente de que los problemas de la tangente y del cálculo de áreas eran inversos.

- (✓) En 1663 fue elegido primer profesor Lucasiano en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663). En este puesto fue sucedido por su alumno Isaac Newton.
- (✓) Editó las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras “*Lectiones opticae*” (1669) y “*Lectiones geometricae*” (1670) en la edición de las cuales participó Newton.
- (✓) Su aportación más importante a las Matemáticas fue la unión del cálculo diferencial e integral. Para algunos historiadores de las matemáticas, había sido precisamente Barrow quien más cerca estuvo del cálculo diferencial e integral antes de Newton. Por ejemplo, se supone que Barrow era consciente de que los problemas de la tangente y del cálculo de áreas eran inversos.
- (✓) En 1669, cuando fue llamado a ocupar el puesto de capellán del rey Carlos II, Barrow logró que a Newton le dieran la Cátedra Lucasiana en Cambridge.

- (✓) En 1663 fue elegido primer profesor Lucasiano en Cambridge, siendo el primero en ocupar la cátedra creada por Henry Lucas (¿1610?-1663). En este puesto fue sucedido por su alumno Isaac Newton.
- (✓) Editó las obras de Euclides, de Apolonio y de Arquímedes, a la vez que publicaba sus propias obras “*Lectiones opticae*” (1669) y “*Lectiones geometricae*” (1670) en la edición de las cuales participó Newton.
- (✓) Su aportación más importante a las Matemáticas fue la unión del cálculo diferencial e integral. Para algunos historiadores de las matemáticas, había sido precisamente Barrow quien más cerca estuvo del cálculo diferencial e integral antes de Newton. Por ejemplo, se supone que Barrow era consciente de que los problemas de la tangente y del cálculo de áreas eran inversos.
- (✓) En 1669, cuando fue llamado a ocupar el puesto de capellán del rey Carlos II, Barrow logró que a Newton le dieran la Cátedra Lucasiana en Cambridge.

Uno de los grandes asuntos a los que respondió el cálculo fue el de calcular áreas bajo curvas, ya con geometría de coordenadas, y un tema que es similar al de aproximar figuras por medio de otras; en la Antigüedad se usó el método de exhaustión en esa dirección. En el tiempo de Barrow, el Cálculo comenzaba a tomar forma. Veamos un ejemplo:



Uno de los grandes asuntos a los que respondió el cálculo fue el de calcular áreas bajo curvas, ya con geometría de coordenadas, y un tema que es similar al de aproximar figuras por medio de otras; en la Antigüedad se usó el método de exhaustión en esa dirección. En el tiempo de Barrow, el Cálculo comenzaba a tomar forma. Veamos un ejemplo:

Calculamos el área bajo la curva $y = x^2$ entre 0 y a . Dividimos el segmento en n partes de longitud $\frac{a}{n}$. ¿Cómo se aproxima el área? Por medio de la suma de los rectángulos de base siempre $\frac{a}{n}$. Es decir, tenemos:

$$\begin{aligned}\text{área} &= \frac{a}{n} \left(\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \left(2\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \left(3\frac{a}{n}\right)^2 + \frac{a}{n} \left(4\frac{a}{n}\right)^2 + \dots + \frac{a}{n} \left(n\frac{a}{n}\right)^2 \\ &= \left(\frac{a}{n}\right)^3 (1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2).\end{aligned}$$

Cuando n es muy grande $\frac{1}{n}$ y $\frac{1}{n^2}$ tienden a cero y se eliminan.

Otra de las herramientas a las que saca gran partido Barrow es al triángulo característico o triángulo diferencial.

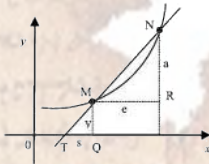
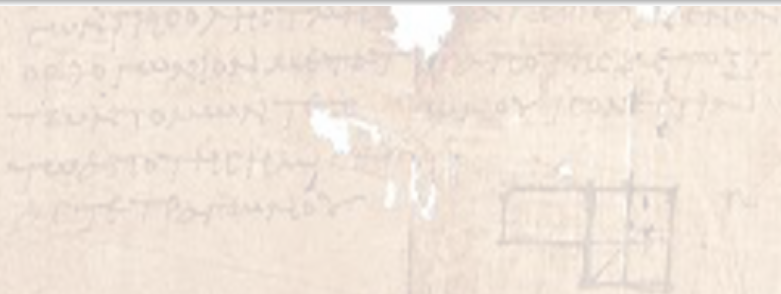


Figura 3. El método de Barrow.

Partiendo del triángulo MRN , que resulta de un incremento MR , como este triángulo es semejante al MTQ , resulta que la pendiente de la tangente $\frac{MQ}{QT}$ es igual a $\frac{NR}{MR}$. Barrow afirma que cuando el arco MN es muy pequeño podemos identificarlo con el segmento MN de la tangente en M . El triángulo MRN de la figura de la derecha, en el cual MN es considerado a la vez como un arco de la curva y como parte de la tangente, es el triángulo característico o diferencial. Ya había sido usado mucho antes por Pascal y otros en problemas de cuadraturas.

Método de las Tangentes de Barrow

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.



Método de las Tangentes de Barrow

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

Consideremos la curva $x^3 + y^3 = r^3$ y calculemos su pendiente en un punto (x, y) .

❶ Como el punto $(x + e, y + a)$ está en la curva, tendremos

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

Método de las Tangentes de Barrow

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

Consideremos la curva $x^3 + y^3 = r^3$ y calculemos su pendiente en un punto (x, y) .

- 1 Como el punto $(x + e, y + a)$ está en la curva, tendremos

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

- 2 Desarrollando y eliminando las potencias de a y e de grado mayor que uno tenemos $3x^2e + 3y^2a = 0$.

Método de las Tangentes de Barrow

El método de Barrow es parecido al de Fermat, la diferencia es que Barrow considera incrementos independientes de las dos variables con el propósito de calcular el cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Parece que Barrow no conocía directamente la obra de Fermat.

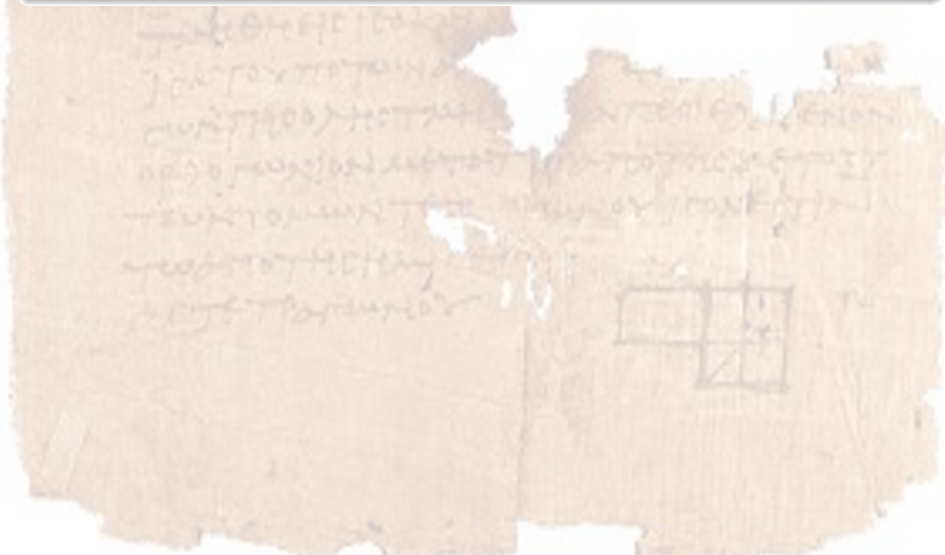
Consideremos la curva $x^3 + y^3 = r^3$ y calculemos su pendiente en un punto (x, y) .

- 1 Como el punto $(x + e, y + a)$ está en la curva, tendremos

$$(x + e)^3 + (y + a)^3 = r^3$$

- 2 Desarrollando y eliminando las potencias de a y e de grado mayor que uno tenemos $3x^2e + 3y^2a = 0$.
- 3 Por tanto $\frac{a}{e} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{x^2}{y^2}$.

Curvas Parametrizadas



Curvas Parametrizadas

Geometría Euclídea en el \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Curvas Parametrizadas

Geometría Euclídea en el \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Necesitamos un “metro” para medir distancias entre vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Existen muchas opciones de “medir” distancias en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , todas ellas equivalentes. No obstante, nos restringiremos a la *norma Euclídea* en el plano y en el espacio.

Curvas Parametrizadas

Geometría Euclídea en el \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3

Necesitamos un “metro” para medir distancias entre vectores de \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 . Existen muchas opciones de “medir” distancias en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 , todas ellas equivalentes. No obstante, nos restringiremos a la *norma Euclídea* en el plano y en el espacio.

Producto escalar Euclídeo:

Es una aplicación $\langle \cdot / \cdot \rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ($n \in \{2, 3\}$), definida mediante la expresión

$$\langle (x_1, x_2, x_3) / (y_1, y_2, y_3) \rangle := \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$



Propiedades del producto escalar Euclídeo:

- 1 (Simetría) $\langle x/y \rangle = \langle y/x \rangle$, para todo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{R}^3 .
- 2 (Bi-linealidad) $\langle \lambda x + \beta y/z \rangle = \lambda \langle x/z \rangle + \beta \langle y/z \rangle$, para todo x, y, z en \mathbb{R}^3 , $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
- 3 (Positividad) $\langle x/x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y $\langle x/x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Propiedades del producto escalar Euclídeo:

- 1 (Simetría) $\langle x/y \rangle = \langle y/x \rangle$, para todo $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{R}^3 .
- 2 (Bi-linealidad) $\langle \lambda x + \beta y/z \rangle = \lambda \langle x/z \rangle + \beta \langle y/z \rangle$, para todo x, y, z en \mathbb{R}^3 , $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
- 3 (Positividad) $\langle x/x \rangle \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^3$ y $\langle x/x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Norma y distancia Euclídeas:

$$\begin{aligned} \|\cdot\| : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \quad (n \in \{2, 3\}), & d : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \|(x_1, x_2, x_3)\| &:= \sqrt{\langle x/x \rangle} = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}, & d(x, y) &= \|x - y\| \end{aligned}$$



Propiedades:

- 1 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$.
- 2 (D. Triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo x, y en \mathbb{R}^3 .
- 3 (Positividad) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Propiedades:

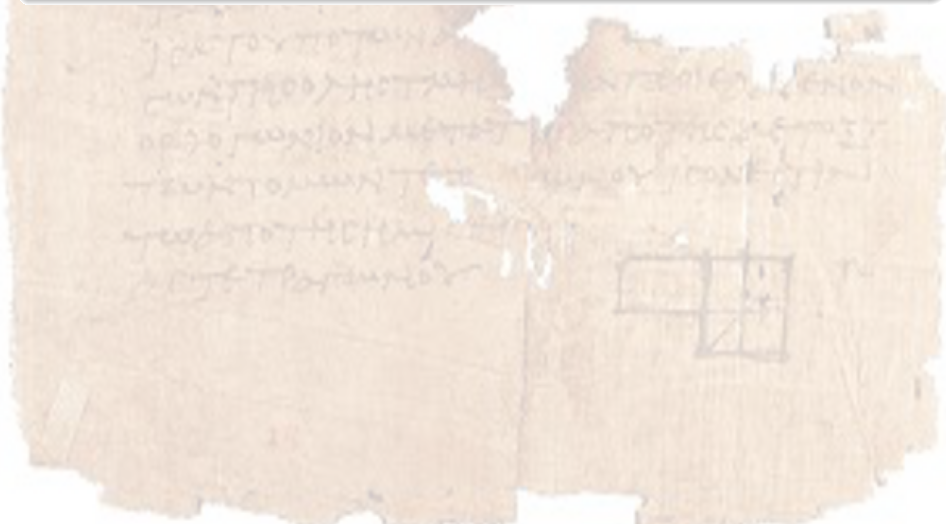
- 1 $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$, para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^3$.
- 2 (D. Triangular) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, para todo x, y en \mathbb{R}^3 .
- 3 (Positividad) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
- 4 (Simetría) $d(x, y) = d(y, x)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.
- 5 $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
- 6 (D. Triangular) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$, para todo x, y, z en \mathbb{R}^3 .



Propiedad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x/y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.



Propiedad de Cauchy-Schwarz:

$$|\langle x/y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Si x e y son vectores no nulos, podemos asegurar que

$$-1 \leq \frac{\langle x/y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

Propiedad de Cauchy-Schwarz:

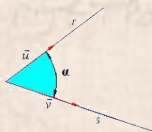
$$|\langle x/y \rangle| \leq \|x\| \|y\|,$$

para todo $x, y \in \mathbb{R}^3$.

Si x e y son vectores no nulos, podemos asegurar que

$$-1 \leq \frac{\langle x/y \rangle}{\|x\| \|y\|} \leq 1.$$

En consecuencia, existe un **único** ángulo $\alpha \in [0, \pi]$ ($\alpha = \arccos \left(\frac{\langle x/y \rangle}{\|x\| \|y\|} \right)$), verificando que $\langle x/y \rangle = \|x\| \|y\| \cos(\alpha)$.



Este número α se denomina
“ángulo entre los vectores x e y ”



Diremos que dos vectores x e y en \mathbb{R}^3 son ortogonales ($x \perp y$) si, y solo si, $\langle x/y \rangle = 0$, es decir, cuando x e y son perpendiculares.

Diremos que dos vectores x e y en \mathbb{R}^3 son ortogonales ($x \perp y$) si, y solo si, $\langle x/y \rangle = 0$, es decir, cuando x e y son perpendiculares.

Quando la métrica Euclídea se reemplaza por otra métrica, este resultado deja de ser cierto.

Diremos que dos vectores x e y en \mathbb{R}^3 son ortogonales ($x \perp y$) si, y solo si, $\langle x/y \rangle = 0$, es decir, cuando x e y son perpendiculares.

Quando la métrica Euclídea se reemplaza por otra métrica, este resultado deja de ser cierto.

Producto vectorial en \mathbb{R}^3

Dados dos vectores $x = (x_1, x_2, x_3)$ e $y = (y_1, y_2, y_3)$ en \mathbb{R}^3 , definimos su producto vectorial como

$$\begin{aligned} x \wedge y = x \times y &:= \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} x_1 & x_3 \\ y_1 & y_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{vmatrix} \right) \end{aligned}$$

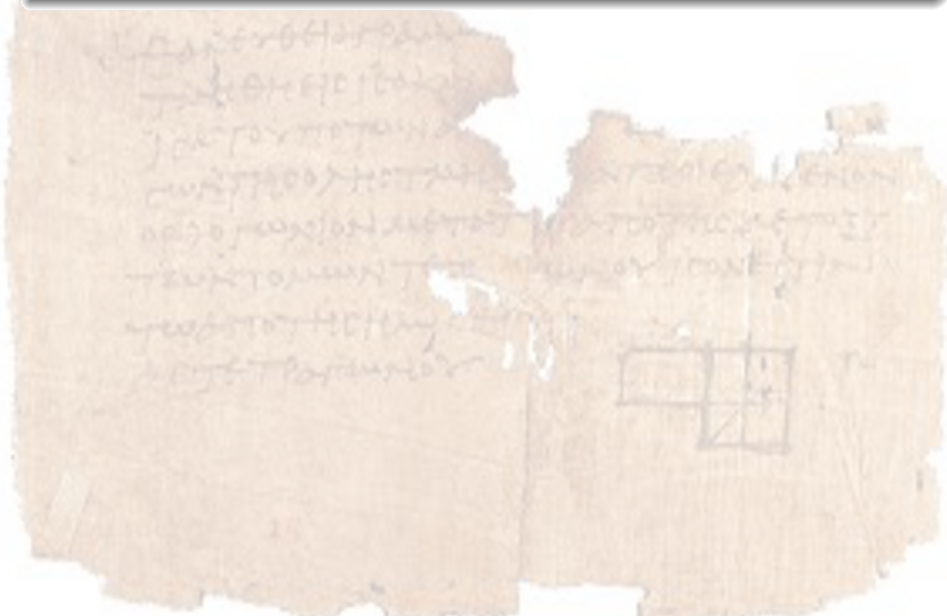


Propiedades:

- ❶ (anti-conmutatividad) $x \wedge y = -y \wedge x$.
- ❷ (linealidad) $(\alpha x + \beta y) \wedge z = \alpha x \wedge z + \beta y \wedge z$.
- ❸ $x \wedge y \perp y, x$.
- ❹ $\|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x/y \rangle^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 \sin^2(\alpha)$.

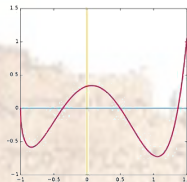


Curvas en el plano y en el espacio



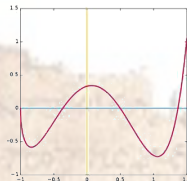
Gráficas de funciones reales:

$$\{(x, f(x)) : f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \in A\}$$



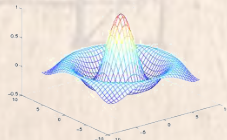
Gráficas de funciones reales:

$$\{(x, f(x)) : f : A \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \in A\}$$



Gráficas de funciones de dos variables:

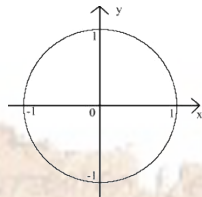
$$\{(x, y, f(x, y)) : f : A \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, x \in A\}$$





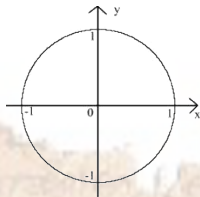
Curvas en Forma Implícita:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 = 1\}$$



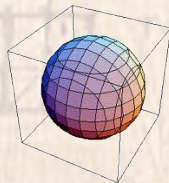
Curvas en Forma Implícita:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : g(x, y) = x^2 + y^2 = 1\}$$



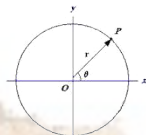
Superficies en Forma Implícita:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

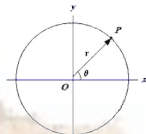




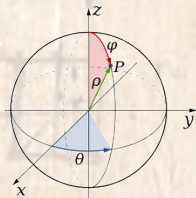
Curvas parametrizadas:
 $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$
 $x, y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones



Curvas parametrizadas:
 $(x(t), y(t)) = (\cos(t), \sin(t)) \in \mathbb{R}^2$
 $x, y : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ funciones



Superficies parametrizadas:
 $(x(\varphi, \theta), y(\varphi, \theta), z(\varphi, \theta)) \in \mathbb{R}^3$
 $x(\varphi, \theta) = \sin(\varphi) \cos(\theta), y(\varphi, \theta) = \sin(\varphi) \sin(\theta),$
 $z(\varphi, \theta) = \cos(\varphi)$
 $x, y, z : I \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ funciones





Curva Parametrizada:

Es una aplicación

$$\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son tres funciones continuas.

Curva Parametrizada:

Es una aplicación

$$\gamma : [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto (x(t), y(t), z(t)),$$

donde $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son tres funciones continuas.

$\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son llamados punto inicial y punto final, respectivamente. γ es cerrada cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva es llamada simple cuando es inyectiva. Una curva de Jordan es una curva cerrada y simple.

Curva Parametrizada:

Es una aplicación

$$\begin{aligned}\gamma &: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \\ t &\mapsto (x(t), y(t), z(t)),\end{aligned}$$

donde $x, y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ son tres funciones continuas.

$\gamma(a)$ y $\gamma(b)$ son llamados punto inicial y punto final, respectivamente. γ es cerrada cuando $\gamma(a) = \gamma(b)$. Una curva es llamada simple cuando es inyectiva. Una curva de Jordan es una curva cerrada y simple.

Longitud de la curva

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \|\mathbf{v}(t)\| dt = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$



Cuando γ es derivable, podemos definir el vector velocidad

$$v(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Cuando γ es derivable, podemos definir el vector velocidad

$$v(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

Cuando el vector velocidad es no nulo (es decir, en curvas suaves) el vector tangente viene dado por la expresión:

$$T(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}.$$

Cuando γ es derivable, podemos definir el vector velocidad

$$v(t) = \gamma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)).$$

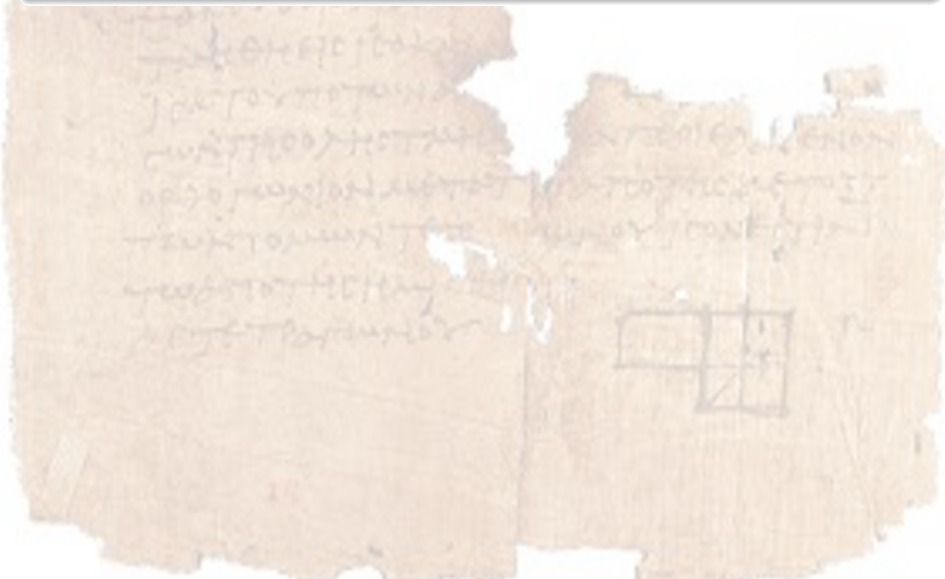
Cuando el vector velocidad es no nulo (es decir, en curvas suaves) el vector tangente viene dado por la expresión:

$$T(t) = \frac{v(t)}{\|v(t)\|}.$$

Si se dan las condiciones necesarias para poder tomar derivadas de orden dos y dividir por las normas correspondientes, podemos definir los vectores normal y binormal a γ mediante las expresiones

$$N(t) = \frac{T'(t)}{\|T'(t)\|} \text{ y } B(t) = T(t) \wedge N(t).$$

Triedro de Frenet



Triedro de Frenet

(Loading Triedro.gif)



Notando mediante $v(t) = \|v(t)\|$ a la *velocidad escalar*, se puede demostrar que la aceleración satisface

$$a(t) = v'(t) = v'(t)T(t) + v(t)\|T'(t)\|N(t);$$

Notando mediante $v(t) = \|v(t)\|$ a la *velocidad escalar*, se puede demostrar que la aceleración satisface

$$a(t) = v'(t) = v'(t)T(t) + v(t)\|T'(t)\|N(t);$$

Aceleración tangencial:

$$a_T(t) = v'(t)T(t)$$

Aceleración normal:

$$a_N(t) = v(t)\|T'(t)\|N(t)$$



Curvatura

$$k(t) = \frac{\|\gamma'(t) \wedge \gamma''(t)\|}{\|\gamma'(t)\|^3}$$

Radio de curvatura

$$\rho(t) = \frac{1}{k(t)}$$



Curvas como invenciones o descubrimientos

“Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una contrucción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione.”

— John von Neumann (1903-1957) Matemático
húngaro-estadounidense.

Curvas como invenciones o descubrimientos

“Las ciencias no tratan de explicar, incluso apenas tratan de interpretar, construyen modelos principalmente. Por modelo, se entiende una contrucción matemática que, con la adición de ciertas interpretaciones verbales, describe los fenómenos observados. La justificación de tal construcción matemática es sólo y precisamente que se espera que funcione.”

— John von Neumann (1903-1957) Matemático
húngaro-estadounidense.

“No hay certidumbre allí donde no es posible aplicar ninguna de las ciencias matemáticas ni ninguna de las basadas en las matemáticas.”

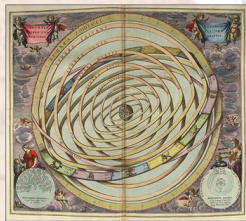
— Leonardo Da Vinci (1452-1519).



Modelo Aristotélico: Aristóteles recurre a un modelo físico basado en esferas de éter en las que se mueven los planetas. Estas esferas se van acelerando y frenando unas con otras. El complejo mecanismo necesitaría de 56 esferas distintas para poder explicar los movimientos aparentes de los planetas.



ARISTOTELIS
(384 a. C. - 322 a. C.)



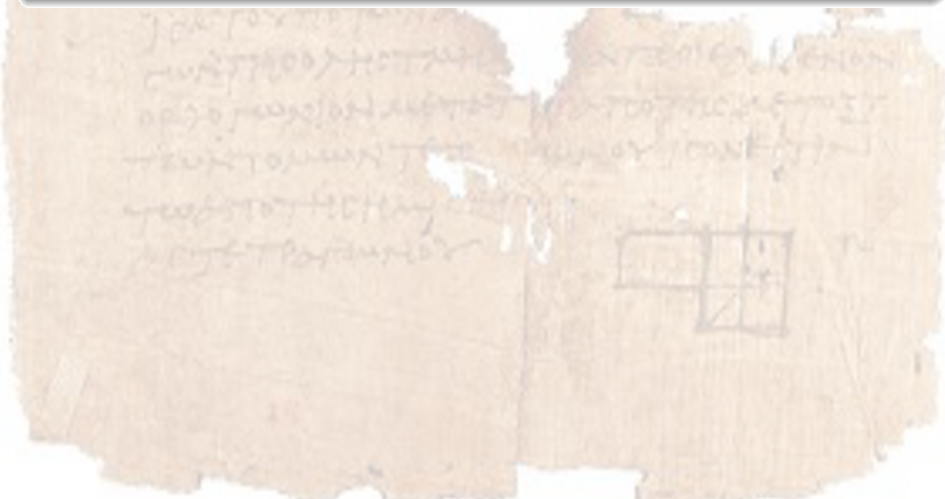
Once, all learned men "knew" that the Earth stood at the center of the universe, and once, the public treasury was the source of prosperity.



Klaudios Ptolemeios
c. AD 90 - c. AD 160



El modelo Aristotélico es profundamente complicado para ser descrito matemáticamente. Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear modelos matemáticos muy complejos para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico (¡algunos astros avanzan y retroceden!).



El modelo Aristotélico es profundamente complicado para ser descrito matemáticamente. Los matemáticos y astrónomos tendrán que crear modelos matemáticos muy complejos para hacer encajar las observaciones del movimiento de los astros con el modelo aristotélico (**¡algunos astros avanzan y retroceden!**).

Claudio Ptolomeo (siglo II d.C.), en su obra “*Síntesis Matemática*”, para explicar el movimiento de los planetas respetando la máxima de que sólo se pueden mover en órbitas circulares inventa un ingenioso modelo geométrico con curvas parametrizadas introduciendo los epiciclos.



Epíclídes - Hipocíclídes

(epíclíde.l.swf)

(hipocíclíde.l.swf)

(cardíde.l.swf)

(Epítroquíde.l.swf)

Epicycloide:

$$x(\theta) = (R + r) \cos(\theta) - r \cos\left(\frac{R + r}{r} \theta\right)$$

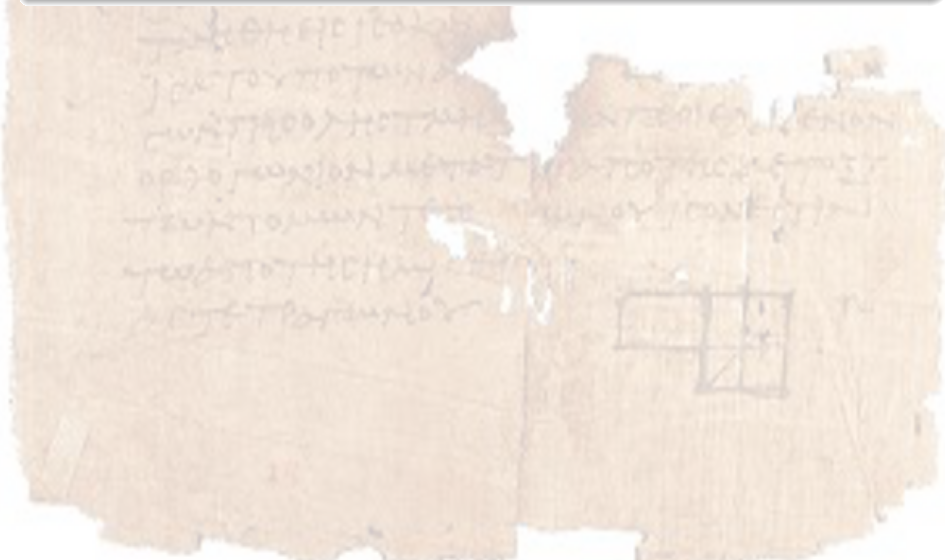
$$y(\theta) = (R + r) \sin(\theta) - r \sin\left(\frac{R + r}{r} \theta\right)$$

Hipocicloide:

$$x(\theta) = (R - r) \sin(\theta) - r \sin\left(\frac{R - r}{r} \theta\right)$$

$$y(\theta) = (R - r) \cos(\theta) + r \cos\left(\frac{R - r}{r} \theta\right)$$

¿Inventiones o descubrimientos?



¿Inventaciones o descubrimientos?



¿Invenciones o descubrimientos?



“Cómo es posible que la matemática, un producto del pensamiento humano independiente de la experiencia, se adapte tan admirablemente a los objetos de la realidad.”

— Albert Einstein (1879-1955).



“La caballería andante (...) es una ciencia - replicó Don Quijote - que encierra en sí todas o las más ciencias del mundo, a causa que el que la profesa (...) ha de saber las matemáticas, porque a cada paso se le ofrecerá tener necesidad dellas (...) En lo que faltaba del camino les fue contando el licenciado las excelencias de la espada, con tantas razones demostrativas y con tantas figuras y demostraciones matemáticas, que todos quedaron enterados de la bondad de la ciencia.”

— Don Quijote de la Mancha (Ed. 1605). Miguel de Cervantes Saavedra (1547-1616).



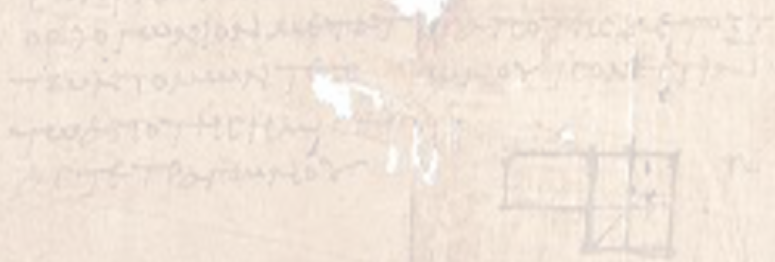
Rodamos sobre una recta: Cicloide

$$x(\theta) = R(\theta - \sin(\theta)), \quad y(\theta) = R(1 - \cos(\theta))$$

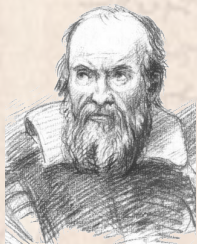
(cycloid.swf)

(trochoid22.swf)

Galileo fue uno de los primeros matemáticos en estudiar las propiedades de la cicloide. Galileo empezó a interesarse por las propiedades de la curva cicloide a partir del año 1599. Hacia 1640, el propio Galileo se había interesado en obtener la relación existente entre el área que encierra la cicloide con su cuerda y el área encerrada por la circunferencia que genera dicha curva. Había intentado infructuosamente demostrar que las áreas estaban en proporción tres a uno:

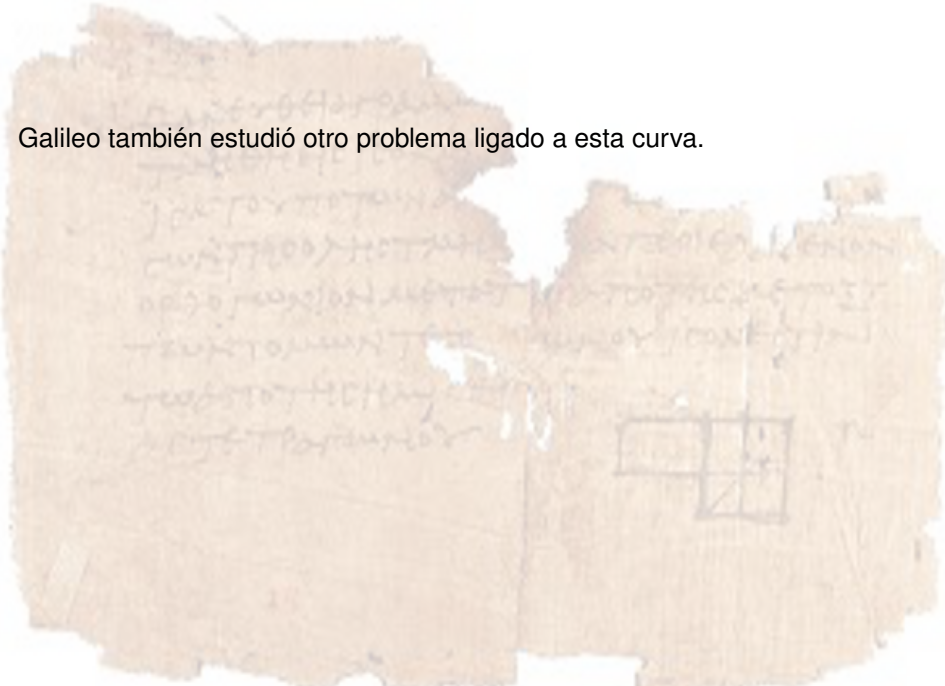


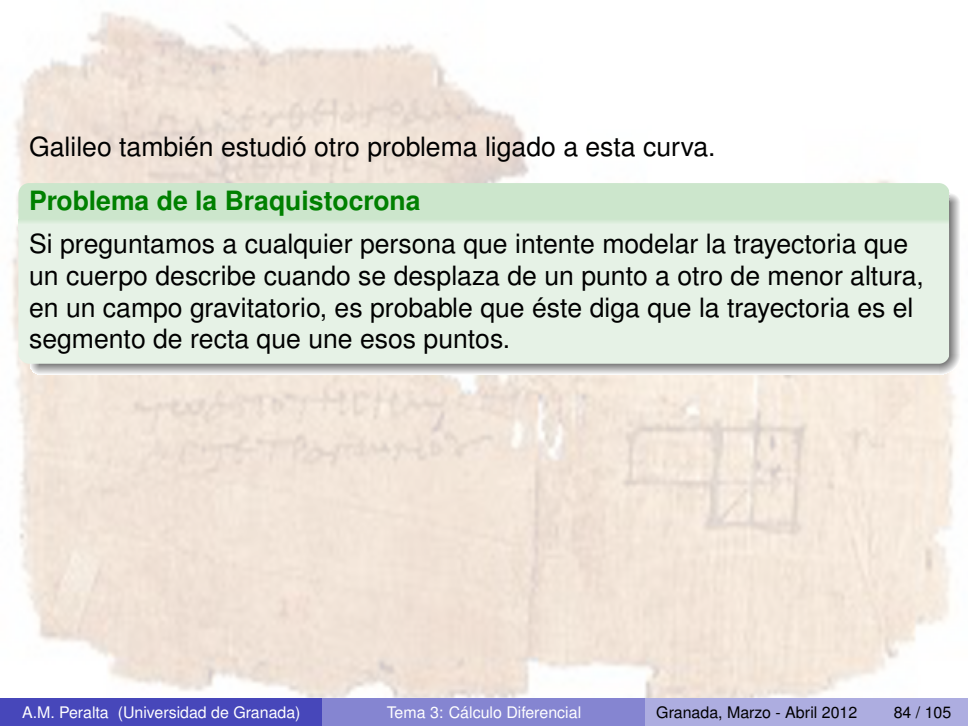
Galileo fue uno de los primeros matemáticos en estudiar las propiedades de la cicloide. Galileo empezó a interesarse por las propiedades de la curva cicloide a partir del año 1599. Hacia 1640, el propio Galileo se había interesado en obtener la relación existente entre el área que encierra la cicloide con su cuerda y el área encerrada por la circunferencia que genera dicha curva. Había intentado infructuosamente demostrar que las áreas estaban en proporción tres a uno:



“He estado queriendo describir esa línea curva durante más de cincuenta años, y la admiré por su curvatura, ideal para soportar los arcos de un puente. Hice varios intentos para demostrar que el espacio incluido entre ella y su cuerda era tres veces más grande que el círculo que describía la cicloide, pero estaba errado.”

Galileo también estudió otro problema ligado a esta curva.





Galileo también estudió otro problema ligado a esta curva.

Problema de la Braquistocrona

Si preguntamos a cualquier persona que intente modelar la trayectoria que un cuerpo describe cuando se desplaza de un punto a otro de menor altura, en un campo gravitatorio, es probable que éste diga que la trayectoria es el segmento de recta que une esos puntos.

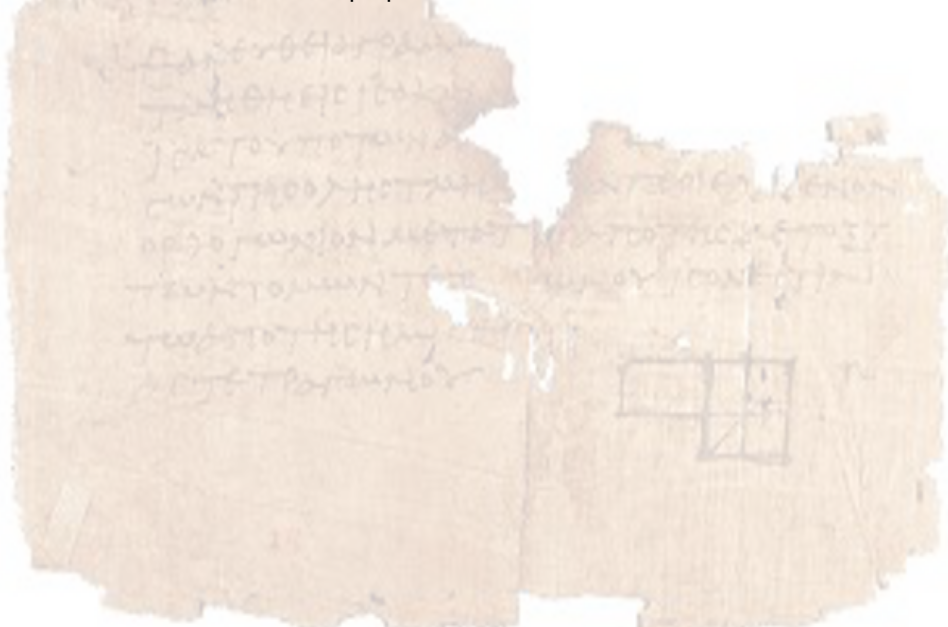
Galileo también estudió otro problema ligado a esta curva.

Problema de la Braquistocrona

Si preguntamos a cualquier persona que intente modelar la trayectoria que un cuerpo describe cuando se desplaza de un punto a otro de menor altura, en un campo gravitatorio, es probable que éste diga que la trayectoria es el segmento de recta que une esos puntos.

En contra de lo que parecería a primera vista, la línea recta no es la que permite el descenso más rápido, sino una curva que se llama braquistócrona (del griego “braquis”, más corto, y “cronos”, tiempo), también conocida como cicloide.

El propio Galileo ya conocía que la línea recta no es el camino que permite un tránsito en el menor tiempo posible. Veamos un video.



El propio Galileo ya conocía que la línea recta no es el camino que permite un tránsito en el menor tiempo posible. Veamos un video.

(Loading Bra.wmn)



(Loading braquis.swf)



(Loading tauto.swf)







Johann Bernoulli propuso, desde su cátedra de matemáticas en Gröningen (Holanda), el problema de la braquistócrona en junio de 1696 y retó a la comunidad matemática a resolverlo antes del fin del año, añadiendo con sarcasmo que “la curva era bien conocida por los matemáticos”.

"I, Johann Bernoulli, address the most brilliant mathematicians in the world. Nothing is more attractive to intelligent people than an honest, challenging problem, whose possible solution will bestow fame and remain as a lasting monument. Following the example set by Pascal, Fermat, etc., I hope to gain the gratitude of the whole scientific community by placing before the finest mathematicians of our time a problem which will test their methods and the strength of their intellect. If someone communicates to me the solution of the proposed problem, I shall publicly declare him worthy of praise."

— Johann Bernoulli in Acta Eruditorum in June 1696.

Problem:

Given two points O and $P = (a, b)$ in a vertical plane, what is the curve traced out by a point acted on only by gravity, which starts at O and reaches P in the shortest time?

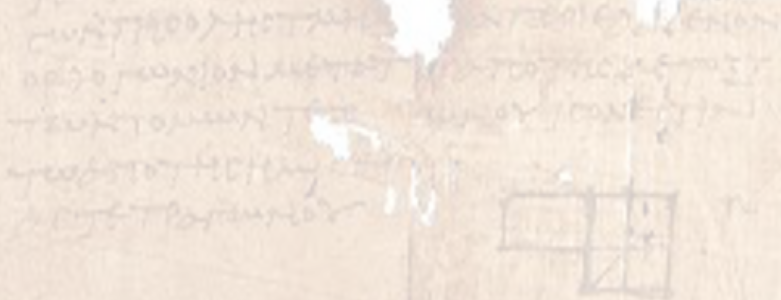
La novedad del problema en sí era notoria: no se trataba de encontrar extremos relativos de una curva, sino que la misma incógnita buscada es una curva que debe minimizar cierta cantidad. G.W. Leibniz admitía que este tipo de problemas era muy novedoso en la época.

El 29 de enero de 1697, Newton recibía una carta procedente de Basilea que contenía dos problemas, uno de ellos era el problema de la braquistócrona. El reto también había sido enviado, además de a Newton, a otros matemáticos del continente (Leibniz, Varignon, L'Hôpital, David Gregory, Hooke, Halley, Wren y Huygens).

El 29 de enero de 1697, Newton recibía una carta procedente de Basilea que contenía dos problemas, uno de ellos era el problema de la braquistócrona. El reto también había sido enviado, además de a Newton, a otros matemáticos del continente (Leibniz, Varignon, L'Hôpital, David Gregory, Hooke, Halley, Wren y Huygens).

En palabras del propio Johann Bernoulli, en aquella época sólo cinco personas tenían el potencial matemático suficiente para dar una respuesta satisfactoria al problema planteado, a saber, I. Newton, G.W. Leibniz, G.F.A. L'Hôpital, Jakob Bernoulli y el propio Johann. En la época era bien conocido que tal curva no podía ser una recta (a pesar de que la recta minimice la distancia entre los puntos). Por su parte, Galileo había defendido previamente que la curva solución debía ser un arco de circunferencia, aunque, como veremos, el tiempo le quitaría la razón.

En mayo de 1697, el Acta Eruditorum publicó cuatro soluciones, cuyos autores eran Leibniz, el mismo Johan Bernoulli, su hermano mayor Jacob y un autor inglés anónimo. Bernoulli reconoció de inmediato la figura de Newton tras la anónima aportación y exclamo: “Ex ungue leonis” (“De las garras del león”).



En mayo de 1697, el Acta Eruditorum publicó cuatro soluciones, cuyos autores eran Leibniz, el mismo Johan Bernoulli, su hermano mayor Jacob y un autor inglés anónimo. Bernoulli reconoció de inmediato la figura de Newton tras la anónima aportación y exclamo: “Ex ungue leonis” (“De las garras del león”).





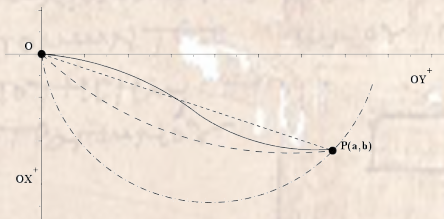
Newton aplicó la Braquistócrona para el trazado de los desagües de Londres al Támesis. En la actualidad se diseñan nuevos inodoros que ahorran agua gracias a las propiedades de la cicloide.

Newton aplicó la Braquistócrona para el trazado de los desagües de Londres al Támesis. En la actualidad se diseñan nuevos inodoros que ahorran agua gracias a las propiedades de la cicloide.

Según el principio de Fermat: La trayectoria seguida por un haz de luz entre dos puntos es aquella que resulta en el menor tiempo de viaje. Por tanto la curva Braquistócrona sería simplemente la trayectoria de un haz de luz donde la velocidad de la luz se incrementa con una aceleración vertical (la de la gravedad). Entraremos en la *Teoría Especial de la Relatividad*.

Solución:

Supongamos entonces que un objeto de masa m cae por una curva que une O y P , de modo que se considera que el rozamiento es despreciable. Notemos mediante $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ a la curva parametrizada, en función del tiempo, que describe su trayectoria.



Como todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, el Principio de Conservación de la Energía nos asegura que:

$$\Delta E_c = \Delta E_p, \text{ es decir, } \frac{1}{2}mv(t)^2 = mgx(t),$$

donde $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ es la velocidad escalar.

Como todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, el Principio de Conservación de la Energía nos asegura que:

$$\Delta E_c = \Delta E_p, \text{ es decir, } \frac{1}{2}mv(t)^2 = mgx(t),$$

donde $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ es la velocidad escalar.
Simplificando la expresión

$$v(t) \frac{dt}{dx} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

tenemos que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Como todas las fuerzas que actúan sobre el sistema son conservativas, el Principio de Conservación de la Energía nos asegura que:

$$\Delta E_c = \Delta E_p, \text{ es decir, } \frac{1}{2}mv(t)^2 = mgx(t),$$

donde $v(t) = \|\gamma'(t)\| = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}$ es la velocidad escalar.
Simplificando la expresión

$$v(t) \frac{dt}{dx} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \frac{dt}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

tenemos que

$$\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

En consecuencia, el tiempo que transcurre para ir de $x = 0$ a $x = a$ será:

$$T(\gamma) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx$$

Pretendemos minimizar el operador integral

$$\gamma \mapsto T(\gamma) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^a F(x, y, y') dx,$$

donde γ es un elemento del conjunto

$$\{(x, y(x), y'(x)) : y \in C^2[0, a], y(0) = 0, y(a) = b\}.$$

Pretendemos minimizar el operador integral

$$\gamma \mapsto T(\gamma) = \int_0^a \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} dx = \int_0^a F(x, y, y') dx,$$

donde γ es un elemento del conjunto

$$\{(x, y(x), y'(x)) : y \in C^2[0, a], y(0) = 0, y(a) = b\}.$$

Supondremos que el operador alcanza su mínimo (puesto que una camino tiene que minimizar el tiempo de tránsito). Veremos una solución aplicando la *Condición de Euler-Lagrange*, método que abre el camino al *Cálculo de Variaciones*.

Condición de Euler-Lagrange: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

- 1 Supongamos que el operador integral tiene un extremo para una determinada función $y = y_0(x) \in C^2([a, b])$. Asumimos que la función F es suficientemente diferenciable para que el desarrollo que sigue sea válido ($F \in C^2$ es suficiente).

Condición de Euler-Lagrange: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

- 1 Supongamos que el operador integral tiene un extremo para una determinada función $y = y_0(x) \in C^2([a, b])$. Asumimos que la función F es suficientemente diferenciable para que el desarrollo que sigue sea válido ($F \in C^2$ es suficiente).
- 2 Tomemos ahora una función arbitraria $\eta(x) \in C^\infty(a, b)$, con la condición $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces la función $g(\epsilon) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \epsilon\eta'(x))dx$ tiene un extremo en $\epsilon = 0$. En particular, $0 = g'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right) dx$.

Condición de Euler-Lagrange: $\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} = 0$

- 1 Supongamos que el operador integral tiene un extremo para una determinada función $y = y_0(x) \in C^2([a, b])$. Asumimos que la función F es suficientemente diferenciable para que el desarrollo que sigue sea válido ($F \in C^2$ es suficiente).
- 2 Tomemos ahora una función arbitraria $\eta(x) \in C^\infty(a, b)$, con la condición $\eta(a) = \eta(b) = 0$. Entonces la función $g(\epsilon) = \int_a^b F(x, y_0(x) + \epsilon\eta(x), y_0'(x) + \epsilon\eta'(x))dx$ tiene un extremo en $\epsilon = 0$. En particular, $0 = g'(0) = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} \cdot \eta(x) + \frac{\partial F}{\partial y'} \cdot \eta'(x) \right) dx$.
- 3 Integrando por partes el segundo sumando de la expresión anterior se llega a que $0 = \int_a^b \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx} \frac{\partial F}{\partial y'} \right) \cdot \eta(x) dx$, $\forall \eta \in C^\infty$, con $\eta(a) = \eta(b) = 0$.

Aplicando la Condición de Euler-Lagrange a nuestra función:

$F(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2}$ tenemos:

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{2gx(1 + y'(x)^2)}} = \text{constante} > 0$$

Aplicando la Condición de Euler-Lagrange a nuestra función:

$$F(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} \text{ tenemos:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{2gx(1 + y'(x)^2)}} = \text{constante} > 0$$

Para simplificar escribimos

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{2gx(1 + y'(x)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4gR}} \Leftrightarrow y'(x) = \sqrt{\frac{x}{2R - x}} \Leftrightarrow y = \int \sqrt{\frac{x}{2R - x}} dx,$$

cuya solución nos proporciona:

$$y(x) = -\sqrt{(2R - x)x} + R \cdot \arccos \left(1 - \frac{x}{R} \right), \quad 0 \leq x \leq 2R.$$

Aplicando la Condición de Euler-Lagrange a nuestra función:

$$F(x, y, y') = \frac{1}{\sqrt{2gx}} \sqrt{1 + (y'(x))^2} \text{ tenemos:}$$

$$\frac{\partial F}{\partial y'}(x) = \frac{y'(x)}{\sqrt{2gx(1 + y'(x)^2)}} = \text{constante} > 0$$

Para simplificar escribimos

$$\frac{y'(x)}{\sqrt{2gx(1 + y'(x)^2)}} = \frac{1}{\sqrt{4gR}} \Leftrightarrow y'(x) = \sqrt{\frac{x}{2R - x}} \Leftrightarrow y = \int \sqrt{\frac{x}{2R - x}} dx,$$

cuya solución nos proporciona:

$$y(x) = -\sqrt{(2R - x)x} + R \cdot \arccos \left(1 - \frac{x}{R} \right), \quad 0 \leq x \leq 2R.$$

Mediante el cambio de variable $x = R(1 - \cos\alpha)$, podemos expresar la integral:

$$y = R \int \operatorname{sen}\alpha \cdot \sqrt{\frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha}} d\alpha = R \int (1 - \cos\alpha) d\alpha = R(\alpha - \operatorname{sen}\alpha).$$



Superficie parametrizada

Es una aplicación continua

$$\gamma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Superficie parametrizada

Es una aplicación continua

$$\gamma : A \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\gamma(s, t) = (x(s, t), y(s, t), z(s, t)).$$

Cuando γ admite parciales continuas, tenemos una fórmula para calcular el área de la superficie:

$$\text{Área}(\gamma) = \int_A \left\| \frac{\partial \gamma}{\partial s}(s, t) \wedge \frac{\partial \gamma}{\partial t}(s, t) \right\| d(s, t)$$



Matrices de Giro:

Matriz de giro de ángulo θ alrededor del eje OZ:
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Matriz de giro de ángulo θ alrededor del eje OY:
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & 0 & \sin(\theta) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\theta) & 0 & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

Matriz de giro de ángulo θ alrededor del eje OX:
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ 0 & -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$



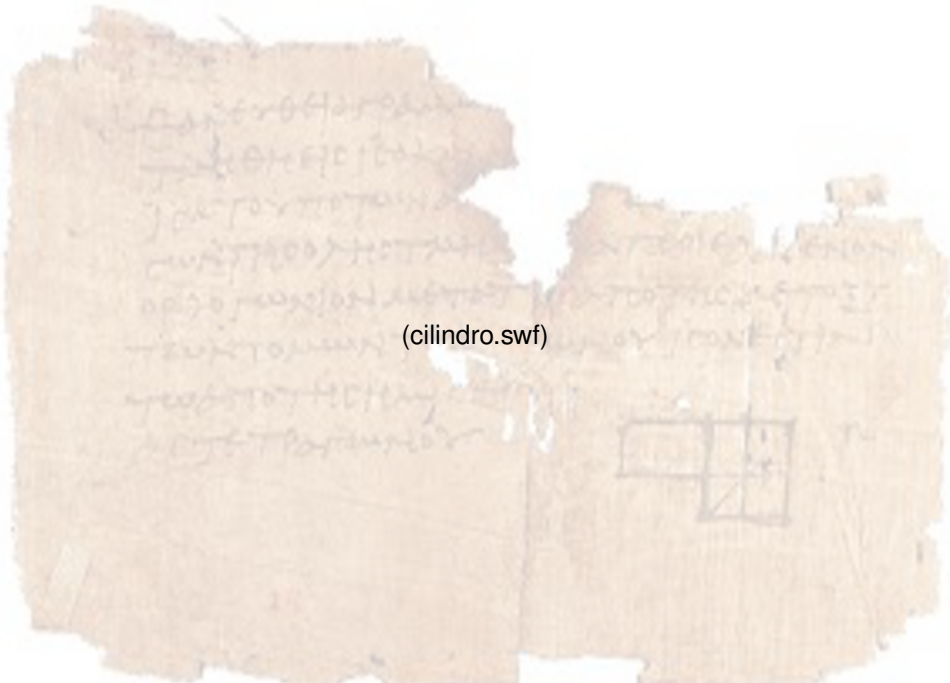
Tomado una curva en el plano YZ , $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, que no corte al eje Z , el producto
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
 nos describe la misma curva girada un ángulo θ alrededor del eje OZ .

Tomado una curva en el plano YZ , $\gamma(t) = (0, y(t), z(t))$, que no corte al eje Z , el producto
$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$$
 nos describe la misma curva girada un ángulo θ alrededor del eje OZ .

Dejando libres los parámetros t y $\theta \in [0, 2\pi]$ tendremos la superficie de revolución resultante al girar la curva γ alrededor del eje OZ .

$$\delta(t, \theta) = (\sin(\theta) y(t), \cos(\theta) y(t), z(t)).$$





(cilindro.swf)



(Loading toro.swf)





(Loading tres.swf)





(Loading cuatro.swf)

