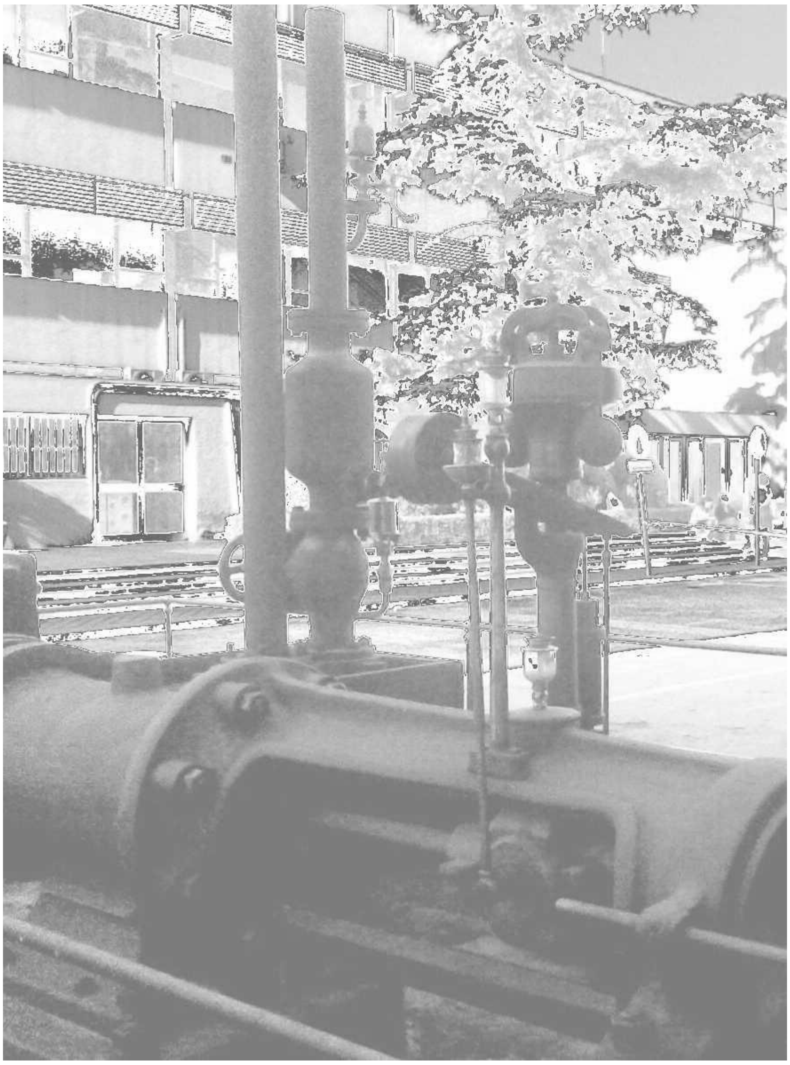
ugr

Grado en Ciencias Ambientales

Física



LABORATORIO DE FÍSICA GENERAL
MANUAL de LABORATORIO

Departamento de Física Aplicada

Facultad de Ciencias - Universidad de Granada

Este Manual contiene una introducción a la teoría de incertidumbre, información, tablas y los guiones necesarios para el correcto desarrollo del trabajo de laboratorio correspondiente a la asignatura

FÍSICA

del primer curso del Grado en Ciencias Ambientales en la Universidad de Granada.

Incluye una selección de prácticas entre las disponibles en el Laboratorio de Física General, del Departamento de Física Aplicada en la Facultad de Ciencias.

Han sido específicamente adaptadas para la Titulación de Ciencias Ambientales y el alumnado de la asignatura FÍSICA. Por esta razón su numeración no es consecutiva, sino que respeta el número con el que se presentan dichas prácticas en el Laboratorio de Física General.

ÍNDICE

TEORÍA DE INCERTIDUMBRES

1. INTRODUCCIÓN
2. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES
3. CONCEPTOS DE EXACTITUD, PRECISIÓN Y SENSIBILIDAD
4. ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO
5. DETERMINACIÓN DE INCERTIDUMBRES EN MEDIDAS DIRECTAS
6. DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE UNA MAGNITUD MEDIDA INDIRECTAMENTE
7. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS
8. AJUSTE DE LA RECTA DE REGRESIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS
9. INTERPOLACIÓN
10. TABLAS

1. INTRODUCCIÓN

Todas las medidas experimentales vienen afectadas de una imprecisión inherente al proceso de medida. Puesto que en éste se trata, básicamente, de comparar con un patrón y esta comparación se hace con un instrumento, la medida dependerá de la mínima cantidad que aquel sea capaz de medir. Y esta cantidad va decreciendo con el progreso de la física en un proceso continuado, pero sin fin aparente. Es decir, que, aunque cada vez podamos dar la medida con más "decimales", el siguiente "decimal" no podrá saberse... por el momento.

Por lo tanto, podemos decir que las medidas de la física son siempre "incorrectas". Dicho de una manera más "correcta": si llamamos **error** a la diferencia que existe entre la medida y el valor "verdadero" de la magnitud, siempre existirá este error. Es, lo que podríamos llamar un "error intrínseco", por inevitable.

Es conveniente distinguir entre los conceptos de error e **incertidumbre**. El concepto de error de una medida se refiere a la diferencia entre el valor obtenido del resultado de una medición de una magnitud y el valor real de dicha magnitud. Por tanto, el concepto de error, aunque teóricamente es útil, en la práctica necesita del conocimiento del valor real de algo que se pretende medir. Error es por tanto un concepto mucho menos práctico, y no proporciona información sobre la dispersión del resultado de una medida, solo su desviación respecto de un valor supuestamente correcto. La incertidumbre se utilizará además en la obtención de los intervalos de confianzas, que veremos más adelante que son intervalos en torno al valor numérico de la medida donde se espera con cierta probabilidad que se encuentre el valor real de la magnitud medida.

El valor de las magnitudes físicas se obtiene, como hemos indicado, experimentalmente. Es decir, por medición, bien *directa* de la magnitud cuyo valor deseamos conocer o bien *indirecta* por medio de los valores de otras magnitudes, ligadas con la magnitud problema mediante alguna ley o fórmula física. Por lo tanto, debe de admitirse como postulado que, aparte de la "incertidumbre intrínseca" que hemos señalado anteriormente, el proceso experimental lleva en sí otras imperfecciones que hacen que resulte imposible (incluso si prescindiéramos de la "incertidumbre intrínseca") llegar a conocer el valor exacto de ninguna magnitud física, puesto que los medios experimentales de comparación con el patrón correspondiente en las medidas directas (las medidas "propiamente dichas") viene siempre afectado por imprecisiones inevitables. De este modo, aunque es imposible, en la práctica, encontrar el valor "verdadero" o "exacto" de una magnitud determinada, a los científicos no les cabe duda de que existe; y nuestro problema consiste en establecer los límites dentro de los cuales estamos seguros de que se encuentra dicho valor ("*cota de incertidumbre*").

2. CLASIFICACIÓN DE LOS ERRORES

El error se define, tal como habíamos dicho, como *la diferencia entre el valor verdadero y el obtenido experimentalmente*. Los errores no siguen una ley determinada y su origen está en múltiples causas.

Atendiendo a las causas que lo producen, los errores se pueden clasificar en dos grandes grupos: *errores sistemáticos* y *errores accidentales*.

Se denomina error sistemático a aquel que es constante a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afecta a todas las medidas de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Estos errores tienen siempre un signo determinado y las causas probables pueden ser:

- *Errores instrumentales*; por ejemplo, el error de calibrado de los instrumentos.
- *Error personal*: Este es, en general, difícil de determinar y es debido a las limitaciones de carácter personal. Como, por ejemplo, los errores de paralaje, o los problemas de tipo visual.
- *Errores de método de medida*, que corresponden a una elección inadecuada del método de medida; lo que incluye tres posibilidades distintas: la inadecuación del instrumento de medida, del observador o del método de medida propiamente dicho.

Se denominan errores accidentales a aquellos que se deben a las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por el mismo observador y bajo las mismas condiciones. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y se supone que sus valores están sometidos tan sólo a las leyes del azar y que sus causas son completamente incontrolables para un observador.

Los errores accidentales poseen, en su mayoría, un valor absoluto muy pequeño y si se realiza un número suficiente de medidas se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas. Y, aunque con los errores accidentales no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordantes con los reales, sí pueden emplearse *métodos estadísticos*, mediante los cuales se pueden llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

3. CONCEPTOS DE EXACTITUD, PRECISIÓN Y SENSIBILIDAD

En lo que se refiere a los aparatos de medida, hay tres conceptos muy importantes que vamos a definir: *exactitud, precisión* y *sensibilidad*.

La exactitud se define como el grado de concordancia entre el valor "verdadero" y el experimental. De manera que un aparato es *exacto* si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor "verdadero" de la magnitud medida.

La precisión hace referencia a la concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales. De modo que, un instrumento será *preciso* cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud sea muy pequeña.

La *exactitud* implica, normalmente, *precisión*, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir instrumentos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como el "error de cero", etc. En general, se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un instrumento que su exactitud (básicamente, debido a la introducción del término "verdadero").

La sensibilidad de un instrumento está relacionada con el valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir. Por ejemplo, decir que la sensibilidad de una balanza es de 5 mg significa que, para masas inferiores a la citada, la balanza no acusa ninguna desviación. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un instrumento viene indicada por *el valor de la división más pequeña de la escala de medida*. En muchas ocasiones, de un modo erróneo, se toman como idénticos los conceptos de precisión y sensibilidad, aunque ya hemos visto que se trata de conceptos diferentes.

Lo que estamos hablando (y hablaremos todavía un tiempo) de valores "verdaderos", habrá que entenderlos como los que más tarde definiremos (básicamente, valores medios).

4. ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO

Si medimos una cierta magnitud física cuyo valor "verdadero" es x_0, obteniendo un valor de la medida x, llamaremos error absoluto de dicha medida a la diferencia

$$\Delta x = x - x_0, \qquad (1)$$

en donde, en general, se supone que $\Delta x \ll |x_0|$.

El *error absoluto* nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor "verdadero". No obstante, en ocasiones nos interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin, se usa el *error relativo*.

El error relativo se define como el cociente entre el error absoluto y el valor "verdadero":

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}, \qquad (2)$$

lo que, en forma porcentual se expresará como ε x 100 %.

Cuando indiquemos el resultado de una medida (o de un conjunto de medidas) de una magnitud, tendremos que indicar, siempre, el *grado de incertidumbre* de la misma, para lo cual acompañamos el resultado de la medida de su error absoluto; expresando el resultado así:

$$x \pm \Delta x$$

De ordinario, y dado el significado de la cota de imprecisión que tiene el error absoluto, por convenio el error absoluto sólo puede darse con dos cifras significativas si la primera de ellas es un 1 ó si siendo la primera un 2 la segunda no llega a 5. En todos los demás casos, debe darse un valor con una sola cifra aumentando en una unidad la primera, si la segunda fuera 5 o mayor que 5.

El valor de la magnitud debe de tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, llamada *cifra de acotamiento*.

Como ejemplo, damos las siguientes tablas de valores de distintas magnitudes (en la columna de la izquierda mal escritos y en la de la derecha correctos) para poner de manifiesto lo que acabamos de decir.

Valores incorrectos	**Valores correctos**
3,418 ± 0,123	3,42 ± 0,12
6,3 ± 0,09	6,30 ± 0,09
46288 ± 1551	46300 ± 1600
428,351 ± 0,27	428,4 ± 0,3
0,01683 ± 0,0058	0,017 ± 0,006

Nota: Si un valor es leído de una *tabla* o algún otro lugar (que no tengan una mención expresa del error cometido), se tomará como si *todas sus cifras fueran significativas.*

5. DETERMINACIÓN DE INCERTIDUMBRES EN MEDIDAS DIRECTAS

Cuando realicemos la medida de cualquier magnitud, deberemos indicar siempre una estimación de la incertidumbre asociada a la misma. Dado que no conocemos el valor “verdadero” de la magnitud que deseamos medir, habrá que seguir ciertos procedimientos para hacer una estimación, tanto del valor “verdadero”, como de una *cota de la incertidumbre*.

Distinguiremos dos casos bien diferenciados:

(a) Si sólo se puede realizar una sola medida, *x*, de la magnitud.

En este caso consideraremos que la incertidumbre coincide con el valor absoluto de la sensibilidad (S) del aparato utilizado para realizar la medida. De este modo, el resultado de la medida lo expresaremos así:

$$x \pm S$$

(b) Caso en el que se realizan varias medidas de una misma magnitud.

Con el fin de alcanzar cierta validez estadística en los resultados de las medidas, es muy conveniente repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema. Los resultados de las medidas individuales pueden presentarse poco o muy dispersas y, en función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de mediciones de la magnitud. Para decidir el número de determinaciones que hay que efectuar del valor de la magnitud física que deseamos medir, seguiremos el siguiente procedimiento:

Se realizan **tres** medidas de la magnitud (x_1, x_2 y x_3), se calcula el valor medio de las tres medidas, $\overline{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$, y se halla la *dispersión total, D,* de las mismas, es decir, la diferencia entre los valores extremos de las medidas (valor máximo menos el valor mínimo). Finalmente, se obtiene el *tanto por ciento de dispersión, T,* que viene dado por:

$$T = \frac{D}{\overline{x}_3} x100 \qquad (3)$$

(i) Ahora bien, puede suceder que el valor de la dispersión *D* no sea mayor que el valor de la sensibilidad del aparato de medida

$$D \leq S$$

En este caso, tomaremos como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las tres medidas, $\overline{x_3}$, y como incertidumbre la sensibilidad, es decir,

$$\overline{x_3} \pm S$$

(ii) Ahora bien, si el valor de la dispersión *D* es mayor que la sensibilidad del aparato,

$$D > S,$$

procederemos a aumentar el número de medidas de la magnitud. El *criterio* a seguir en este aumento viene condicionado por el valor del porcentaje dispersión *T* del modo indicado en la siguiente tabla:

T en las tres primeras medidas	Nº total de medidas necesarias
$T_3 \leq 2$ %	Bastan las 3 medidas realizadas
$2\% < T_3 \leq 8\%$	Hay que hacer 3 medidas más, hasta un total de 6
$8\% < T_6 \leq 15\%$	Hay que hacer un total de 15 medidas
$15\% < T_{15}$	Hay que hacer un mínimo de 50 medidas

Una vez realizadas las medidas necesarias, se toma como valor de la magnitud *el valor medio* de la misma, calculado sobre el número total de medidas realizadas y en cuanto al correspondiente error, se determina según los casos que sigue:

(1) Si se han realizado tres medidas, se toma como incertidumbre el valor de la sensibilidad del aparato, es decir, lo que ya hemos indicado,

$$\Delta x = S.$$

(2) Si se han realizado seis medidas, entonces se asigna como incertidumbre de la medición, el mayor de entre la sensibilidad del aparato y el cálculo de $D_6/4$ (la cuarta parte de la dispersión total de las seis medidas, es decir, la diferencia entre la mayor y la menor de todas). Es decir,

$$\Delta x = \text{máx}\ (S, D_6/4)$$

(3) Si se han realizado más de 15 medidas; entonces la incertidumbre puede calcularse mediante la expresión:

$$\Delta x = \left[\frac{\sum (x_i - \overline{x_n})^2}{N} \right]^{1/2} \tag{4}$$

que proporciona el llamado *error cuadrático medio* (puesto que es algo así como una media del cuadrado de los errores), en donde x_i son cada una de las medidas realizadas, $\overline{x_n}$ es la media aritmética de todas las medidas individuales y N es el número total de medidas realizadas.

El procedimiento seguido en este último caso se debe a que, en una serie repetida de medidas de una misma magnitud, la distribución estadística de éstas alrededor del valor medio representa una forma típica, que recibe el nombre de *distribución gaussiana* o *distribución normal*.

6. DETERMINACIÓN DE LA INCERTIDUMBRE DE UNA MAGNITUD MEDIDA INDIRECTAMENTE

Como ya hemos indicado, la medida indirecta de una magnitud se alcanza mediante la aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas (variables independientes o *datos*), que las relacionan con la magnitud problema. Por eso también esta fórmula ha de servirnos para obtener la incertidumbre de dicha magnitud. Ahora explicaremos la manera de realizar esto.

Antes que nada, debemos indicar que, si en la fórmula citada *aparecen números irracionales*, tales como π, *e*, etc, debemos elegir el número de cifras significativas con las que vamos a realizar los cálculos, de modo que los errores cometidos al aproximar estos números irracionales no afecten a la magnitud que queremos determinar (bastará con poner una cifra significativa más baja que la más baja de los datos).

Supongamos que la magnitud problema *F* es función de otras magnitudes físicas (*datos*), estando relacionadas con ellas por

$$F = F(x, y, z, ...) \qquad (5)$$

Supongamos, además, que se han realizado medidas de las citadas variables *x, y, z, ...*y se han determinado su valor medio (al que llamaremos con el mismo nombre *x, y, z, ...*) y sus incertidumbres (Δx, Δy, Δz, ...). Para realizar el cálculo de la incertidumbre de *F*, en función de los antedichos valores, se procede así:

a) En primer lugar, se obtiene la diferencial total de *F* en función de las variables *x, y, z, ...*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots$$

b) Si, a continuación, asimilamos las diferentes diferenciales a las incertidumbres y, además, consideramos que en el cálculo de la incertidumbre de *F* debemos ponernos en el caso más desfavorable (siempre deseamos tener una cota de error, o sea un valor de la magnitud del que podamos estar seguros de que el valor "verdadero" está dentro de nuestro intervalo de "seguridad"), o sea, el mayor error posible. Lo que significa que consideraremos todos los errores como positivos, es decir, tomaremos, además, los valores absolutos de las derivadas parciales, con lo que obtendremos el valor absoluto de *F*, es decir,

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots \qquad (6)$$

Notamos aquí que la Oficina Internacional de Pesas y Medidas recomienda, en vez de la ecuación (6), una suma ortogonal (la raíz cuadrada de la suma de cuadrados según el teorema de Pitágoras), bajo la hipótesis de independencia de incertidumbres en las medidas directas (Δx, Δy, Δz, …). Sin embargo, los profesores de esta asignatura opinan que la suma de valores absolutos es más intuitiva e instructiva para los alumnos de ciencias ambientales.

En este problema se presenta una notable simplificación en el caso de que la función (fórmula) considerada sea de la forma:

$$F = x^a\, y^b\, z^c \ldots \qquad (7)$$

con *a, b, c, …* constantes positivas o negativas; ya que en este caso podemos proceder del siguiente modo:

Calculamos la diferencial logarítmica de *F* (tomar ln F y luego la diferencial de este logaritmo):

$$\frac{dF}{F} = a\frac{dx}{x} + b\frac{dy}{y} + c\frac{dz}{z} + \ldots, \qquad (8)$$

en donde, asimilando de nuevo los diferenciales totales a las incertidumbres absolutas, tenemos:

$$\frac{\Delta F}{F} = a\frac{\Delta x}{x} + b\frac{\Delta y}{y} + c\frac{\Delta z}{z} + \ldots \qquad (9)$$

Y, recordando el concepto de error relativo, $\varepsilon = \frac{\Delta x}{x}$, obtenemos

$$\varepsilon_F = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y + c\varepsilon_z + \ldots \qquad (10)$$

Con esto podemos, finalmente obtener la incertidumbre de *F*,

$$\Delta F = \varepsilon_F . \overline{F} \; . \qquad (11)$$

Ejemplo numérico del cálculo de incertidumbres

(a) Incertidumbre de una magnitud de la forma general (5):

Vamos a calcular la incertidumbre de una magnitud que depende de los datos a través de una expresión del tipo:

$$F = \frac{(x+y)z}{(u-v)w}.$$

Consideremos que se han medido los valores medios de las variables y se han determinado sus incertidumbres, de modo que,

x = 27,33 ± 0,13
y = 2,45 ± 0,05
z = 10,0 ± 0,1
u = 50,2 ± 0,1
v = 1,033 ± 0,012
w = 3,26 ± 0,02

Vamos a obtener el valor de la magnitud *F* y la incertidumbre correspondiente a la misma

F = 1,8579...

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|\Delta u + \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|\Delta v + \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|\Delta w.$$

Realizando cálculos se obtiene:

$$\Delta F = \left|\frac{z}{(u-v)w}\right|\Delta x + \left|\frac{z}{(u-v)w}\right|\Delta y + \left|\frac{x+y}{(u-v)w}\right|\Delta z + \left|-\frac{(x+y)z}{(u-v)^2 w}\right|\Delta u + \left|\frac{(x+y)z}{(u-v)^2 w}\right|\Delta v + \left|-\frac{(x+y)z}{(u-v)w^2}\right|\Delta w$$

Tras realizar los cálculos numéricos correspondientes, se obtiene:

ΔF = 0,04458...

Teniendo en cuenta el número máximo de cifras significativas de la incertidumbre, obtenemos el resultado final:

F = 1,86 ± 0,05

Nótese que el resultado deberá ir acompañado de sus unidades, tanto la magnitud como la incertidumbre. Es decir, el resultado final se debe expresar de la siguiente forma:

F = (1,86 ± 0,05) *unidades*

o bien,

F = 1,86 *unidades* ± 0,05 *unidades*

7. CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

La representación gráfica de los fenómenos físicos que estudiaremos deberá ajustarse a las siguientes normas:

(1) Gráficas en papel milimetrado (en el caso de que no estén realizadas con ordenador) con los ejes bien trazados, indicando en sus extremos la magnitud representada en ese eje, así como la unidad en que ha sido medida. El título de la gráfica se pondrá, bien claro, en la parte superior.

(2) La variable independiente del fenómeno estudiado se representará en abscisas (eje X) y la dependiente en ordenadas (eje Y).

(3) Las escalas, sobre ambos ejes, han de permitir una lectura rápida y sencilla. Para ello se elegirán las escalas con intervalos sencillos de 1, 2, 5, 10, 20, ... unidades.

(4) Sobre los ejes sólo se indicarán los valores correspondientes a las divisiones enteras de la escala (que quedarán así uniformemente espaciadas). Nunca se señalarán los valores correspondientes a las medidas realizadas.

(5) Los valores medidos se representarán sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas ("*punto experimental*") y rodeado por el denominado *rectángulo de incertidumbre*, cuya base abarca desde $x - \Delta x$ hasta $x + \Delta x$, y cuya altura se extiende desde $y - \Delta y$ hasta $y + \Delta y$, siendo x e y las coordenadas del punto experimental.

(6) En el caso de que Δx o Δy sean despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de incertidumbre quedará reducido a un simple segmento vertical u horizontal (*barra de error*), según el caso. En el caso excepcional de que ambos errores sean simultáneamente despreciables, el punto experimental quedaría reducido a un "punto".

(7) Las gráficas han de ser líneas finas y "continuas", nunca quebradas, que han de pasar por todos los rectángulos de incertidumbre, aunque para ello dejen muchas veces de pasar por los puntos experimentales, que pueden quedar a derecha o a izquierda de la gráfica. Si al hacer esta operación, alguno de los rectángulos de incertidumbre, queda excesivamente alejado de la forma continua de la gráfica, es prueba de que esa medida es falsa, por alguna causa accidental, y debería repetirse.

8. AJUSTE DE LA RECTA DE REGRESIÓN POR EL MÉTODO DE LOS MÍNIMOS CUADRADOS

Con frecuencia, se plantea el problema de encontrar una expresión matemática $y = f(x)$ de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno, a partir de una serie de N medidas, (x_i, y_i), de las magnitudes x e y que lo caracterizan.

Cuando la representación gráfica del fenómeno estudiado proporciona una distribución de los puntos experimentales que parecen tener la forma de una curva plana determinada es conveniente obtener la ecuación de esta curva que probablemente será la expresión de la ley física que rige el fenómeno estudiado. El método más potente (y, sobre todo, el más simple) conocido es el de *regresión por los mínimos cuadrados*. Estos métodos son aplicables a diversas curvas de distintos grados, pero nosotros, en este primer curso de introducción, nos vamos a limitar a estudiar el caso más simple posible de una ley física lineal, es decir de una *recta de regresión*.

Dicha recta debe de cumplir la condición de que los puntos experimentales queden distribuidos simétricamente a ambos lados y lo más próximos posible de la misma. Esta condición se cumple si se obliga a la recta, de ecuación $y = a\,x + b$ (siendo “a” la pendiente de la recta y “b” la ordenada en el origen), cumpla con que la expresión siguiente tenga un valor mínimo.

$$C(x, y) = \Sigma\,(y_i - a\,x_i - b)^2$$

Derivando respecto a “*a”* y a “*b”*, y haciendo ambas derivadas iguales a cero, tras una serie de operaciones, se obtiene:

$$a = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N\sum x_i^{\;2} - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i - Nb}{\sum x_i^{\;2}}$$

$$b = \frac{\sum x_i^{\;2} \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N\sum x_i^{\;2} - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - a\sum x_i}{N}$$

Además de los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen, es interesante obtener el denominado *coeficiente de correlación lineal*, “*r*”, que nos da una medida del grado de correlación (de aproximación) entre los valores de las variables *x* e *y*, es decir, hasta que punto *x* e *y* están relacionados mediante una función lineal. La expresión de *r* es:

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{[N\sum x_i^2 - \left(\sum x_i\right)^2]\,[N\sum y_i^2 - \left(\sum y_i\right)^2]}}$$

y que varía entre cero (correlación inexistente) y ± 1 (correlación completa).

Las expresiones correspondientes al cálculo de incertidumbre de la pendiente y de la ordenada en el origen son:

$$\Delta a = \left[\frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)\sum (x_i - \bar{x})^2} \right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\Delta b = \left[\left(\frac{1}{N} + \frac{\bar{x}^2}{\sum (x_i - \bar{x})^2} \right) \left(\frac{\sum (y_i - a x_i - b)^2}{(N-2)} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

9. INTERPOLACIÓN

a) EN TABLAS DE SIMPLE ENTRADA

Las tablas de simple entrada nos proporcionan el valor de una variable dada *x* en función de otra *z*, y viceversa.

Cuando se quiere determinar el valor de *z* que corresponde a uno de *x* no tabulado, o viceversa, se supone que, para intervalos muy pequeños de las variables (como es usual en las tablas de valores), la función z = z(x) es lineal y por tanto los incrementos de las mismas son proporcionales. Esto nos permite diseñar un procedimiento para encontrar estos valores no tabulados llamado *interpolación lineal*.

Para resolver el problema se determinan previamente los valores tabulados de *x* e *y* entre los que se encuentran los de nuestro problema ($x_1<x<x_2$; $z_1<z<z_2$),

x_1	z_1
x_2	z_2

Entonces, la relación que liga *x* con *z* puede escribirse, dentro de las aproximaciones antedichas, según la fórmula lineal:

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

que permite determinar *z* en función de *x*, o viceversa. La incertidumbre de *z* resulta ser:

$$\Delta z = \left| \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1} \right| \Delta x$$

b) EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

En las tablas de doble entrada, para cada pareja de valores *x* e *y* se suministra el valor correspondiente de una tercera variable relacionada con las dos anteriores mediante una función $z = z(x, y)$.

En este caso el trazo de tablas (cuyos intervalos se consideran ahora "triplemente" lineales), entre cuyos valores se encuentran el *z* buscado, presentan el aspecto ($x_1<x< x_2$; $y_1< y< y_2$),

	y_1	y_2
x_1	z_{11}	z_{12}
x_2	z_{21}	z_{22}

La relación aproximada linealmente que permite el cálculo es:

$$z = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}(y - y_1)$$

y puede utilizarse también en la interpolación inversa, es decir, en la determinación de *x* o *y*, conocidos los valores de (y, z) o de (x, z). La incertidumbre de *z* resulta análogamente de la expresión:

$$\Delta z = \left|\frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}\right|\Delta x + \left|\frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}\right|\Delta y$$

TABLAS

T A B L A I

Corrección de las lecturas barometricas a 0 °C

Temperatura	LECTURA BAROMETRICA EN mm Hg										
(°C)	700	710	720	730	740	750	760	770	780	790	800
1	0.11	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.12	0.13	0.13	0.13	0.13
2	0.23	0.23	0.23	0.24	0.24	0.24	0.25	0.25	0.25	0.26	0.26
3	0.34	0.35	0.35	0.36	0.36	0.37	0.37	0.38	0.38	0.39	0.39
4	0.46	0.46	0.47	0.48	0.48	0.49	0.50	0.50	0.51	0.52	0.52
5	0.57	0.58	0.59	0.59	0.60	0.61	0.62	0.63	0.64	0.64	0.65
6	0.68	0.69	0.70	0.71	0.72	0.73	0.74	0.75	0.76	0.77	0.78
7	0.80	0.81	0.82	0.83	0.84	0.86	0.87	0.88	0.89	0.90	0.91
8	0.91	0.93	0.94	0.95	0.96	0.98	0.99	1.00	1.02	1.03	1.04
9	1.03	1.04	1.06	1.07	1.08	1.10	1.11	1.12	1.14	1.16	1.17
10	1.14	1.16	1.17	1.19	1.20	1.22	1.24	1.25	1.27	1.29	1.30
11	1.25	1.27	1.29	1.31	1.32	1.34	1.36	1.38	1.40	1.41	1.43
12	1.37	1.39	1.41	1.43	1.45	1.46	1.48	1.50	1.52	1.54	1.56
13	1.48	1.50	1.52	1.54	1.57	1.59	1.61	1.63	1.65	1.67	1.69
14	1.59	1.62	1.64	1.66	1.69	1.71	1.73	1.75	1.78	1.80	1.82
15	1.71	1.73	1.76	1.78	1.81	1.83	1.85	1.88	1.90	1.93	1.95
16	1.82	1.85	1.87	1.90	1.93	1.95	1.98	2.00	2.03	2.06	2.08
17	1.93	1.96	1.99	2.02	2.05	2.07	2.10	2.13	2.16	2.18	2.21
18	2.05	2.08	2.11	2.14	2.17	2.19	2.22	2.25	2.28	2.31	2.34
19	2.16	2.19	2.22	2.25	2.29	2.32	2.35	2.38	2.41	2.44	2.47
20	2.28	2.31	2.34	2.37	2.41	2.44	2.47	2.50	2.54	2.57	2.60
21	2.39	2.42	2.46	2.49	2.52	2.56	2.59	2.63	2.66	2.70	2.73
22	2.50	2.54	2.57	2.61	2.64	2.68	2.72	2.75	2.79	2.82	2.86
23	2.61	2.65	2.69	2.73	2.76	2.80	2.84	2.88	2.91	2.95	2.99
24	2.73	2.77	2.81	2.85	2.88	2.92	2.96	3.00	3.04	3.08	3.12
25	2.84	2.88	2.92	2.96	3.00	3.04	3.08	3.13	3.17	3.21	3.25
26	2.95	3.00	3.04	3.08	3.12	3.17	3.21	3.25	3.29	3.33	3.38
27	3.07	3.11	3.16	3.20	3.24	3.29	3.33	3.37	3.42	3.46	3.51
28	3.18	3.23	3.27	3.32	3.36	3.41	3.45	3.50	3.54	3.59	3.63
29	3.29	3.34	3.39	3.43	3.48	3.53	3.58	3.62	3.67	3.72	3.76
30	3.41	3.46	3.50	3.55	3.60	3.65	3.70	3.75	3.80	3.84	3.89
31	3.52	3.57	3.62	3.67	3.72	3.77	3.82	3.87	3.92	3.97	4.02
32	3.63	3.68	3.74	3.79	3.84	3.89	3.94	4.00	4.05	4.10	4.15
33	3.75	3.80	3.85	3.91	3.96	4.01	4.07	4.12	4.17	4.23	4.28
34	3.86	3.91	3.97	4.02	4.08	4.13	4.19	4.24	4.30	4.35	4.41
35	3.97	4.03	4.08	4.14	4.20	4.25	4.31	4.37	4.42	4.48	4.54

Si $t < 0$ °C, la corrección es aditiva.
Si $t > 0$ °C, la corrección es sustractiva.

TABLA II

Correcciones de las lecturas barométricas a la gravedad normal

a) Corrección de latitud geográfica.

Latitud	LECTURA BAROMETRICA EN mm Hg					
N o S	700	720	740	760	780	800
0°	- 1.88	- 1.93	- 1.99	- 2.04	- 2.09	- 2.15
5°	- 1.85	- 1.90	- 1.96	- 2.01	- 2.06	- 2.11
10°	- 1.77	- 1.82	- 1.87	- 1.92	- 1.97	- 2.02
15°	- 1.63	- 1.68	- 1.72	- 1.77	- 1.82	- 1.87
20°	- 1.45	- 1.49	- 1.53	- 1.57	- 1.61	- 1.65
25°	- 1.22	- 1.26	- 1.29	- 1.33	- 1.36	- 1.40
30°	- 0.96	- 0.99	- 1.01	- 1.04	- 1.07	- 1.09
35°	- 0.67	- 0.69	- 0.70	- 0.72	- 0.74	- 0.76
40°	- 0.36	- 0.37	- 0.38	- 0.39	- 0.40	- 0.41
45°	- 0.04	- 0.04	- 0.04	- 0.04	- 0.04	- 0.04
50°	+ 0.28	+ 0.29	+ 0.30	+ 0.31	+ 0.32	+ 0.33
55°	+ 0.60	+ 0.61	+ 0.63	+ 0.65	+ 0.66	+ 0.68
60°	+ 0.89	+ 0.91	+ 0.94	+ 0.96	+ 0.99	+ 1.02
70°	+ 1.38	+ 1.42	+ 1.46	+ 1.50	+ 1.54	+ 1.58
80°	+ 1.70	+ 1.75	+ 1.80	+ 1.85	+ 1.90	+ 1.95
90°	+ 1.81	+ 1.87	+ 1.92	+ 1.97	+ 2.02	+ 2.07

b) Corrección de altura sobre el nivel del mar.

Puede tomarse $\Delta = -\ 3.1 \cdot 10^{-7} \cdot h \cdot b$; siendo h la altura sobre el nivel del mar (en metros) y b la lectura barométrica (en mm Hg).

TABLA III

Corrección de lecturas barométricas por capilaridad

Diámetro del tubo	ALTURA DEL MENISCO EN mm					
mm	0.8	1.0	1.2	1.4	1.6	1.8
6	0.82	0.99	1.15	1.30		
7	0.59	0.71	0.83	0.93	1.04	
8	0.42	0.50	0.58	0.65	0.72	0.79
9	0.31	0.37	0.42	0.46	0.51	0.55
10		0.30	0.34	0.37	0.41	0.43
11		0.25	0.28	0.30	0.33	0.34
12		0.21	0.23	0.25	0.26	0.28
13		0.18	0.20	0.21	0.22	0.23
14		0.15	0.17	0.18	0.19	0.20
15		0.13	0.14	0.15	0.16	0.17
16		0.11	0.12	0.13	0.14	0.14
17		0.09	0.10	0.11	0.12	0.12
18		0.07	0.08	0.09	0.10	0.10

TABLA IV

Densidad del agua en g/cm^3

Temperatura (°C)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0.99987	0.99993	0.99997	0.99999	1.00000	0.99999	0.99997	0.99993	0.99988	0.99981
10	0.99973	0.99963	0.99953	0.99941	0.99927	0.99913	0.99897	0.99880	0.99862	0.99844
20	0.99823	0.99802	0.99780	0.99757	0.99733	0.99708	0.99681	0.99654	0.99626	0.99598
30	0.99568	0.99537	0.99506	0.99473	0.99440	0.99406	0.99372	0.99336	0.99300	0.99263
40	0.99225	0.99186	0.99147	0.99107	0.99066	0.99024	0.98982	0.98939	0.98896	0.98852
50	0.98807	0.98761	0.98715	0.98668	0.98620	0.98572	0.98524	0.98474	0.98424	0.98374
60	0.98323	0.98271	0.98218	0.98166	0.98112	0.98058	0.98003	0.97948	0.97892	0.97836
70	0.97779	0.97722	0.97664	0.97606	0.97547	0.97487	0.97427	0.97366	0.97306	0.97244
80	0.97182	0.97119	0.97056	0.96993	0.96929	0.96864	0.96799	0.96734	0.96667	0.96601
90	0.96534	0.96466	0.96399	0.96330	0.96261	0.96192	0.96122	0.96052	0.95981	0.95910
100	0.95838									

TABLA V

Presiones máximas del vapor de agua en mm Hg

Temperatura °C	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	4.579	4.926	5.294	5.685	6.101	6.543	7.013	7.513	8.045	8.609
10	9.209	9,844	10.518	11.231	11.987	12.788	13.634	14.530	15.477	16.477
20	17.535	18.650	19.827	21.068	22.377	23.756	25.209	26.739	28.349	30.043
30	31.824	33.695	35.663	37.729	39.898	42.175	44.563	47.067	49.692	52.442
40	55.324	58.34	61.50	64.80	68.26	71.88	75.65	79.60	83.71	88.02
	0	2	4	6	8	10	12	14	16	18
50	92.51	102.09	112.51	123.80	136.08	149.38	163.77	179.31	196.09	214.17
70	233.7	254.6	277.2	301.4	327.3	355.1	384.9	416.8	450.9	487.1
90	525.8	567.0	610.9	657.6	707.3	760.0	815.9	875.1	937.9	1004.4
110	1074.6	1148.7	1227.2	1309.9	1397.2	1489.1	1586.0	1687.8	1795.1	1907.8
130	2026.2	2150.4	2280.8	2416.3	2560.7	2710.9	2867.5	3031.6	3203.4	3382.8

TABLA VI

Temperatura de ebullición del agua en °C

Presión (mm/Hg)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
680	96.914	.954	.995	*.035	*.075	*.115	*.155	*.196	*.236	*.276
690	97.316	.356	.395	.435	.475	.515	.554	.594	.634	.673
700	97.712	.752	.791	.831	.870	.909	.948	.988	*.027	*.066
710	98.105	.144	.183	.222	.260	.299	.338	.377	.415	.454
720	98.492	.531	.570	.608	.646	.685	.723	.761	.799	.838
730	98.876	.914	.952	.990	*.028	*.066	*.104	*.141	*.179	*.217
740	99.255	.292	.330	.368	.405	.443	.480	.517	.555	.592
750	99.629	.667	.704	.741	.778	.815	.852	.889	.926	.963
760	100.000	.037	.074	.110	.147	.184	.220	.257	.294	.330
770	100.367	.403	.439	.476	.512	.548	.585	.621	.657	.693
780	100.729	.765	.801	.837	.873	.909	.945	.981	*.017	*.052
790	101.088	.124	.159	.195	.231	.266	.302	.337	.372	.408

IDENTIFICACIÓN DE RESISTENCIAS

CÓDIGO DE COLORES

Con el fin de identificar el valor de una resistencia sin necesidad de medirla con un polímetro, éstas vienen marcadas con cuatro franjas de color, pintadas sobre su superficie, que determinan el valor nominal de la resistencia y la tolerancia de variación del valor real sobre el valor nominal.

Las tres primeras franjas determinan el valor nominal y pueden ser de diez colores, asignándose a cada color una cifra según el esquema siguiente:

Negro	Marrón	Rojo	Naranja	Amarillo	Verde	Azul	Violeta	Gris	Blanco
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9

La última franja suele ser de color dorado o plateado y está asociada a la tolerancia. Si es de color dorado indica que la tolerancia (incertidumbre) es del 5 %, mientras que si es plateada la tolerancia es del 10%. Para medir una resistencia por el código de colores procedemos de la siguiente manera: Tomamos la resistencia de manera que la franja dorada o plateada quede a la derecha. La franja de tolerancia suele estar más separada de la franja vecina que las otras tres franjas entre sí. Si las cifras asociadas a los colores de las tres primeras franjas son, por este orden, *a*, *b* y *c*, los dos primeros dígitos del valor de la resistencia serán *ab*, mientras que *c* representa la potencia de diez por la que hay que multiplicar a las dos primeras cifras, o, dicho de un modo más simple, el número de ceros que debemos añadir a *ab* para encontrar el valor nominal.

Por ejemplo, si las franjas de una resistencia tienen los colores: naranja, marrón, rojo y plateado,

Naranja (3)	Marrón (1)	Rojo (2)	Plateado (10%)
3	1	00	310

el valor de la resistencia sería $R = (3100 \pm 300)\Omega = (3,1 \pm 0,3)$ KΩ. Notar como la incertidumbre ha sido redondeada para que sólo aparezca una sola cifra significativa.

.

PÉNDULO SIMPLE.
MEDIDA DE LA ACELERACIÓN DE LA GRAVEDAD

0

OBJETO

Estudio del péndulo simple y de las ecuaciones que gobiernan su movimiento. Aplicación al cálculo de la aceleración de la gravedad.

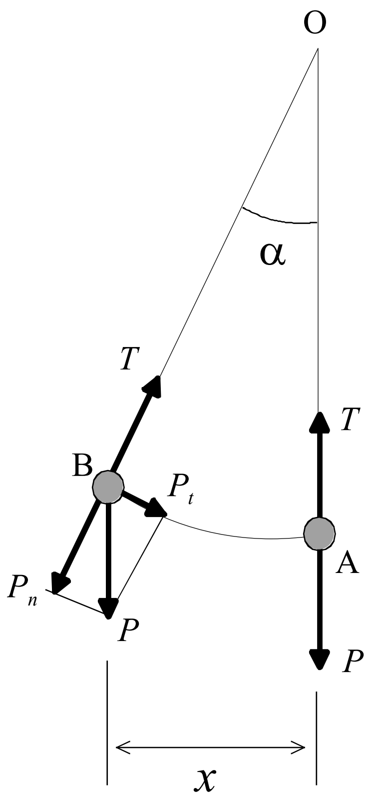
MATERIAL

El péndulo simple que se utiliza consta de un pequeño cilindro, suspendido de un eje de suspensión a través de un hilo delgado (cuya longitud se puede controlar). Para la medida de tiempos se dispone de un cronómetro.

FUNDAMENTO

Todo cuerpo capaz de girar alrededor de un eje horizontal, que no pase por su centro de gravedad, constituye un péndulo.

Supongamos un cuerpo de masa *m*, suspendido de un punto fijo O mediante un hilo de longitud *L* de masa despreciable. En reposo, el hilo se encontrará en posición vertical y el cuerpo ocupará la posición A de la figura, punto en el cual la fuerza peso, $P=mg$, se anula con la reacción (tensión T) del hilo. Si desviamos el cuerpo un ángulo α respecto a su posición de equilibrio A y lo llevamos a la posición B, el peso se descompone en una componente, P_n, normal a la trayectoria que describirá la masa en su movimiento, y en una componente, P_t, tangencial a dicha trayectoria. La componente normal y la tensión del hilo generan la aceleración centrípeta mientras que la componente P_t tiende a devolver el cuerpo a su posición de equilibrio A. Esta fuerza siempre es opuesta a la desviación respecto del equilibrio, por ello viene afectada de un signo negativo, y es la que da origen al movimiento periódico del péndulo.



De la figura anterior se deduce

$$P_t = -\, mg\ sen\alpha \quad = -\, \frac{mg}{L}\, x = -\, k\ x \tag{1}$$

donde *L* es la distancia entre el centro de gravedad y el centro de suspensión O. Esta ecuación es válida para ángulos pequeños, caso en el que la trayectoria real que sigue el cuerpo, circular de radio *L*, puede aproximarse por *x*, con lo cual la fuerza P_t se convierte en una fuerza recuperadora y la ecuación (1) en la ecuación de un movimiento armónico simple de constante recuperadora $k=mg/L$.

De acuerdo con la fórmula del periodo de un movimiento armónico simple,

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \tag{2}$$

el periodo del movimiento pendular vendrá dado por:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}} \tag{3}$$

que definiendo una nueva constante *K* mediante:

$$K = \frac{2\pi}{\sqrt{g}} \tag{4}$$

se convierte en:

$$T = K\,\sqrt{L} \tag{5}$$

fórmula que relaciona el periodo de un péndulo con su longitud. Alternativamente, la relación de T con L expresada en (5) también podría escribirse como $T^2 = (4\pi^2/g)L$

MÉTODO

Comprobación del isocronismo.

Es interesante hacer notar que el periodo de un péndulo no depende de la amplitud de las oscilaciones, es decir, las oscilaciones son isócronas. Naturalmente esto es válido en tanto en cuanto la amplitud de las oscilaciones sea lo suficientemente pequeña como para poder aproximar la trayectoria real por la magnitud *x* de la figura.

Para comprobar el isocronismo de las oscilaciones, fijar la longitud del hilo a un valor cercano al metro, separar el cilindro un ángulo aproximado de 5° y medir el tiempo *t* necesario para que transcurran 20 oscilaciones. El periodo T será:

$$T = \frac{t}{n} \tag{6}$$

Repetir la operación para amplitudes crecientes aumentando de 5° en 5° hasta 30°, ordenar en forma de tabla los resultados y construir una gráfica representando el periodo en función del ángulo. Comentar los resultados.

Cálculo analítico de la aceleración de la gravedad.

La ecuación (3) nos permite obtener la aceleración de la gravedad una vez conocido el periodo de las oscilaciones para una determinada longitud del péndulo, relación que viene dada por

$$g = 4\pi^2 \frac{L}{T^2} \qquad (7)$$

A partir de una de las medidas anteriores, calcule el valor analítico de la aceleración de la gravedad aplicando la expresión (7).

Calculo gráfico de la aceleración de la gravedad.

De la ecuación (5) se deduce que, si representamos en papel milimetrado el periodo al cuadrado de un péndulo frente a L, se obtendrá una recta de regresión ($y=ax+b$) cuya pendiente será:

$$a = (4\pi^2/g) \qquad (8)$$

Por lo tanto, una vez calculada la pendiente del ajuste resulta inmediato, despejando, obtener *g*. Para ello, determine el periodo T para diferentes longitudes del péndulo (L) y, a partir de T, calcule T^2. El ajuste por el método de los mínimos cuadrados de T^2 (en ordenadas) en función de L (en abscisas) permitirá determinar, a partir de la pendiente y tal y como se ha comentado, el valor de la aceleración de la gravedad. De la misma forma, ese ajuste ofrecerá algún valor para la ordenada en el origen (b) que, teóricamente, sería cero. Por lo tanto, un valor pequeño de “b” indicará que la práctica ha sido realizada satisfactoriamente.

RESULTADOS

1) Siguiendo las pautas descritas en el apartado anterior, llévense a cabo las medidas necesarias para la comprobación del isocronismo del péndulo. Construya una gráfica que represente el fenómeno de forma adecuada. Coméntense los resultados obtenidos.

2) En segundo lugar, determínese el valor de la aceleración de la gravedad y su incertidumbre mediante el procedimiento analítico descrito anteriormente.

3) Por último, determínese gráficamente el valor de la aceleración de la gravedad y compare el resultado con el apartado anterior.

En todos los apartados, y con el objeto de obtener una clara visión de los datos, ordénense los mismos en forma de tabla. Asimismo, deberá justificarse siempre el número de medidas realizadas. Se incluirá también cualquier cálculo o comentario que se considere oportuno.

CONSTANTE ELÁSTICA DE UN MUELLE

4

OBJETO

Determinar la constante elástica de un muelle por el método estático y el dinámico. Determinar la masa efectiva del muelle.

MATERIAL

Muelle vertical. Juego de pesas. Escala métrica o catetómetro. Cronómetro.

FUNDAMENTO

Cuando se cuelgan pesas en el extremo inferior de un muelle metálico helicoidal, sujeto por su extremo superior, el muelle se alarga y los alargamientos son, siempre que no se sobrepase el límite de elasticidad, proporcionales a las fuerzas aplicadas (*ley de Hooke*).

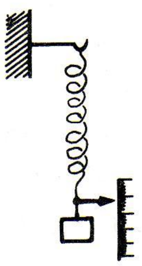
Si denominamos ***A*** el alargamiento que le produce al muelle una fuerza de tracción F, se tiene:

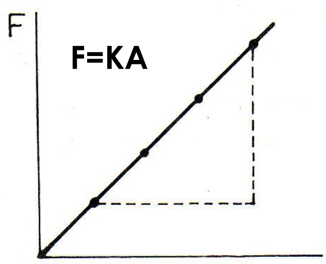
$$F = k\,A \tag{1}$$

donde k es la llamada *constante elástica* o *recuperadora* del muelle. Para determinar el valor de dicha constante, en esta práctica se seguirán dos procedimientos: uno estático (directo) y otro dinámico (indirecto).

Procedimiento estático:

Se van colgando del muelle, sucesivamente, pesas en orden creciente, y se miden los alargamientos ***A*** correspondientes. Representando gráficamente los resultados, F en ordenadas y ***A*** en abcisas, debe resultar una recta, cuya pendiente es la constante elástica $k = \dfrac{F}{A}$



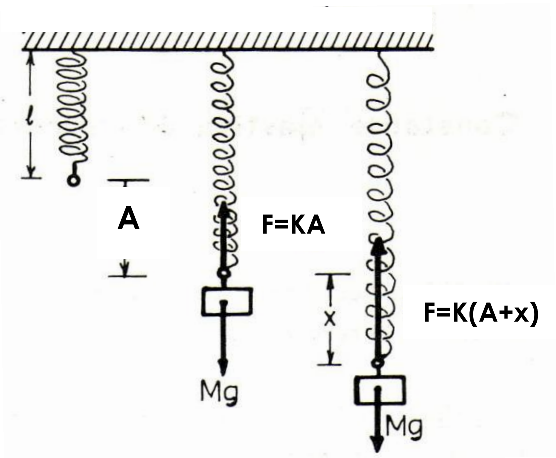


Procedimiento dinámico:

Cuando del muelle colocado verticalmente se suspende una masa M, éste se alarga por acción del peso (Mg) hasta que se alcanza una posición de equilibrio, de forma que la fuerza recuperadora del resorte iguale al peso, esto es:

$$k\,A = Mg \qquad (2)$$

Mediante la aplicación de una fuerza adicional producimos un nuevo alargamiento x y abandonamos el sistema. El alargamiento del muelle será **A**+x, y la fuerza vertical hacia arriba que ejerce el muelle sobre la masa (*fuerza recuperadora*) será k(**A**+x), de modo que habrá una fuerza neta sobre la masa



$$F = Mg - k(A+x) = -k\,x \qquad (3)$$

y por la segunda ley de Newton

$$-k\,x = M\frac{d^2x}{dt^2} \qquad (4)$$

o bien $M\dfrac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0$ (5)

que es la ecuación del movimiento armónico simple, siendo x la distancia medida desde la posición de equilibrio. La masa oscilará armónicamente con un periodo:

$$T = 2\,\pi\,\sqrt{M/k} \qquad (6)$$

Salvo para el caso ideal de un muelle de masa nula, habrá que hacer alguna modificación por el hecho de que también el muelle oscila. Pero no es posible sumar simplemente la masa del muelle a la del cuerpo suspendido, porque no todas las partes del primero oscilan con la misma amplitud; la amplitud del extremo inferior es igual a la del cuerpo suspendido, mientras que la del extremo superior es nula. Si designamos por m la masa del muelle, deberemos añadir a la masa M del cuerpo suspendido, una fracción f de m, y será:

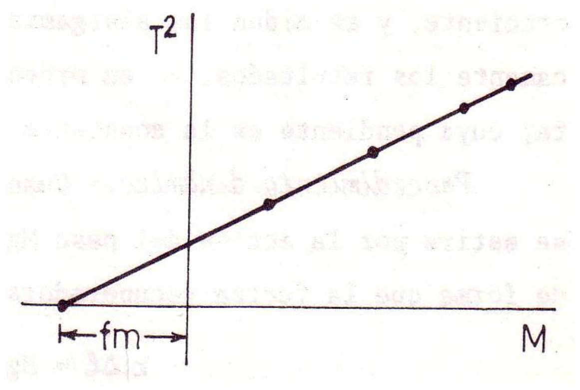
$$(M + f_m)\frac{d^2x}{dt^2} + k\,x = 0 \qquad (7)$$

por lo que

$$T = 2\pi\sqrt{(M + f_m)/k} \qquad (8)$$

donde T será el periodo real determinado experimentalmente. De la ecuación anterior se obtiene:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{k} M + \frac{4\pi^2}{k} f_m \qquad (9)$$



Así, si repetimos la experiencia para distintos valores de M, y representamos gráficamente los valores obtenidos de los cuadrados de los periodos (T^2) frente a las masas correspondientes (M), la gráfica resultante deberá ser una recta. Del valor de la pendiente de dicha recta se puede deducir el de la constante elástica k; la intersección con el eje de abcisas será la masa efectiva f_m del muelle; con éste valor y el de *m* se deduce el valor de *f*.

MÉTODO

a) Método estático

Para comenzar se debe determinar, empleando la balanza, la masa de cada una de las pesas que se vayan a usar.

(1) Determinar en la escala métrica la posición de equilibrio. A partir de ese punto se realizarán las medidas de los alargamientos.

(2) Ir aumentando paulatinamente el peso suspendido (añadiendo pesas), midiendo los alargamientos correspondientes. Anotar los resultados en una tabla, incluyendo las correspondientes incertidumbres.

(3) Representar gráficamente los resultados anotados en la tabla, con la fuerza en ordenadas y el alargamiento en abcisas, indicando los correspondientes rectángulos de incertidumbre.

(4) A partir de dicha gráfica determinar el valor de la constante elástica junto con la estimación de su incertidumbre, para ello se debe obtener la recta de ajuste mediante el método de mínimos cuadrados.

b) <u>Método dinámico</u>

(5) Cuelgue la primera pesa del extremo inferior del muelle. Una vez alcanzado el equilibrio, tire de la pesa suavemente hacia abajo, soltándola después.

(6) Deje que la masa realice algunas oscilaciones y cronometre después el tiempo que emplea en efectuar un cierto número de ellas (por ejemplo 20). Obtenga el valor del periodo.

(7) Repita la operación aumentando paulatinamente las masas suspendidas (añadiendo pesas) y lleve los resultados a una tabla.

(8) Construya una tabla con los valores de M y T^2, lleve estos datos a una gráfica, representando T^2 en ordenadas y M en abcisas. No olvide representar las correspondientes incertidumbres.

(9) Determine la masa del muelle m utilizando la balanza.

(10) A partir de los datos anteriores obtenga los valores de la constante elástica k y de la fracción de la masa del muelle f. Para ello realice el ajuste por el método de mínimos cuadrados.

RECUERDE: Hacer tres determinaciones de cada medida (alargamientos en el caso estático y tiempos en el caso dinámico) para cada masa colgada en el muelle. A partir de esas tres medidas, comprobar la suficiencia de las mismas (análisis de la dispersión) y, en su caso, realizar las medidas necesarias adicionales.

CUESTIONES

1. Compare los resultados de la constante elástica obtenidos por ambos métodos.
2. Demuestre que teóricamente f=1/3, de forma que la masa efectiva del sistema oscilante es M+m/3.
3. ¿Se podría utilizar un muelle vertical como el de esta práctica para determinar el valor de la aceleración de la gravedad? ¿Cómo?

DETERMINACIÓN DE DENSIDADES DE LÍQUIDOS Y SÓLIDOS

8

OBJETO

Determinar la densidad de líquidos y sólidos, a partir del principio de Arquímedes usando la balanza de Mohr-Westphal y una balanza electrónica respectivamente

MATERIAL

Para determinar la densidad de un líquido: balanza de Mohr-Westphal, probeta, agua destilada y líquidos problemas.

Para determinar la densidad de un sólido: balanza electrónica, junto con su platillo, un estribo encajado al platillo, puente. Vaso de 250 cm^3, portaobjetos, agua destilada, termómetro y sólidos problema.

FUNDAMENTO

Densidad: Llamamos densidad absoluta o simplemente densidad, ρ, de un cuerpo homogéneo a su masa m, por unidad de volumen:

$$\rho = \frac{m}{V} \qquad (1)$$

***Principio de Arquímedes*:**

Este principio establece que todo cuerpo sumergido total o parcialmente en un fluido experimenta una fuerza vertical hacia arriba, llamada empuje, cuyo valor es igual al peso del fluido desalojado y cuya línea de acción pasa por el centro de gravedad del fluido desalojado (Figura 1).

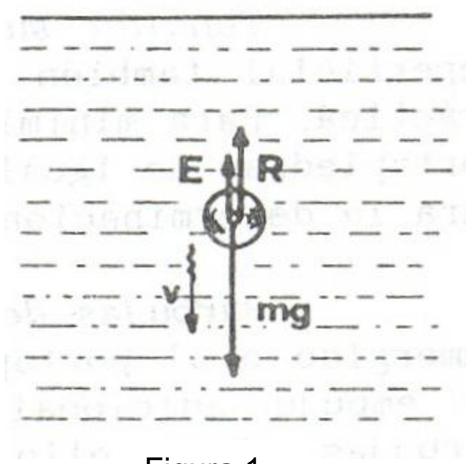


Figura 1

Así, si un cuerpo de volumen V se encuentra totalmente sumergido en un líquido de densidad ρ, el empuje que experimenta el cuerpo es:

$$E = \rho g V \qquad (2)$$

Determinación de la densidad de un líquido

Si sumergimos un mismo cuerpo sucesivamente en dos fluidos distintos de densidades ρ_1 y ρ_2, los empujes que experimenta se encuentran en la misma relación que las densidades de los líquidos, esto es:

$$\frac{E_2}{E_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1} \qquad (3)$$

de modo que si conocemos ρ_1 podemos determinar la densidad ρ_2 del otro líquido.

Balanza de Mohr-Westphal:

Esta balanza de brazos desiguales se utiliza para la determinación de densidades de líquidos más o menos densos que el agua (Figura 2). El brazo más corto termina en una masa compacta P de peso fijo, provista de una aguja que debe enfrentarse a otra aguja fija al chasis para obtener el equilibrio. Del extremo del brazo largo pende, mediante un hilo delgado, un inmersor de vidrio I, que normalmente lleva incorporado un termómetro para medir la temperatura del líquido cuya densidad se desea medir. En el brazo largo hay marcadas diez muescas, numeradas del 1 al 10, aunque realmente esta numeración debe interpretarse como 0.1, 0.2,..., de modo que el 10 representa la unidad.

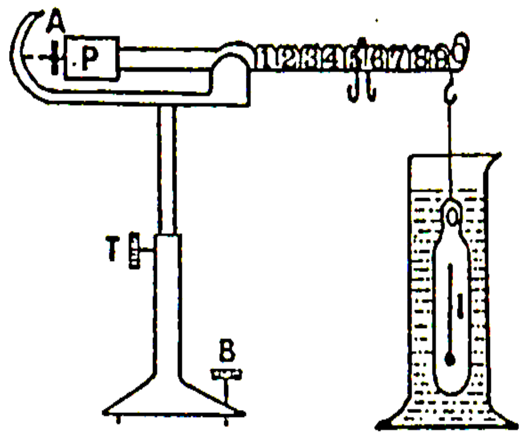


Figura 2

Cuando el inmersor está colgado en el aire, su peso queda equilibrado por el contrapeso (la balanza está equilibrada). Si se sumerge el inmersor en un líquido, el empuje hidrostático desequilibra la balanza, de tal forma que, si queremos reestablecer el equilibrio, deberemos colocar unas pesas en forma de horquilla, llamadas *reiters*, a caballo sobre el brazo graduado, de forma que se compense exactamente el empuje hidrostático.

Como en la expresión sólo aparece el cociente entre dos empujes, no tenemos que preocuparnos de cual sea la unidad para medir éstos. Así, el reiter unidad (1/1) se ha elegido de modo que colocado en la división 10 equilibre exactamente el empuje que experimenta el inmersor cuando está sumergido en agua pura (exenta de aire) a 4°C. Este reiter representa por tanto la unidad de empuje cuando está colocado en la división 10. Los demás reiters tienen, respectivamente una masa de 1/10, 1/100 de la del reiter unidad, de tal modo que colocados en la división 10 de la balanza, representan 1/10 y 1/100 de la unidad de empuje.

Cada reiter colocado en otra división, representa tantas décimas de su valor (por ejemplo 0.1 en el caso del reiter unidad) como indica el número de la muesca sobre la que se ha situado. Así por ejemplo, los reiter 1/1, 1/10 y 1/100 situados respectivamente en las muescas 7,6 y 5 representan un empuje de 0,765 unidades. Puesto que la unidad de empuje corresponde al agua y la densidad de ésta es bien conocida (1g/cm^3 a 4ºC), la balanza de Mohr-Westphal permitirá conocer la densidad de un líquido problema, a partir de la simple lectura de la posición de los reiters necesarios para equilibrar la balanza, cuando el inmersor está completamente sumergido en el líquido problema. No obstante, normalmente hay que proceder a efectuar la corrección instrumental de la balanza.

MÉTODO

1) Una vez montada la balanza, cuelgue el inmersor, limpio y seco, del gancho que hay en el extremo del brazo largo. La balanza debe quedar equilibrada. Si no es así, actúe con los tornillos A y B hasta conseguir que las dos agujas queden enfrentadas.
2) Llene la probeta con agua destilada y, elevando la parte móvil de la balanza (tornillo T) si fuera preciso, coloque el inmersor dentro del agua destilada, de modo que quede completamente sumergido, sin tocar el fondo ni las paredes. Si quedasen burbujas de aire adheridas al inmersor, debe sacudirse ligeramente para que se desprendan.
3) La balanza se habrá desequilibrado. Para restablecer el equilibrio, vaya colocando los reiters, sirviéndose de las pinzas, empezando por los mayores y ensayando cada uno de ellos en las distintas muescas, empezando en la diez y en sentido decreciente. Si al ensayar con un reiter, su peso resulta excesivo en una división y deficiente en la contigua, déjese en esta última y comience a ensayar con el reiter siguiente. Proceda de esta forma hasta conseguir equilibrar la balanza. Anote entonces el valor de ρ_a' así obtenida.
4) Introduzca un termómetro en la probeta, lea la temperatura y anótela. Consultando una tabla de densidades del agua pura a distintas temperaturas anote la densidad del agua ρ_a a esa temperatura. El cociente $f=\rho_a/\rho_a'$ es el factor de corrección instrumental de la balanza. Calcúlelo junto con su incertidumbre.
5) Descargue la balanza y saque el inmersor del agua. Límpielo y séquelo con cuidado y vuelva a colgarlo de nuevo.
6) Vacíe, limpie y seque cuidadosamente la probeta y llénela con uno de los líquidos problemas.
7) Sumerja el inmersor en el líquido problema y proceda como antes a determinar su densidad. Sea ρ' el resultado obtenido. Anótelo.
8) Aplique el factor de corrección instrumental f, obtenido en el punto 4, de modo que la verdadera densidad determinada del líquido problema es $\rho=f\rho'$. Anote el resultado.
9) Repita los pasos de 5 a 8 para otros líquidos problema.

Determinación de la densidad de un sólido

Si pesamos un cuerpo una vez sumergido en un líquido de densidad ρ, su peso será:

$$p_1 = p_a - \rho g V \tag{4}$$

donde p_a es el peso del cuerpo en el aire

$$p_a = \delta g V \tag{5}$$

siendo δ la densidad del sólido que queremos determinar. Debe tenerse en cuenta que estamos despreciando el empuje del aire.

Por tanto, si podemos determinar el peso del sólido en el aire, así como el empuje que experimenta en el seno de un líquido de densidad ρ conocida, de las expresiones anteriores nos queda:

$$\delta = \frac{p_a}{E}\rho \tag{6}$$

La posible consideración de factores que pueden afectar al resultado depende de la exactitud exigida. Revisemos algunos de ellos.

Temperatura:

La variación de la densidad de los sólidos con la temperatura es, en general, muy pequeña, y por tanto, normalmente despreciable. Por el contrario, para los líquidos, la variación de la densidad con la temperatura es del orden de magnitud de 1 por mil por cada grado centígrado. Puesto que las determinaciones de la densidad de los sólidos se realizan mediante un líquido auxiliar en el que se sumergen, para determinar la densidad con una exactitud superior al 1% debe de tenerse en cuenta el influjo de la temperatura en la densidad del líquido.

Empuje del aire:

La densidad del aire es de un orden de magnitud de 10^{-3} g/cm^3. Así pues, cualquier cuerpo sumergido en el aire, experimenta un empuje del orden de 10^{-3} del que experimenta en el seno del agua. Este fenómeno puede despreciarse en la determinación de la densidad de un sólido, pero si se requiriera una gran precisión sería necesario tenerlo en cuenta, siendo la densidad verdadera aproximadamente mayor en 0.001 g/cm^3 que la calculada.

Profundidad de inmersión del cuerpo sumergible:

El cuerpo sumergible está suspendido de un alambre de aproximadamente 0.2 mm de diámetro. Por consiguiente, el alambre experimenta un empuje que dependerá de la longitud de alambre sumergida. Para minimizar el error introducido por este motivo, el portaobjetos debe estar suspendido del estribo de igual forma en las dos operaciones de pesada necesarias paras la determinación de la densidad de un sólido.

Tensión superficial del líquido:

Los fenómenos de tensión superficial también pueden afectar las medidas realizadas durante la práctica. Para minimizar su influencia, se sumergirá el portaobjetos de igual forma en las dos operaciones de pesada.

Burbujas de aire:

La adherencia de burbujas de aire al sólido sumergido en el portaobjetos, influye sobre el resultado, produciendo un empuje adicional, por lo que debe evitarse la presencia de las burbujas. Para ello se sacudirá ligeramente el portaobjetos en la primera inmersión en el líquido, antes de suspenderlo del estribo, para desprender las posibles burbujas de aire adheridas.

MÉTODO

La Figura 3 muestra un esquema del procedimiento a seguir.

1) Limpie cuidadosamente el material y séquelo.
2) Llene con agua destilada el vaso hasta que el sólido, una vez colocado en la cestita del portaobjetos, esté cubierto como mínimo con 1 cm de agua. Introduzca el termómetro. Coloque el vaso en el puente, concéntricamente bajo el colgante.
3) Suspenda el portaobjetos. Sacúdalo ligeramente en la primera inmersión, antes de suspenderlo del estribo, para desprender las posibles burbujas.
4) Tare la balanza. Debe indicar exactamente cero.
5) Ponga el sólido seco sobre la capsulita superior del portaobjetos, y anote su peso, p_a.
6) Tare de nuevo la balanza (con el sólido en la capsulita). De nuevo debe dar una lectura de cero.
7) Saque el sólido de la capsulita y póngalo en la cestita inferior dentro del agua. En la balanza aparecerá el empuje E, con signo negativo.
8) Lea la densidad del agua destilada, a la temperatura t medida con el termómetro, en la tabla de densidad del agua en función de la temperatura (interpole si fuera necesario).
9) Siga el mismo procedimiento, desde el apartado 1, para otros sólidos problema. Anote los resultados en una tabla, junto con sus incertidumbres.

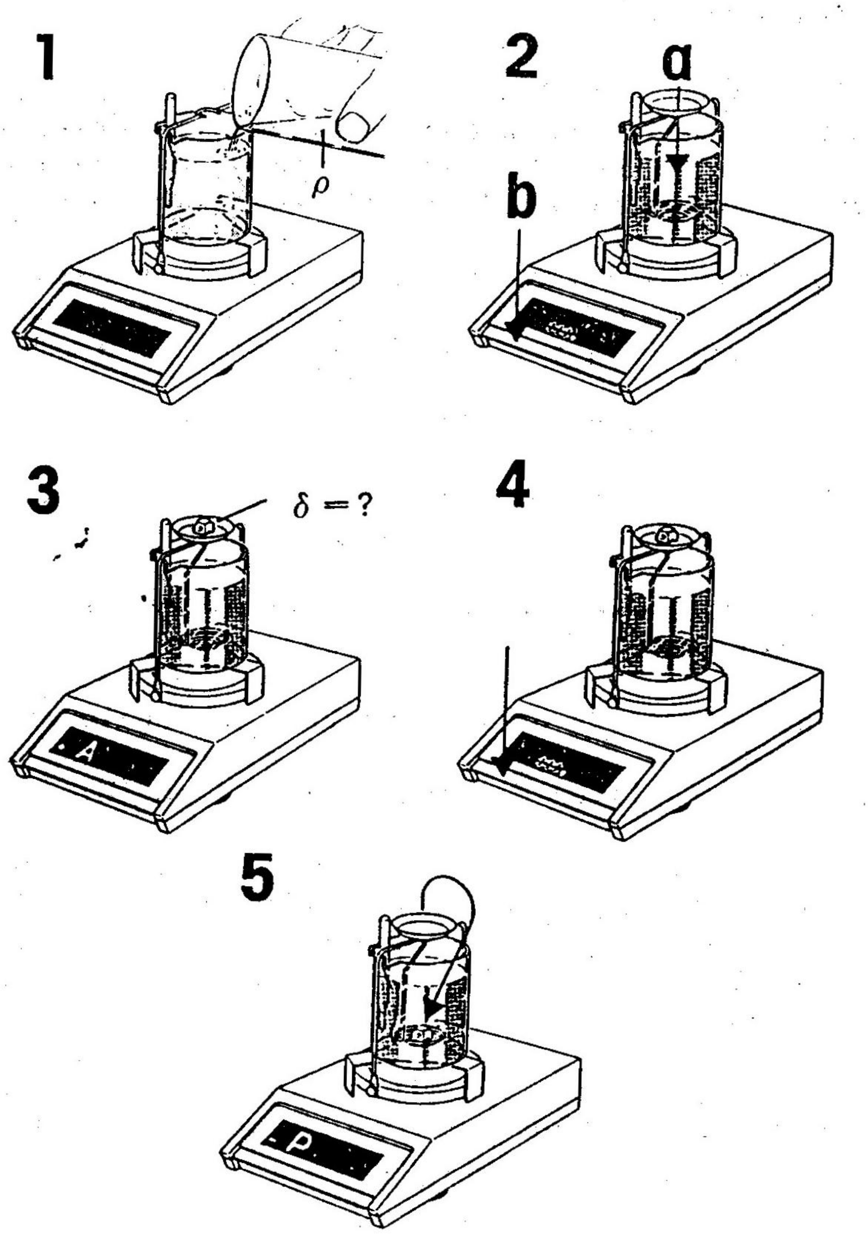


Figura 3

MEDIDA DE LA VISCOSIDAD POR EL MÉTODO DE STOKES

9

OBJETO

Determinación del coeficiente de viscosidad de un líquido por el método de Stokes y comprobación de la ley de Stokes.

MATERIAL

Probeta de 1000 cm^3 o tubo de vidrio de unos 5 cm de diámetro y al menos 60 cm de longitud, cerrado por un extremo (Fig. 1), esferas de acero idénticas, de un diámetro no superior a 2 mm, líquido problema, cronómetro, termómetro, palmer y regla graduada en milímetros.

FUNDAMENTO

***Arrastre sobre un cuerpo sumergido*.**

Cuando un cuerpo se mueve a través de un fluido, aparece una fuerza sobre el cuerpo que se opone a dicho movimiento. Dicha fuerza, que recibe el nombre de *fuerza de arrastre*, tiene su origen en los esfuerzos tangenciales y normales que ejerce el flujo sobre la superficie del cuerpo.

La fuerza de arrastre sobre un cuerpo de geometría dada resulta muy difícil de determinar analíticamente, ya que depende de un gran número de factores. Por eso, es necesario recurrir básicamente a la adquisición de datos experimentales y, con esta finalidad, es costumbre expresar dicha fuerza en la forma:

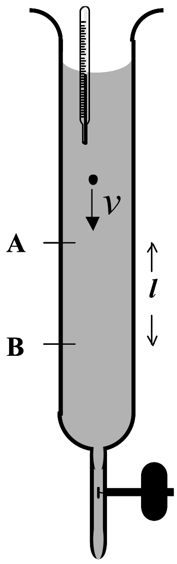


Figura 1

$$F_D = C_D \left(\frac{1}{2} \rho v^2 \right) A \qquad (1)$$

donde v es la velocidad relativa del cuerpo en el fluido, ρ la densidad del fluido, A el área de la sección transversal máxima que el cuerpo ofrece al flujo y C_D un parámetro empírico llamado *coeficiente de arrastre*, cuyo valor depende de la forma geométrica del cuerpo y de la orientación de éste respecto al flujo, así como del valor del *número de Reynolds* asociado con el flujo alrededor del cuerpo. Dicho número de Reynolds, que designaremos por *R*, es una magnitud adimensional definida en la forma:

$$R=\frac{\rho v D}{\eta} \qquad (2)$$

donde ρ y v tienen el mismo significado que en [1], D es la longitud característica del cuerpo (el diámetro, en el caso de una esfera) y η es el coeficiente de viscosidad del fluido, que se mide en poises (P) en el sistema cegesimal (c.g.s.) y en DP en el S.I.

En la Figura 2 se representa gráficamente la dependencia del coeficiente de arrastre con el número de Reynolds para el caso de una esfera lisa. Se trata de una gráfica logarítmica (log C_D *en función de* log R). Como puede apreciarse, el coeficiente de arrastre varía de una forma complicada conforme aumenta el valor de número de Reynolds.

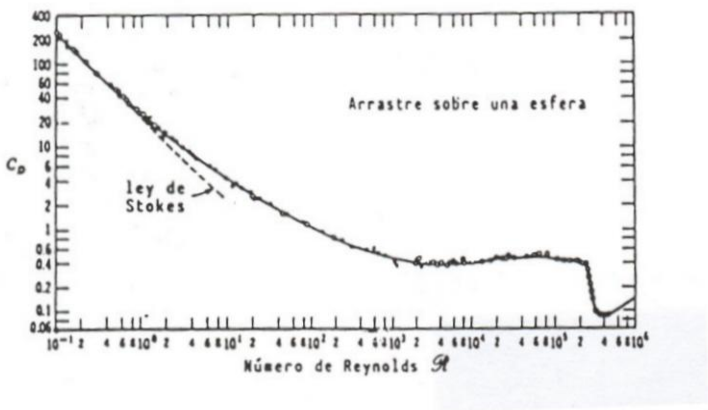


Figura 2

Ley de Stokes.

Para valores pequeños del número de Reynolds (R < 1), es posible determinar analíticamente la expresión de la fuerza de arrastre sobre una esfera lisa, obteniéndose:

$$F_D=3\ \pi\ \eta\ D\ v \qquad (3)$$

expresión que es conocida como ley de Stokes, en honor del físico irlandés Sir George Stokes (1819-1903), que la dedujo por primera vez en 1845. Esta ley establece que la fuerza de arrastre viscoso que se opone al movimiento de una esfera a través de un fluido, cuando R < 1, es proporcional a la viscosidad del fluido, al diámetro de la esfera y a la velocidad de la misma en el seno del fluido.

Teniendo en cuenta la definición del coeficiente de arrastre [1], puede comprobarse fácilmente que

$$C_D=\frac{28}{R} \quad \text{para} \quad R<1 \qquad (4)$$

para el caso de una esfera, lo que concuerda excelentemente con los resultados experimentales, como puede observarse en la Figura 2.

Medida de la viscosidad.

Podemos servirnos de la ley de Stokes para realizar una medida precisa de la viscosidad de un fluido. Consideremos una esfera lisa, de masa *m* y diámetro *D*, que cae en el seno de un fluido viscoso (Fig. 3). Las fuerzas que actúan sobre la esfera son: su peso *mg*, el empuje hidrostático *E* y la fuerza de arrastre viscoso F_D. La segunda ley de Newton nos permite escribir:

$$mg - E - F_D = ma \tag{5}$$

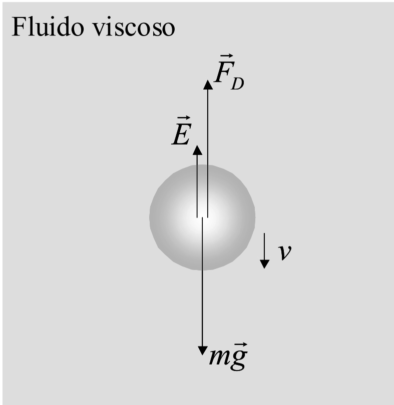


Figura 3

Como consecuencia de la aceleración de la esfera, su velocidad aumenta; pero, puesto que la fuerza de arrastre F_D es proporcional a la velocidad, también aumenta la resistencia al movimiento. Así pues, la esfera llegará a alcanzar una velocidad tal que la fuerza peso sea compensada por la suma del empuje hidrostático y la fuerza de arrastre. Entonces, la aceleración de la esfera será nula y su velocidad no seguirá aumentando. En estas condiciones, la esfera se moverá con una velocidad constante que recibe el nombre de *velocidad límite* (v_{lim}).

Si δ es la densidad de la esfera y ρ la del líquido, el peso de la esfera y el empuje hidrostático sobre ella vendrán dados por:

$$mg = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \delta \; g = \frac{\pi}{6} D^3 \delta \; g \tag{6}$$

$$E = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{D}{2}\right)^3 \rho \; g = \frac{\pi}{6} D^3 \rho \; g \tag{7}$$

de modo que, una vez alcanzada la velocidad límite, tendremos:

$$mg = E + F_D \tag{8}$$

o sea:

$$\frac{\pi}{6} D^3 \delta \; g = \frac{\pi}{6} D^3 \rho \; g + 3 \; \pi \; \eta \; D \; v_{\lim} \tag{9}$$

de donde:

$$v_{\lim} = \frac{D^2\left(\delta - \rho\right) \; g}{18 \; \eta} \tag{10}$$

relación que nos permite determinar el coeficiente de viscosidad de un fluido a partir de la medida de la velocidad límite de caída de pequeñas esferas a través del mismo, con tal de que el número de Reynolds asociado al flujo alrededor de las esferas sea menor que la unidad.

Con todo rigor, la expresión [9] solamente es válida para esferas que caen en el seno de un líquido de extensión indefinida. En las condiciones experimentales, en las que las esferas caen axialmente a través de un líquido viscoso contenido en una probeta o en un tubo cilíndrico de diámetro ϕ, hay que efectuar ciertas correcciones:

a) Corrección debida a la longitud finita del tubo, en el sentido de que la esfera tiende asintóticamente al valor de la velocidad límite. En las condiciones en que se ha planificado nuestra experiencia, esta corrección puede despreciarse.

b) *Corrección de Ladenburg*: El influjo de las paredes del tubo da lugar a una disminución de la velocidad límite de caída. Si llamamos v_m a la **velocidad medida experimentalmente**, la velocidad corregida de este efecto es

$$v_{\lim} = (1 + 2.4\frac{D}{\phi})\ \ v_m \tag{11}$$

donde ϕ es el diámetro interno del tubo.

Para un líquido dado, el valor del coeficiente de viscosidad depende enormemente de la temperatura, por lo que es necesario especificar ésta en el instante en que se determina la viscosidad.

MÉTODO

a. Medidas preliminares

Para determinar la viscosidad del líquido problema será necesario disponer de los datos siguientes:

- El diámetro *D* de las bolas.
- La densidad δ de las bolas (determinada a partir de su masa y radio).
- La densidad ρ del líquido problema.
- El diámetro interno ϕ de la probeta o tubo (dato de la práctica o medida con un palmer).
- La distancia "l" entre las marcas en la probeta o tubo (determinada en la escala milimetrada del dispositivo).

b. Velocidad límite

(1) Medir y anotar la temperatura del líquido problema contenido en la probeta o tubo. Conviene repetir esta medida varias veces en el transcurso de la experiencia para asegurarnos de que ésta no cambia significativamente.

(2) Si fuese necesario, limpiar bien las bolas y secarlas. Resulta conveniente manejarlas con unas pinzas de madera.

(3) Dejar caer una bola desde una corta distancia sobre la superficie libre del líquido problema, en el centro de dicha superficie. La bola deberá descender a lo largo del eje de la probeta o tubo, lejos de las paredes.

Para tal fin se usará el tubo de vidrio dispuesto en el montaje según se indica en la Fig. 1. Medir y anotar el tiempo de tránsito de la bola entre las dos marcas señaladas en la probeta o tubo.

(4) Repetir la operación anterior las veces que sea preciso.

(5) Determinar el valor medio de los tiempos de tránsito obtenidos anteriormente y, a partir de éste, calcular la velocidad límite de caída.

(6) Aplicar la corrección de Ladenburg [11] para obtener la velocidad límite corregida.

c. Coeficiente de viscosidad

(1) Calcular el valor del coeficiente de viscosidad del líquido utilizando la expresión [10].

(2) Calcular el valor del número de Reynolds [2] y asegurarse de que se ha trabajado en las condiciones de validez de la ley de Stokes.

(3) Calcular el valor del coeficiente de arrastre por medio de la expresión

$$C_D = \frac{4}{3}\frac{D}{v_{\lim}^2} \quad g\left(\frac{\delta}{\rho} - 1\right) \tag{12}$$

DATOS:

Bolitas (para el cálculo de δ) :

Diámetro (D) = (2,75 $\pm$ 0,01) mm

Masa = (138,5 $\pm$ 0,1) mg

Aceite:

ρ = 0,8913 gr/cm^3 (no considere incertidumbre para este dato)

EQUIVALENTE EN AGUA DE UN CALORÍMETRO

11

OBJETO

Determinar el equivalente en agua de un calorímetro.

MATERIAL

Para realizar esta práctica se dispone de un vaso de Dewar o vaso calorimétrico provisto de un termómetro y un agitador. Vaso de precipitado. Hielo y papel de filtro o similar.

FUNDAMENTO

Vaso de Dewar.

Los vasos de Dewar (también denominados calorímetros o, popularmente, "*termos*"), son unos recipientes de dobles paredes de vidrio entre las cuales se ha realizado el vacío. El vaso suele venir embutido en una carcasa de plástico que sirve para protegerlo de pequeños golpes fortuitos. Como el vacío que existe entre las paredes no permite la conducción del calor, los vasos de Dewar conservan muy bien la temperatura de los cuerpos colocados en su interior y, por ello, se utilizan como vasos calorimétricos. Para reducir las pérdidas de calor por radiación, la pared interior suele estar plateada, lo que le confiere un aspecto metálico. Pero no debemos olvidar la suma fragilidad del vaso de Dewar por lo que evitaremos los errores que a veces se cometen como machacar el hielo dentro del vaso, producir cambios repentinos de temperatura dentro del mismo, verter agua hirviendo en el vaso o dejar caer objetos pesados bruscamente en su interior (en la mayoría de los que actualmente se venden como termos, el plástico sustituye al vidrio y el poliuretano al vacío. Son mucho menos aislantes, pero mucho más baratos y muchísimo menos frágiles); por esta razón serán los que utilizaremos.

***Equivalente en agua de un calorímetro*.**

Se llama así, y se suele denotar por *K*, al producto de la masa del calorímetro por el calor específico de la sustancia de la que está fabricado, esto es, a su capacidad calorífica. Evidentemente, dado que la capacidad calorífica media del agua a temperaturas habituales es prácticamente de 1cal/(g·ºC), el valor de *K* representa la masa de agua que debería tener un calorímetro, hipotéticamente construido con agua, para que cediera o absorbiera la misma cantidad de calor que el calorímetro en cuestión. Por ello, con frecuencia, el equivalente en agua del calorímetro se expresa en gramos de agua. No obstante, las verdaderas unidades de *K* son calorías/°C.

Como en la práctica calorimétrica no sólo el vaso absorbe calor, sino también el agitador, el termómetro, etc., es preferible proceder a la determinación experimental del *equivalente del agua total* del calorímetro con todos sus accesorios.

***Método de las mezclas*.**

Cuando se mezclan dos sustancias, que se encuentran inicialmente a distintas temperaturas, el cuerpo a mayor temperatura cede calor al que está a menor temperatura, hasta que se alcanza una temperatura de equilibrio idéntica para las dos sustancias. El proceso debe ser tal que no haya flujo calorífico hacia o desde los cuerpos circundantes (medio ambiente), es decir, que el sistema esté adecuadamente aislado.

Con el fin de minimizar esta ganancia o pérdida de calor, se utilizan los *vasos (de) Dewar*, ya que con ellos el intercambio calorífico con el medio ambiente es extremadamente reducido. Un procedimiento para reducir aún más el efecto de este intercambio calorífico es comenzar con el calorímetro algo más caliente que el medio que lo rodea y acabar cuando su temperatura está por debajo de la del ambiente. En este caso, el calor que pierde el calorímetro y su contenido cuando su temperatura es superior a la del medio ambiente se ve compensada con el calor que gana mientras su temperatura es inferior a la de aquél.

Si colocamos en el interior del calorímetro una cantidad M_1 de agua a una temperatura T_1 y después añadimos una masa M_2 de agua a una temperatura T_2, una vez efectuada la mezcla, se alcanzará una temperatura T de equilibrio, de modo que, si llamamos K al equivalente en agua del calorímetro y accesorios y $T_2 < T < T_1$, se verificará:

$$\left(M_1c+K\right)\left(T_1-T\right)=M_2c\left(T-T_2\right) \qquad (1)$$

de donde:

$$K=M_2c\frac{T-T_2}{T_1-T}-M_1c \qquad (2)$$

siendo c el calor específico del agua (c= 0,998 cal/g°C y una variación inferior al 1% para un intervalo de temperaturas comprendido entre 0 y 100°C).

MÉTODO

(1) Limpie cuidadosamente el interior del vaso de Dewar, séquelo exterior e interiormente.

(2) Pese el vaso de Dewar, junto con su termómetro y agitador. Sea M_0 la masa obtenida. Anótela.

(3) Llene el calorímetro hasta poco menos de la mitad con agua calentada hasta una temperatura que exceda en unos 10 ó 15ºC a la del ambiente. Cuando la temperatura sea estacionaria, anótela (temperatura T_1).

¡ATENCIÓN! **Para calentar el agua se usan los recipientes eléctricos con resistencia interna habilitados para ello. Alternativamente, se emplean hornillos eléctricos y recipientes metálicos. NO use el vaso de Dewar para calentar agua, es decir, NO lo coloque sobre el hornillo eléctrico.**

(4) Pese el vaso Dewar con el agua caliente, el termómetro y el agitador. Sea M' la nueva masa. Entonces, la masa del agua caliente será $M_1 = M' – M_0$.

(5) Coloque agua del grifo en el otro vaso. Para enfriarla ahora hasta una temperatura cercana a 0°C, añada unos cubitos de hielo y espérese a que todo el hielo se funda. Cuando la temperatura sea estacionaria, anótela (temperatura T_2).

(6) Vierta cuidadosamente el agua fría en el interior del vaso de Dewar hasta un par de centímetros por debajo de su borde. Tápelo y agite suavemente con el agitador con objeto de favorecer la mezcla. Mientras, observe el descenso de temperatura en el calorímetro. Cuando ésta permanezca estacionaria y uniforme en todo el volumen del líquido, anote su valor final T.

(7) Pese de nuevo el vaso Dewar con el agua, el termómetro y el agitador. Si es M'' la masa obtenida, la masa del agua fría se obtendrá como $M_2 = M'' – M'$.

(8) Mediante la ecuación (2) determine el equivalente en agua del vaso de Dewar.

Determine el equivalente en agua del vaso de Dewar y sus accesorios de acuerdo al esquema descrito. Inclúyanse las medidas realizadas, la justificación del número de las mismas, los cálculos que considere oportunos y exprese todas las magnitudes con la incertidumbre correspondiente.

CALOR DE FUSIÓN DEL HIELO

12

OBJETO

Determinar el calor latente de fusión del hielo utilizando el método de las mezclas.

MATERIAL

Para realizar esta práctica se dispone de un vaso de Dewar o vaso calorimétrico (*normalmente denominado "termo"*) provisto de un termómetro y un agitador, así como un cazo y hornillo para calentar agua, hielo y papel de filtro o similar.

FUNDAMENTO

Se llama *calor latente de fusión* de una sustancia a la cantidad de calor que hay que suministrar a la unidad de masa de esa sustancia para que, a la temperatura del punto de fusión, ésta cambie del estado sólido al líquido. El calor latente de fusión se suele medir en calorías por gramo (cal/g), aunque su unidad en el SI es el J/Kg, y se suele representar por L.

El calor puesto en juego en un proceso de cambio de estado puede determinarse por el *método de las mezclas*. Éste se basa en el hecho de que cuando se mezclan dos sustancias que inicialmente se encuentran a distinta temperatura, la que está a mayor temperatura cede calor a la que se encuentra a menor temperatura, hasta que se igualan las temperaturas en un valor de equilibrio intermedio de las anteriores.

El proceso anterior debe realizarse de tal forma que no haya intercambio de calor con el medio circundante; lo que, de forma aproximada, se consigue utilizando los vasos de Dewar (ver práctica 11 para su descripción) y trabajando de modo que inicialmente el vaso de Dewar o vaso calorimétrico y su contenido se encuentren a una temperatura algo superior a la del medio y, finalmente, a una temperatura algo inferior a la del medio. Como consecuencia de esta precaución, el calor cedido al medio por el vaso de Dewar y su contenido cuando la temperatura de éstos es superior a la del medio, se ve prácticamente compensado por el calor absorbido cuando la temperatura del vaso y su contenido es inferior a la del medio.

Como nuestro propósito es determinar el calor de fusión L del hielo, colocaremos en el interior del calorímetro una masa conocida de agua, M, a una temperatura bien determinada, T_0, y dejaremos fundir en ella una masa, m de hielo a 0°C. Así, si utilizamos la siguiente nomenclatura:

M = masa inicial de agua,
m = masa de hielo añadido a 0°C,
K = equivalente en agua del vaso de Dewar y accesorios (dato suministrado)
T_0 = temperatura inicial del agua en el vaso de Dewar,
T = temperatura final de equilibrio,
c = calor específico del agua (c =0,998 cal/g°C con una variación inferior al 1% para un intervalo de temperaturas comprendido entre 0 y 100 °C)
L = calor latente de fusión del hielo,

podremos escribir la siguiente ecuación de balance energético:

$$M c (T_0 - T) + K (T_0 - T) = m L + m c (T - 0) \qquad (1)$$

de donde:

$$L = \frac{M c + K}{m} (T_0 - T) - c\,T . \qquad (2)$$

MÉTODO

(1) Limpie cuidadosamente el interior del vaso de Dewar, séquelo interior y exteriormente y determine la masa M_0 del vaso de Dewar y sus accesorios (termómetro y agitador).

¡ATENCIÓN!: **Tenga en cuenta la suma fragilidad del interior del vaso de Dewar, por lo cual no lo someta a golpes, cambios bruscos de temperatura y no caliente directamente el agua en el mismo**

(2) Llene el vaso de Dewar, hasta poco más de la mitad y caliente, con el recipiente eléctrico habilitado para ello, una masa *M* de agua hasta una temperatura unos 10 o 15°C por encima de la temperatura ambiente.

(3) Pese el calorímetro con el agua y sus accesorios. Si denotamos por *M´* a esta masa, tendremos que la masa de agua vendrá dada por M = M´ - M_0.

(4) Tome unos cubitos de hielo del frigorífico del laboratorio y deposítelos en una mesa sobre papel de filtro, con objeto de que comiencen a fundir y

alcancen la temperatura de fusión del hielo (0°C), ya que, normalmente, salen del frigorífico a una temperatura inferior a 0°C.

(5) Agite con suavidad el agua del calorímetro y observe la temperatura que marca el termómetro sumergido en el agua. Repita la operación varias veces hasta cerciorarse de que la temperatura es uniforme en todo el volumen de agua. Esta temperatura es T_0.

(6) A continuación, tome un trozo de hielo, séquelo lo mejor posible e introdúzcalo en el calorímetro con cuidado de no salpicar agua hacia el exterior del mismo. Remueva cuidadosamente el agua del calorímetro y, tan pronto como haya fundido el trozo de hielo, lea la temperatura de la mezcla.

(7) Repita la operación anterior tantas veces como sea necesario para conseguir una temperatura del agua unos 10 ó 15 °C por debajo de la temperatura ambiente. En este momento deberá determinar la temperatura de equilibrio T de la mezcla.

(8) Determine la masa M'' del vaso de Dewar con el termómetro, el agitador, el agua y el hielo fundido. De esta manera, la masa m de hielo añadido será: $m = M'' - M'$.

(9) A partir de la expresión (2) podrá obtener el calor latente de fusión del hielo.

(10) Determine el calor latente de fusión del hielo. Inclúyanse en este apartado las medidas realizadas, la justificación del número de las mismas, los cálculos que considere oportunos y exprese todas las magnitudes con la incertidumbre correspondiente.

DATO:

$K = (60 \pm 1)$ cal/ºC

CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA. LEY DE OHM

17

OBJETO

Mediante el uso de un polímetro, montar un circuito de corriente continua y realizar en él las siguientes tareas:

- Comprobar la Ley de Ohm.
- Comprobar las reglas básicas que se utilizan en la asociación de resistencias.

MATERIAL

Fuente de corriente continua (c.c), placa de montaje, polímetro y resistencias de distinto valor.

FUNDAMENTO

Según la ley de Ohm (práctica 17), la caída de tensión, *V*, a través de una resistencia, *R*, por la que circula una intensidad de corriente, *I*, viene dada por:

$$V = IR \tag{1}$$

Esta expresión permite determinar el valor de una resistencia a través de sendas medidas de *V* e *I*, o conocer *I* a través de la medida de *V*, si conocemos *R*.

En muchos casos, las resistencias que aparecen en un circuito se encuentran formando agrupaciones. A veces será posible considerar dicha agrupación como resultado de dos asociaciones básicas de resistencias: la asociación en serie y la asociación en paralelo. La figura 1 esquematiza tanto la conexión como la resistencia equivalente para cada caso.

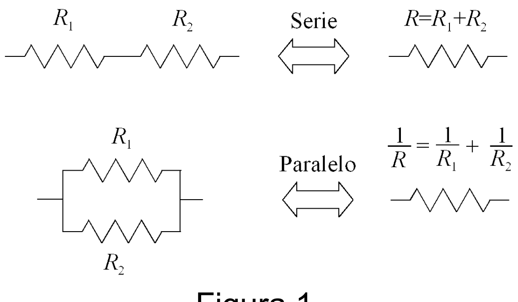


Figura 1.

Así, una aplicación sucesiva de agrupaciones serie y paralelo puede permitir la sustitución de un grupo de resistencias por una sola resistencia equivalente, reduciéndose entonces la topología de los circuitos. En la figura 2 se muestra un ejemplo de agrupación de resistencias que, tras sucesivas simplificaciones, se reduce a una sola resistencia equivalente.

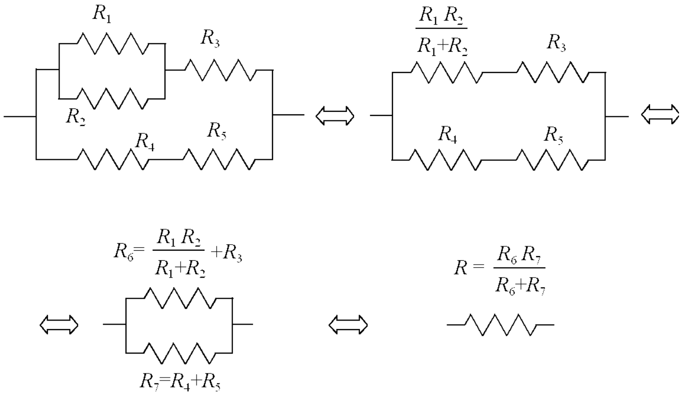
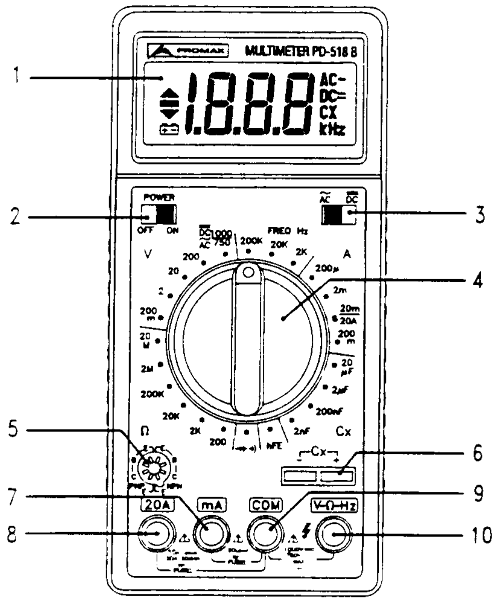


Figura 2

DISPOSITIVOS DE MEDIDA

A) Polímetro.

El polímetro es el instrumento de medida fundamental en cualquier experiencia de teoría de circuitos. En la figura 3 se muestra un esquema de polímetro digital *(puede que el que tenga a su disposición para realizar la práctica no sea exactamente el mismo modelo)*. Las lecturas aparecen en una pantalla de cristal líquido [1]; se conecta y desconecta mediante un conmutador de encendido y apagado [2] y otro conmutador [3] permite seleccionar si las lecturas serán de corriente continua (AC) o alterna (DC). Mediante un conmutador de intervalos [4] se selecciona tanto el tipo de medida (resistencia, tensión, corriente, etc.) como el máximo valor de la señal que el polímetro es capaz de medir en esa posición (fondo de escala). Con el fin de evitar posibles averías, **nunca deberá usarse una escala cuyo fondo esté por debajo de la señal a medir**. Finalmente, cuatro terminales de entrada y dos zócalos permitan conectar el polímetro con los circuitos o elementos a medir.



Controles e

[1] pantallaLCD
[2] interruptor de puesta marcha
[3] conmutador
[4] conmutador de funciones escala
[5] zócalohFE
[6] zócaloCx
[7] **mA** entrada de hasta 200mA
[8] **20 A**entrada de hasta 20
[9] **COM** entrada común conexión del cable prueba
[10] **V- Ω-Hz**entrada de resistencia y

Figura 3. Esquema de un polímetro digital.

Medidas de tensión:

Uno de los cables o punta de prueba se conecta al terminal [9] etiquetado COM (suele utilizarse el cable negro). Este terminal es el que sirve de referencia a la medida. La punta de prueba roja se conecta al terminal [10] V-Ω-Hz. Seleccione la posición adecuada del conmutador [3] DC/AC. Hacer un cálculo aproximado de la tensión esperada y colocar el conmutador de funciones [4] en una escala de tensiones superior a este dato. Si se desconoce este dato poner la escala mayor. Se conectan entonces las dos puntas de prueba en paralelo con los puntos entre los que se quiere determinar la tensión, procediendo a la lectura en la pantalla.

Medidas de intensidades:

La medida experimental de la intensidad se realiza conectando el polímetro en serie en la rama del circuito en la que se desea realizar la medición. No obstante, en esta práctica se estimará la intensidad a partir de los datos obtenidos de tensión y resistencia, empleando la Ley de Ohm.

Medidas de resistencias:

Aislar la resistencia o grupo de resistencias a medir del resto del circuito. De este modo nos aseguraremos de que medimos la resistencia deseada y no la resistencia equivalente del resto del circuito. De nuevo, uno de los cables se conecta al terminal [9] etiquetado COM. El otro cable se conecta al terminal [10] V-Ω-Hz. Hacer un cálculo aproximado de la resistencia esperada y colocar el conmutador de funciones [4] en una escala de resistencias superior a este dato. Conectar ambos cables en paralelo con la resistencia y proceder a la lectura. Si se elige un fondo de escala inferior a la resistencia a medir, aparecerá un 1 en la pantalla del polímetro.

B) Fuente de tensión.

En la figura 4 se muestra el esquema de la fuente de tensión típica *(puede que la que tenga a su disposición para realizar la práctica no sea exactamente el mismo modelo)*. **Puesta en marcha:** Antes de proceder a la puesta en marcha de la fuente, debe tenerse cuidado con que entre los terminales no haya conectado nada extraño. **Nunca conecte los terminales de salida de la fuente de tensión a la red eléctrica.**

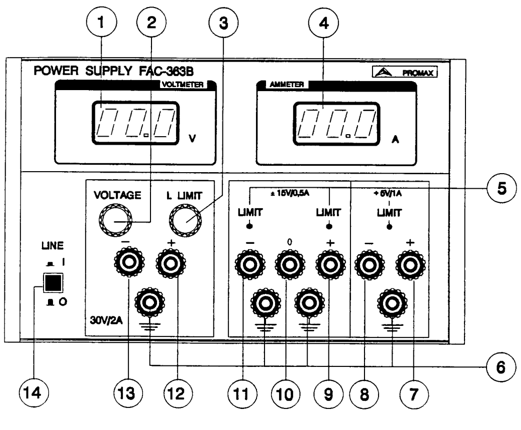


Figura 4

[1] Voltímetro digital 3 dígitos
[2] Ajuste de la tensión de salida (0-30 V). Potenciómetro multivuelta
[3] Ajuste del límite de corriente. Potenciómetro de una vuelta
[4] Amperímetro digital 3 dígitos
[5] Indicadores luminosos de exceso de carga en las fuentes de salida fija
[6] Bornes de conexión a tierra
[7] Borne positivo salida 5 V
[8] Borne negativo salida 5 V
[9] Borne salida + 15 V
[10] Borne 0 V de la fuente ± 15 V
[11] Borne salida -15 V
[12] Borne positivo salida 0 - 30 V
[13] Borne negativo salida 0 - 30 V
[14] Interruptor de puesta en marcha

MÉTODO

Medidas de resistencias.

Elegir tres resistencias. Determínese mediante el código de colores el valor nominal de las mismas y compárese el resultado con el obtenido mediante medición directa con el polímetro. Las resistencias están marcadas con una serie de líneas de diferentes colores que permiten identificar su valor sin necesidad de medirlas, así como el margen de incertidumbre o tolerancia de este valor. Al principio de este Libro de Prácticas se incluye un esquema de este código de colores.

Medida de resistencias equivalentes.

A continuación, llévese a cabo las agrupaciones representadas en la figura 5.

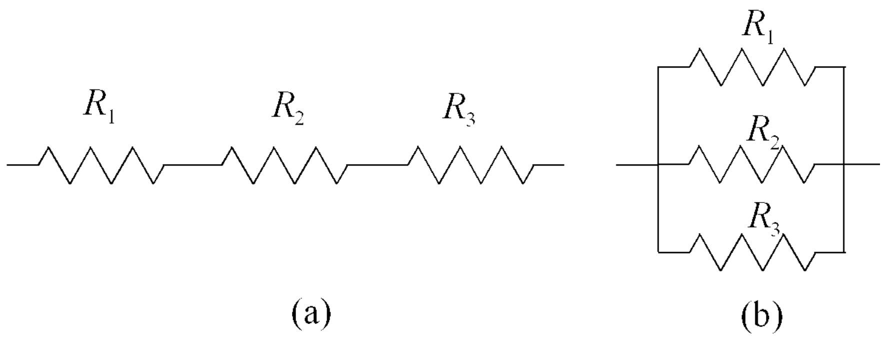


Figura 5

Calcúlese, a partir del código de colores, el valor esperado de la resistencia equivalente de cada agrupación. Elija un fondo de escala superior al mismo y mida con el polímetro el valor de la resistencia equivalente. Compárese el resultado experimental y el teórico.

Finalmente, constrúyase la asociación de resistencias de la figura 2 y compare el valor teórico, obtenido a partir del conocimiento del valor de las resistencias individuales (a partir del código de colores), con el medido directamente por el polímetro. No olvide realizar el cálculo de incertidumbre correspondiente.

Medida de tensiones.

Utilizando las agrupaciones de resistencias del apartado anterior y una fuente de tensión continua, se construyen los circuitos (a) y (b) de la figura 6.

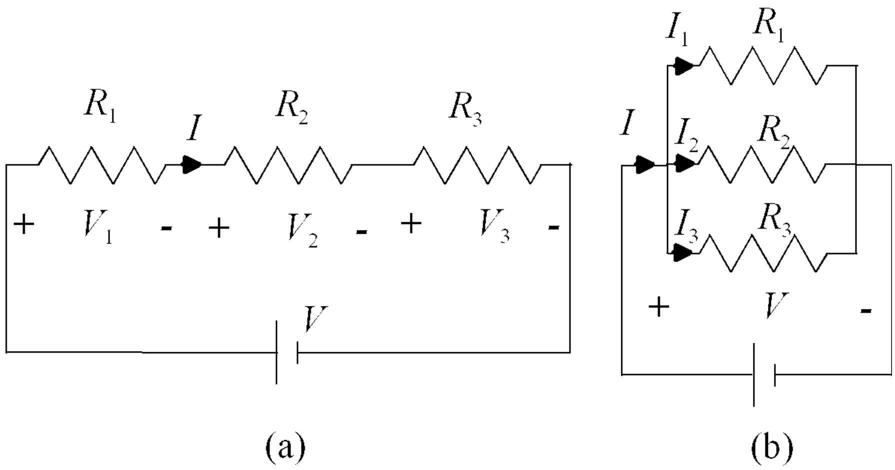


Figura 6

En el circuito en serie de la figura 6.a, mida con el polímetro la tensión V, entre los terminales de la fuente, y compruebe, midiendo las tensiones V_1, V_2 y V_3, que en la agrupación en serie se cumple:

$$V = V_1 + V_2 + V_3. \tag{2}$$

Compruébese que la corriente que circula por cada uno de los elementos que componen una asociación serie es la misma; es decir, $I = I_1 = I_2 = I_3$. Como no realizaremos en esta práctica medida directa de intensidades, comprobaremos experimentalmente lo anterior verificando que:

$$\frac{V}{R} = \frac{V_1}{R_1} = \frac{V_2}{R_2} = \frac{V_3}{R_3}, \tag{3}$$

con $R = R_1 + R_2 + R_3$.

A continuación, construimos el circuito de la figura 6.b. En primer lugar, verificamos que $I = I_1 + I_2 + I_3$, para lo cual comprobaremos que, con las medidas de tensión obtenidas con el polímetro en este circuito, se cumple:

$$\frac{V}{R} = \frac{V_1}{R_1} + \frac{V_2}{R_2} + \frac{V_3}{R_3}, \tag{4}$$

donde ahora $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$. También comprobaremos que $V = V_1 = V_2 = V_3$.

Comprobación de la Ley de Ohm.

Para comprobar la ley de Ohm, dada por la ecuación (1) de este documento, construiremos el circuito de la figura 7. Si es posible, se utilizarán resistencias con valores superiores a 1 KΩ, midiendo sus valores con el polímetro antes de la construcción del circuito.

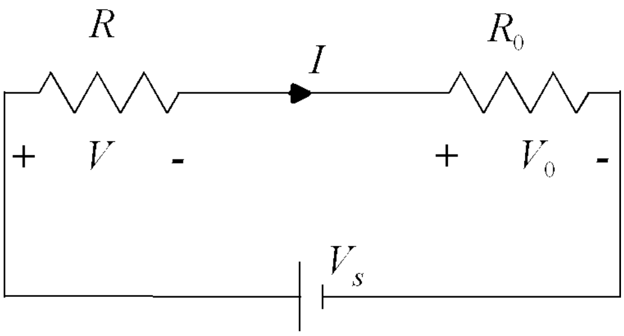


Figura 7

Se medirá la tensión *V* entre los extremos de la resistencia *R* directamente con el polímetro y la corriente *I* que pasa por *R* se medirá a través del cociente $\frac{V_0}{R_0}$, ya que por ambas resistencias circula la misma corriente, por estar en serie. Dando diez valores diferentes a V_s, se construirá una tabla con V_s, *V* e *I*. Con los datos de tensión *V* e intensidad *I,* se construirá una gráfica en papel milimetrado, colocando las intensidades en abscisas y las tensiones en ordenadas. Según la ecuación (1), está gráfica será una recta, cuya pendiente es precisamente *R*. Determínese gráficamente la pendiente de dicha recta y su incertidumbre para obtener un valor gráfico de *R*, que involucra a las diez medidas utilizadas en la construcción de la gráfica. Compárese el resultado con el obtenido por medida de la resistencia con el polímetro y con el obtenido del código de colores.

RESULTADOS

(1) Llévense a cabo todos y cada uno de los pasos descritos en los cuatro apartados anteriores, comparando los resultados experimentales con los que cabe esperar a partir del conocimiento del valor de las resistencias por el código de colores y de la tensión en los terminales de la fuente de alimentación. Todos los resultados deben ser expresados con su cota de incertidumbre.

(2) La gráfica del apartado “Comprobación de la Ley de Ohm”, debe ser ajustada mediante la técnica de mínimos cuadrados. La pendiente de este ajuste dará el valor de la resistencia que será comparado con el obtenido midiendo *R* directamente con el polímetro y con el código de colores.