

Relación de problemas 2
Geometría afín y euclídea del espacio.
Matemáticas II, Grado en Óptica y Optometría.

1. Calcula una ecuación implícita del plano tal que:

- (I) Pasa por el punto $P = (2, 1, 0)$ y es ortogonal al vector $v = (1, 0, -1)$.
- (II) Pasa por $P = (2, 0, -3)$ y es paralelo a $u = (1, 2, 3)$ y $v = (-1, 0, -3)$.
- (III) Pasa por los puntos $P = (1, 0, 0)$, $Q = (-1, 1, 6)$ y $R = (0, 1, 1)$.
- (IV) Pasa por $P = (4, -2, 1)$ y es perpendicular a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 1 + 7\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$
- (v) Pasa por $P = (2, 2, 1)$ y contiene a la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$
- (vi) Es paralelo al plano $x - 2y - z = 2$ y pasa por el punto $(0, 1, -1)$.
- (vii) Es paralelo al plano $2x - 3y - 6z = 14$ y dista 5 unidades del origen.

2. Determina unas ecuaciones paramétricas e implícitas de la recta r en cada uno de los siguientes casos:

- | | |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <ul style="list-style-type: none"> (I) $r \equiv \begin{cases} 3x + 2y - z = 7 \\ x - 4y + 2z = 0 \end{cases}$ (II) $r \equiv \begin{cases} x - 3y + 7z = 4 \\ 5x + y - z = 4 \end{cases}$ (III) La recta r pasa por el origen con vector director $v = (1, 2, 3)$. (IV) La recta r pasa por el punto $(-2, 0, 3)$ y lleva la dirección del vector $v = (2, 4, -2)$. (v) La recta r pasa por los puntos $(5, -3, -2)$ y $(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, 1)$. (vi) La recta r pasa por el punto $(1, 0, 1)$ y es paralela a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 3 + 3\lambda \\ y = 5 - 2\lambda \\ z = -7 + \lambda \end{cases}$ (vii) La recta r pasa por el punto $(-3, 5, 4)$ y es paralela a la recta | <p>dada por</p> <p style="text-align: center;">$s \equiv \begin{cases} x - 3y = 1 \\ x - 3z = -8 \end{cases}$</p> <ul style="list-style-type: none"> (viii) La recta r pasa por el punto $(2, 3, 4)$ y es paralela al plano xz y al plano yz. (ix) La recta r pasa por el punto $(-1, 0, -1)$, es paralela al plano $x + y + z - 1 = 0$ y corta a la recta $s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda \\ y = 4 + \lambda \\ z = \lambda \end{cases}$ (x) La recta r es perpendicular al plano $2x + 3y + 2z = -1$ y pasa por el punto $(3, -1, 1)$. |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

3. Calcula la posición relativa de las seis parejas que forman los siguientes cuatro planos:

$$\begin{aligned}\Pi_1 &\equiv 2x - y + 3z + 2 = 0, & \Pi_2 &\equiv 2x - y + 2z = 0, \\ \Pi_3 &\equiv -2x + y - 3z + 1 = 0, & \Pi_4 &\equiv 6x - 3y + 9z + 6 = 0.\end{aligned}$$

Si se cortan, calcula el ángulo que forman; si son paralelos, calcula la distancia entre ellos.

4. Halla la posición relativa de la recta r y el plano Π en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad \Pi \equiv 2x - 2y + z = 12 & \text{(III)} \quad \Pi \equiv 5x + 3y = 17 \\ r \equiv \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \lambda \\ y = -3/2 - \lambda \\ z = -1 + 2\lambda \end{cases} & r \equiv \begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ 5y + 3z = -11 \end{cases} \\ \text{(II)} \quad \Pi \equiv 2x + 3y = -5 & \text{(IV)} \quad \Pi \equiv 2x + 3y = 10 \\ r \equiv \begin{cases} x = 1 + 4\lambda \\ y = 2\lambda \\ z = 3 + 6\lambda \end{cases} & r \equiv \begin{cases} x = 1 + 3\lambda \\ y = -1 - 2\lambda \\ z = 3 \end{cases} \end{array}$$

Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman; si son paralelos, calcula la distancia entre ellos.

5. Determina la posición relativa de las rectas r y s en cada uno de los siguientes casos:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} \quad r \equiv \begin{cases} x = 4t + 2 \\ y = 3 \\ z = -t + 1 \end{cases} & \text{(II)} \quad r \equiv \begin{cases} x + 3y = 6 \\ x - 3z = 3 \end{cases} & \text{(III)} \quad r \equiv \begin{cases} 6x + 3y = 18 \\ y - 6z = 16 \end{cases} \\ s \equiv \begin{cases} x = 2\lambda + 2 \\ y = 2\lambda + 3 \\ z = \lambda + 1 \end{cases} & s \equiv \begin{cases} x = 1 + 4t \\ y = -2 + t \\ z = -3 - 3t \end{cases} & s \equiv \begin{cases} 4x - 2z = 16 \\ 4y - z = -18 \end{cases} \end{array}$$

Si se cortan, calcula el punto de corte y el ángulo que forman; en caso contrario calcula su distancia.

6. Calcula las distancias entre el punto $(2, 2, 1)$, el plano $x + y = 1$ y la recta

$$r \equiv \begin{cases} x + y + 2 = 0 \\ x + z - 1 = 0 \end{cases}$$

7. Sean $P = (1, 2, 0)$, $Q = (1, -1, 1)$ y $r \equiv \begin{cases} x - 2y - z = -2 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$

Calcula:

(I) una ecuación implícita del plano Π que pasa por P y Q y es paralelo a r ;

(II) la distancia de Π a r ;

(III) una ecuación implícita del plano que es perpendicular a r y pasa por P .

8. En los siguientes apartados, calcula la distancia entre el punto P y el plano Π :

(I) $P = (0, 0, 0)$ y $\Pi \equiv 2x + 3y + z = 12$. (II) $P = (1, 2, 3)$ y $\Pi \equiv 2x - y + z = 12$.

9. Calcula, en cada apartado, la distancia entre los planos Π_1 y Π_2 :

(I) $\Pi_1 \equiv x - 3y + 4z = 10$
 $\Pi_2 \equiv x - 3y + 4z = 6$

(II) $\Pi_1 \equiv 2x - 4z = 4$
 $\Pi_2 \equiv x - 2z = 5$.

10. Dado el punto $P = (0, 0, 0)$, calcula su punto simétrico respecto del plano $\Pi \equiv x - 2z = 1$.

11. Un rayo de luz incide sobre un espejo plano de ecuación $3x + 2y - z = 0$ con dirección de incidencia $v = (3, 1, 1)$. Calcula la dirección en la que es reflejado el rayo.

12. Determina que tipo de cuádrica definen las siguientes ecuaciones en \mathbb{R}^3 :

(I) $3x^2 - 2y^2 + 5z^2 = 1$

(V) $-x^2 - 5y^2 + 3z^2 = 1$

(II) $\frac{x^2}{25} + 4y^2 + \frac{z^2}{9} = 1$

(VI) $\frac{y^2}{25} + \frac{z^2}{9} = 1$

(III) $x = 4y^2 + z^2$

(VII) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$

(IV) $y = x^2$

(VIII) $z = x^2 - 4y^2$