GEOMETRÍA I.

Relación de problemas 3: APLICACIONES LINEALES

Grado en Matemáticas

1. Estudiar si las siguientes aplicaciones son lineales o no:

   a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y) = (x-y, x+3y, 2y)$.
   b) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (2x-3y, z^2-x+2, 3y-z-x)$.
   c) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}_2[u]$, $f(x,y,z) = (2x+z)u^2+(y-z)u+2y$.
   d) $f : \mathbb{R}^3 \to M_2[\mathbb{R}]$, $f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y-z & x+2z \\ y-3z & 2x+y+z \end{pmatrix}$.

   Para las aplicaciones que sean lineales, calcular su núcleo e imagen, y comprobar la fórmula de las dimensiones.

2. Calcular una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ cuyo núcleo esté generado por $\{(1,0,-1),(2,0,1)\}$ y cuya imagen esté generada por $(1,-2)$.

3. Encontrar un automorfismo f de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ (esto es, f es un isomorfismo de $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$ en sí mismo) de manera que $f(U) = U'$ donde

$$U = \{(a,b,0) \in \mathbb{R}^3 : a,b \in \mathbb{R}\}, \qquad U' = \{(c,c+d,d) \in \mathbb{R}^3 : c,d \in \mathbb{R}\}.$$

4. Sea $f : V \to V'$ una aplicación entre dos espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Demostrar que f es lineal si y sólo si el grafo de f, es decir, el conjunto:

$$G(f) = \{(v,v') \in V \times V' / \ v' = f(v)\}$$

   es un subespacio vectorial de $V \times V'$. Calcular también la dimensión de este subespacio cuando V y V' son espacios finitamente generados.

5. Sean V_1 y V_2 espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo K. Consideremos el espacio vectorial producto $V_1 \times V_2$ definido en el ejercicio 3 de la relación de problemas anterior.

   a) Demostrar que la *proyección i-ésima* $\pi_i : V_1 \times V_2 \to V_i$ dada por $\pi_i(v_1,v_2) = v_i$ es un epimorfismo para cada $i = 1,2$.

b) Demostrar que las *inclusiones* $i_1 : V_1 \to V_1 \times V_2$ e $i_2 : V_2 \to V_1 \times V_2$ dadas por:

$$i_1(v_1) = (v_1, 0), \quad i_2(v_2) = (0, v_2)$$

son monomorfismos.

6. Sea V un espacio vectorial sobre K y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = f$. Demostrar que $V = \mathrm{Nuc}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

7. Sea V un espacio vectorial sobre $K = \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ y $f : V \to V$ un endomorfismo de forma que $f \circ f = \mathrm{Id}_V$. Demostrar que f es un automorfismo y que $V = U \oplus W$, donde:

$$U = \{v \in V : f(v) = v\}, \quad W = \{v \in V : f(v) = -v\}.$$

8. En el espacio $M_2(\mathbb{C})$ de las matrices cuadradas de orden dos con coeficientes complejos se considera la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & i \end{pmatrix}.$$
Definimos la aplicación $R : M_2(\mathbb{C}) \to M_2(\mathbb{C})$ dada por $R(X) = X \cdot A$. Demostrar que R es un automorfismo y calcular su expresión matricial con respecto a una base B de $M_2(\mathbb{C})$. ¿Cuál es la matriz $M(R^{-1}, B)$?

9. Sea $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ la aplicación lineal dada por:

$$f(x,y,z,t) = (x+z-t, y+t, x+y+z).$$

Se pide lo siguiente:

a) Calcular bases del núcleo y de la imagen de f. ¿Es f un monomorfismo o un epimorfismo?

b) Sean $U = L((1,2,1,2),(0,-1,2,3))$ y $U' = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x-y=0\}$. Calcular $f(U)$ y $f^{-1}(U')$.

c) Encontrar bases B de $\mathbb{R}^4$ y B' de $\mathbb{R}^3$ tales que $M(f, B' \leftarrow B)$ sólo tenga unos y ceros.

10. Sean V y V' dos espacios vectoriales reales con bases $B = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ y $B' = (v'_1, v'_2, v'_3)$, respectivamente. Si $f : V \to V'$ es la aplicación lineal definida por:

$$f(v_1) = v'_1 + v'_2 - 4v'_3,\ f(v_2) = 2v'_1 + v'_2 - 2v'_3,\ f(v_3) = 3v'_1 + v'_2,\ f(v_4) = v'_1 + 2v'_3,$$

calcular la matriz $M(f, B' \leftarrow B)$. Calcular bases de $\mathrm{Nuc}(f)$ y de $\mathrm{Im}(f)$.

11. Sea f un endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ que verifica las propiedades:

$$f(1,0,1)=(-1,2,0), \quad f(1,-1,0)=(1,2,1), \quad \mathrm{Nuc}(f)=L((0,3,7)).$$

Obtener la expresión matricial de f con respecto a la base usual de $\mathbb{R}^3$. Calcular la matriz de f con respecto a la base de $\mathbb{R}^3$ dada por $B=((-1,1,1),(1,-1,1),(1,1,-1))$.

12. Determinar un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ con núcleo $\mathrm{Nuc}(f)=L((1,1,0))$ e imagen dada por $\mathrm{Im}(f)=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\,/\,2x-3y=0\}$. ¿Es f único en estas condiciones? Analizar si es posible encontrar bases B y B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que:

$$M(f,B'\leftarrow B)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Es posible de modo que esta última matriz sea $M(f,B)$?

13. Una aplicación lineal $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}_2[x]$ tiene por matriz asociada

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

respecto de las bases $B=((1,0,1),(1,1,1),(2,1,0))$ y $B'=(1,1+2x,-x^2)$, respectivamente. Calcular la matriz que representa a f respecto de la base usual de $\mathbb{R}^3$ y la base $B_3=(1,x,x^2)$ de $\mathbb{R}_2[x]$. Calcular también bases del núcleo y de la imagen de f.

14. Calcular:

   a) Una base B de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(Id_{\mathbb{R}^3},B_u\leftarrow B)$ sea la matriz dada por:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

   b) Una base B' de $\mathbb{R}^3$ tal que $M(Id_{\mathbb{R}^3},B'\leftarrow B_u)$ sea la matriz A anterior.

15. Sean $f:V\to V'$ y $g:V'\to V''$ dos aplicaciones lineales. Supongamos que B es una base de V, $B'=(v_1',v_2',v_3')$ es una base de V', B'' es una base de V'', y:

$$M(f,B'\leftarrow B)=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}, \quad M(g,B''\leftarrow \overline{B}')=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

donde $\overline{B}'=(2v_2'-v_3',v_2'-v_3',3v_1'+v_2'-v_3')$. Calcular $M(g\circ f,B''\leftarrow B)$.

16. Se consideran dos aplicaciones lineales entre espacios vectoriales sobre el mismo cuerpo $f: V \to V', g: V' \to V''$. Demuéstrese:

    $g \circ f$ es la aplicación nula si y sólo si $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Nuc}(g)$.

17. Sea $f: V \to V$ un endomorfismo de un e.v tal que $f \circ f = 0$. Demuéstrese:

    (a) Si $v_1, \ldots, v_r \in V$ verifican que $(f(v_1), \ldots, f(v_r))$ es linealmente independiente entonces $(v_1, \ldots, v_r, f(v_1), \ldots, f(v_r))$ es linealmente independiente.

    (b) Si $\dim_K(V) = n \in \mathbb{N}$, existe una base B de V tal que, escribiendo la matriz por cajas:

    $$M(f,B) = \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right),$$

    donde I_r es la matriz identidad de orden $r \leq n/2$.

18. Sea $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ un endomorfismo del que se sabe que:

    $$f(1,1,0,0) = (0,1,0,-1) \quad \text{y} \quad f(1,0,1,0) = (1,1,1,0).$$

    Calcular la matriz de f respecto de la base usual en cada uno de los siguientes casos:

    a) $\mathrm{Nuc}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

    b) $f \circ f = f$.

    c) $f \circ f = Id_{\mathbb{R}^4}$.

    ¿Cúal es, en cada caso, la imagen del vector $(1,3,7,1)$?

19. Dadas las matrices

    $$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & a \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A' = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & -4 \end{pmatrix},$$

    a) Calcular los valores de a para los que A y A' son equivalentes.

    b) Para dichos valores de a encontrar matrices $P \in GL(4,\mathbb{R})$ y $Q \in GL(3,\mathbb{R})$ tales que $A' = Q^{-1} \cdot A \cdot P$.

    c) Para los valores de a calculados en el primer apartado se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ cuya matriz con respecto a las bases usuales es A. Calcular una base B de $\mathbb{R}^4$ y una base B' de $\mathbb{R}^3$ de forma que $M(f, B' \leftarrow B) = A'$.

20. Decidir razonadamente si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

    a) Existe un endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ tal que $f(1,0,0) = (2,0,1)$, $f(0,1,0) = (0,0,0)$ y $f(1,1,0) = (2,-1,7)$.

b) Existe una aplicación lineal $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ distinta de la aplicación lineal cero y con núcleo distinto de $\{0\}$.

c) Si $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ y $B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$ cumplen que $A \cdot B = I_m$ y $B \cdot A = I_n$ entonces $m = n$.

d) Existe un isomorfismo $f : \mathbb{C}_5[x] \to M_2(\mathbb{C}) \times \mathbb{C}^2$.

e) Si $n,m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un epimorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

f) Si $n,m \in \mathbb{N}$ y $m \geq n$ entonces existe un monomorfismo $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

g) Para cualesquiera $n,m \in \mathbb{N}$ se cumple que $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ es isomorfo a $\mathbb{R}^{n+m}$.

h) Si un sistema de ecuaciones lineales tiene menos ecuaciones que incógnitas entonces el sistema no puede ser compatible determinado.

i) Existe un automorfismo f de $\mathbb{R}^3$ de forma que:

$$f(\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, z = 0\}) = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,/\, x = 0\}.$$

j) Para cada $r \in \mathbb{R}$ la aplicación $f_r : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_2[x]$ dada por:

$$f_r(ax^2 + bx + c) = rax^2 + bx + c$$

es un automorfismo.

21. (La traza de un endomorfismo) Sea $n \in \mathbb{N}$ y $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$. Se define la *traza* de A como el escalar de K dado por:

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

Se pide lo siguiente:

a) Demostrar que la aplicación $\mathrm{tr} : M_n(K) \to K$ que asocia a cada matriz cuadrada su traza es lineal.

b) Probar que $\mathrm{tr}(A \cdot B) = \mathrm{tr}(B \cdot A)$ para cualesquiera $A,B \in M_n(K)$. Deducir que dos matrices semejantes tienen la misma traza.

c) Utilizar el apartado anterior para definir la traza de un endomorfismo de un espacio vectorial V sobre K.

d) Encontrar dos matrices con el mismo rango y la misma traza que no sean semejantes.