Series de Fourier:

un tratado elemental, con notas históricas y ejercicios resueltos

Antonio Cañada Villar

Departamento de Análisis Matemático. Universidad de Granada

A Ery, mi mujer,
y a Diego María y Julia, mis hijos

Índice general

Prólogo de Miguel de Guzmán

La situación ideal para el aprendizaje correcto en un campo cualquiera podría consistir en colocarse junto a un experto y observarle en acción frente a los problemas y temas centrales del campo. Que el experto fuese al mismo tiempo comunicando generosamente a su alumno aquellas características del campo que provocan en él mismo el entusiasmo, haciéndole partícipe de los caminos de su pensamiento en su dedicación al campo, sus idas y venidas para dar con el ataque correcto a cada uno de los problemas, las fuentes de sus inspiraciones en el momento oportuno, los puntos principales en los que se debe aplicar el esfuerzo en el indispensable trabajo en solitario que cada cual ha de hacer para estructurar su propio pensamiento en torno a la materia de que se trata,...

A continuación debería ser el aprendiz quien se enfrentara él mismo con los problemas del campo, de forma gradual, ante la observación atenta y discreta del experto, que se convertiría ahora en un guía que con actitud comprensiva dejara hacer, insinuando y tal vez sugiriendo en el momento oportuno los caminos adecuados, y alentando con generosidad los esfuerzos de su alumno. De esta forma, ascendiendo desde las técnicas más simples hasta llegando posiblemente a afrontar los problemas abiertos que aún nadie haya resuelto en la materia, el aprendiz se sentiría, tras el ejercicio persistente, capaz de emular más adelante por sí solo los logros del experto.

Probablemente se han dado estas situaciones ideales de aprendizaje en la historia. Alejandro Magno tuvo como preceptor a Aristóteles y nos podemos imaginar cómo sería el trabajo de Aristóteles consagrado enteramente a la formación de una mente despierta como la de Alejandro. Mozart tuvo como iniciador a su padre Leopold, que era ya un músico prominente. Blas Pascal tuvo como orientador, tanto en matemáticas como en humanidades, a su padre Etienne Pascal, que fue él mismo un matemático de cierto renombre en su tiempo.

Las circunstancias normales del aprendizaje, naturalmente, no pueden colocar a todos los alumnos en las condiciones descritas, pero siempre ha habido expertos que se esfuerzan por acercarse de algún modo a estas situaciones ideales de transmisión de su experiencia. Para los matemáticos las obras escritas por el gran Euler son sin duda un modelo a seguir. Leyendo a Euler resulta bien claro lo mucho que él gozaba, no sólo obteniendo resultados nuevos, sino también comunicando de la forma más adecuada posible a otros las matemáticas nuevas que él descubría y también las encontradas por otros muchos antes. Y este gozo se ha transmitido a generaciones de matemáticos que han experimentado en él, a distancia en el tiempo, al gran maestro de todos los matemáticos.

Pienso que la obra del profesor Antonio Cañada sigue, en lo que es posible en una obra escrita, las orientaciones adecuadas para un aprendizaje correcto. La motivación para el estudio de las series de Fourier puede provenir de fuentes diferentes, pero su historia aúna muchas de ellas. En ella se percibe cómo se entrelazan los esfuerzos e intentos diversos de la matemática tanto para entender mejor el universo físico en que estamos inmersos como para escudriñar los problemas apasionantes que se derivan del examen profundo de los instrumentos mismos que se van creando para ello y que viene a dar lugar al desarrollo esplendoroso del análisis matemático en la actualidad. Desde el "poema matemático" en torno a la comprensión del calor que fue el tratado inicial de Fourier hasta el desarrollo actual de la teoría de ondículas que se manifiesta tan fecundo en el mundo de las aplicaciones más diversas se puede experimentar la continuidad del esfuerzo de los matemáticos de varios siglos. Pienso por esto que la Introducción Histórica con que se abre la obra está muy en su lugar a fin de colocar al lector en una buena atalaya para presentir la importancia del tema que se dispone a explorar, incluso aunque en una primera lectura encuentre elementos que sólo más tarde será capaz de estimar más certeramente.

La estructura de la presentación, basada muy fundamentalmente en ejercicios bien escogidos, graduados y orientados, vienen a constituir una novedosa y magnífica forma de aproximación a la forma ideal de aprendizaje que antes he comentado. Enseñar bien es conseguir que los alumnos aprendan. El profundo conocimiento del profesor Antonio Cañada sobre el análisis matemático en general, y de los temas relacionados con las series de Fourier en particular, junto con su entusiasmo por la transmisión efectiva del saber hacer y del conocimiento matemático a sus alumnos le ponen en condiciones ideales para ser uno de esos profesores que enseña bien y que es capaz de llevar a sus lectores cerca de las fronteras de lo desconocido en el campo. Las notas colaterales de acompañamiento al trabajo del lector, que aparecen a menudo en el texto en cursivas, son una buena muestra de ese sentido de camaradería que el aprendiz gustaría percibir en el experto, si estuviera con él.

Estoy convencido de que la obra del profesor Antonio Cañada, tanto por su contenido como por las innovaciones metodológicas que presenta, constituye una aportación muy valiosa a la producción matemática actual.

Miguel de Guzmán
Madrid, julio 2001

Prólogo del autor

En el libro que el lector tiene en sus manos trato de exponer, de manera elemental, los hechos básicos de los métodos de Fourier y algunas de sus aplicaciones. Mis años de dedicación a la Universidad me han mostrado que existe un interés creciente por estos temas entre los estudiantes de Ciencias e Ingeniería, los cuales, ante la presencia (cada vez más generalizada) de los métodos de Fourier en sus estudios, están necesitados de textos donde se les explique de manera sencilla, pero rigurosa, los principales conceptos del tema. Este ha sido mi objetivo al escribir estas notas y, con la idea de que sean útiles al mayor número posible de personas, he procurado exponer los conceptos necesarios para que puedan ser entendidos sin gran dificultad por aquellos que conozcan las nociones básicas del Análisis Real de una y varias variables.

El texto no está estructurado como los libros usuales de Matemáticas en el sentido de exponer teoremas, proposiciones, lemas, corolarios, etc. Entiendo que el aprendizaje de una materia por el alumno debe ser todo lo activo que sea posible y de acuerdo con esta idea, tal aprendizaje se propone aquí a través de la realización de ejercicios. Los hay de clase muy diversa: desde aquellos donde se trata simplemente de aplicar una definición dada a una situación concreta hasta aquellos que constituyen en realidad "un buen teorema". En muchos de ellos (cuando lo he considerado necesario) se proporcionan sugerencias escalonadas para que el lector los resuelva con éxito. He procurado no seleccionar ejercicios repetitivos sobre una misma idea, sino más bien aquellos que ayudan a su clarificación, o que nos motivan para continuar en nuestro estudio.

No he incluido figuras en el texto. Entiendo que esto es algo muy personal. Sin embargo animo al lector de este libro a que dibuje, siempre que sea posible, las ideas presentes en el mismo. Desde luego, esto debe ser un deber ineludible para cualquiera que explique nuestra disciplina, puesto que en multitud de ocasiones es una ayuda decisiva para entender los razonamientos formales ([22]). Tampoco he incluido en el texto indicaciones sobre el uso de programas informáticos concretos para el cálculo de Series de Fourier. Los hay muy buenos y muy variados y no voy a recomendar ninguno concreto. Ahora bien, es claro que el lector puede y debe usarlos, siempre que ello sea posible. Si lo hace, quedará con toda seguridad más convencido de los resultados que se han probado de manera rigurosa.

El presente volumen está notablemente ampliado respecto del que publicó la Universidad de Granada en 1.994 ([8]). Consta de una introducción histórica y cuatro capítulos. En el primero de ellos trato del espacio $L^2(a,b)$ y en el segundo de las Series de Fourier de una variable. He introducido las Series de Fourier a partir del espacio $L^2(a,b)$; esto creo que tiene indudables ventajas, pues el Capítulo I permite estudiar con detalle un ejemplo importante de espacio de Hilbert de dimensión infinita, familiarizándose el lector con el concepto de base de tal espacio y haciendo un hincapié especial en la base trigonométrica. El Capítulo II se dedica al estudio de aquellos aspectos de las Series de Fourier que pueden ser útiles en las aplicaciones (convergencia puntual, uniforme, etc.). El capítulo III trata sobre la Ecuación del Calor y el IV sobre la Ecuación de Ondas.

Cada capítulo comienza con un repaso de las nociones previas necesarias que considero deben conocerse para entender adecuadamente lo que sigue, para pasar a continuación a exponer un resumen de los resultados fundamentales.

En volúmenes siguientes se tratarán otros temas tales como Series de Fourier en varias variables, Transformada de Fourier en una y varias variables y aplicaciones, etc.

Mi más profundo agradecimiento a mi querido amigo y colega, el profesor Miguel de Guzmán Ozámiz, Catedrático de Análisis Matemático de la Universidad Complutense de Madrid, por escribir el prólogo de este libro. Para mí siempre ha constituido un ejemplo a seguir en los aspectos docente e investigador. Su excepcional forma de comunicar las ideas matemáticas ha despertado en muchos de nosotros el interés por escribir este tipo de obras.

También mi gratitud a mis amigos y colegas Camilo Aparicio, David Arcoya, José Luis Gámez, Juan Aurelio Montero, Javier Pérez, Francisco Roca, Salvador Villegas, Armando Villena y Abderrahim Zertiti, quienes leyeron la versión original de estas notas, realizando numerosos comentarios que han contribuido notablemente a mejorar la redacción final.

Por último, sólo me queda agradecer de antemano cualquier opinión, crítica o sugerencia que los lectores estimen oportuno hacerme llegar sobre la obra presente.

Antonio Cañada
Granada, Verano 2.001

Capítulo 1

Introducción histórica

Uno de los problemas más interesantes del que se ocuparon los científicos del Siglo XVIII, y que se presenta con relativa frecuencia en los problemas físicos relacionados con procesos oscilatorios, fué el que se conoce con el nombre de "**El problema de la cuerda vibrante**". Éste, puede describirse en la situación más elemental posible, de la siguiente forma: supongamos que una cuerda flexible se estira hasta quedar tensa y que sus extremos se fijan, por conveniencia, en los puntos $(0, 0)$ y $(\pi, 0)$ del eje de abscisas. Entonces se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y se suelta. La cuestión es: ¿Cuál es el movimiento descrito por la cuerda? Si los desplazamientos de ésta se hallan siempre en un mismo plano y el vector del desplazamiento es perpendicular, en cualquier momento, al eje de abscisas, dicho movimiento vendrá dado por una función $u(x, t)$, donde $u(x, t)$ representará el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \leq x \leq \pi$) y el tiempo t $(t \geq 0)$. Por tanto, para cada valor fijo del tiempo t, $u(x, t)$, como función de $x \in [0, \pi]$, es la forma que tendría la cuerda en ese tiempo t (como si tomásemos una fotografía de la vibración de la cuerda en el tiempo t). El problema que se plantea es obtener $u(x, t)$ a partir de $f(x)$.

El primer matemático que elaboró un modelo apropiado para el anterior problema fue *Jean Le Rond d'Alembert*. Bajo diversas hipótesis (referentes fundamentalmente a que las vibraciones sean "*pequeñas*"), *d'Alembert* demostró en 1747 (**Hist. de l'Acad. de Berlin, 3, 1747, 214-219**) (ver [39] y [41] para más detalles), que la función u

debe satisfacer las condiciones:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && 0 < x < \pi,\ t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0
\end{aligned}
\tag{1.1}
$$

La primera condición en (1.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación de Ondas.** La segunda relación representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma es cero (recordemos que, una vez llevada a la posición $f(x)$, la cuerda se suelta). La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

D'Alembert demostró también que la solución de (1.1) viene dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\tilde{f}(x+t) + \tilde{f}(x-t)] \tag{1.2}$$

donde $\tilde{f}$ es "*una extensión conveniente de la función* f."

De manera más precisa, y con el lenguaje de hoy en día, el resultado de *d'Alembert* ([39], [41]) confirmó que la posición futura de la cuerda está completamente determinada por su posición inicial (véase, si es necesario, el Capítulo IV para las notaciones y la demostración del resultado que sigue):

*S*ea $f \in C^2[0,\pi]$, tal que $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$. Entonces (1.1) tiene una única solución u de clase $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, donde $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$. Además u viene dada por la fórmula (1.2), donde $\tilde{f}$ es la extensión a $\mathbb{R}$ (conjunto de los números reales), impar y 2π–periódica de la función f.

No se conoce con exactitud la manera en que *d'Alembert* llegó a la fórmula (1.2), pero un camino muy probable pudo ser el siguiente: el cambio de variables $\xi = x + t,\ \mu = x - t$, transforma la ecuación $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}$, en otra más simple: $\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \mu} = 0$. Las soluciones de esta última ecuación son trivialmente de la forma $u(\xi,\mu) = F(\xi) + G(\mu)$. Combinando esta última relación con las otras condiciones en (1.1), se puede llegar a intuir la forma (1.2) que tiene la solución de (1.1) .

La interpretación física de la solución dada por *d'Alembert* es muy interesante: La función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x+t)$ representa una onda (una solución de la ecuación de ondas) que se desplaza hacia la izquierda con velocidad 1 (la gráfica de la función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x+t)$ se consigue trasladando hacia la izquierda, en t unidades, la gráfica de la función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x)$). Análogamente, la función $\frac{1}{2}\tilde{f}(x-t)$ representa otra onda que se desplaza hacia la derecha con velocidad 1. De este modo, la solución de (1.1) es la superposición de dos ondas, una de las cuales se desplaza hacia la izquierda y otra hacia la derecha, ambas con velocidad 1. Por este motivo se dice que la fórmula (1.2) se ha obtenido usando el **Método de propagación de las ondas.**

La fórmula (1.2) fue también demostrada por *Euler* (**Mora Acta Erud., 1749, 512-527**), quien difería fundamentalmente de *d'Alembert* en el tipo de funciones iniciales f que podían tenerse en cuenta. De hecho, estas diferencias pueden considerarse como una de las primeras manifestaciones escritas sobre los problemas que ha llevado consigo la definición de la noción de "función", un concepto que hoy en día presumimos de tener muy claro. Mientras que para *d'Alembert*, f debería tener una fórmula concreta o expresión analítica, *Euler* defendía que no había ninguna razón física para no admitir como posiciones iniciales f a aquellas que, en diferentes partes de $[0,\pi]$, viniesen definidas por expresiones distintas, siempre que al considerarlas unidas, la posición inicial resultante tuviese una apropiada regularidad.

Parece ser que tal discusión entre *d'Alembert* y *Euler* provenía del hecho de que en su tiempo se admitía que cada función daba lugar a una gráfica, pero no recíprocamente (cuando la gráfica considerada tenía diferentes expresiones en distintos intervalos). En resumen, *Euler* defendía que cualquier gráfica podía considerarse como curva inicial, tesis que no era compartida por *d'Alembert.*

Otra manera de obtener la solución del problema (1.1), completamente distinta de la vista anteriormente, fue propuesta por *Daniel Bernouilli* en 1753 (**Hist. de l'Acad. de Berlin, 9, 1753, 147-172; 173-195**). La idea clave es obtener la solución de (1.1) como superposición de ondas más sencillas, concretamente aquellas que son de la forma

$$u_n(x,t) = \operatorname{sen}(nx)\cos(nt),\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

donde $\mathbb{N}$ es el conjunto de los números naturales. Para cada tiempo t fijo, la anterior función es un múltiplo de la función $\operatorname{sen}(nx)$, que se anula exactamente en $n-1$ puntos del intervalo $(0,\pi)$. Así, si pudiésemos observar la vibración de la cuerda correspondiente a las ondas u_n, tendríamos $n-1$ puntos, llamados nodos, en los que la cuerda se mantendría constantemente fija en el eje de abscisas (como en los extremos del intervalo $[0,\pi]$). Entre dichos nodos, la cuerda oscilaría de acuerdo con (1.3) .

¿Cómo concibió *Bernouilli* la idea anterior? Parece ser que una posibilidad es que usase sus conocimientos musicales. Para ello se basó en que el sonido que emite una cuerda vibrante es, en general, superposición de armónicos, es decir, superposición de funciones de la forma $u_n(x,t)$. Tales funciones representan, para $n = 1$ el tono fundamental y para $n > 1$ sus armónicos, y desde el punto de vista musical se corresponden con los tonos puros. Así, Bernouilli afirmó que cualquier sonido que produjese la vibración de la cuerda debe ser superposición de tonos puros. Desde el punto de vista matemático, ello significa que la solución de (1.1) debe poder representarse de la forma:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)\cos(nt), \tag{1.4}$$

donde los coeficientes a_n han de elegirse adecuadamente para que se satisfagan todas las relaciones de (1.1) .

Para tranquilidad de los matemáticos, diremos que hay otra manera de llegar a la expresión anterior. No obstante, esta segunda forma, que es posible que fuese también usada por Bernouilli, no permite, desde el punto de vista intuitivo, pensar que (1.4) es posible, al menos en una primera impresión. A pesar de ello, como todo en esta vida tiene ventajas e inconvenientes, parece ser que este segundo punto de vista fue importantísimo en el estudio por parte de *Fourier*, del problema de la conducción del calor, que trataremos posteriormente. El punto de partida de este otro planteamiento puede ser la siguiente pregunta elemental: ¿Cuáles son las soluciones más sencillas posibles de (1.1) ? Creo que estaremos de acuerdo en que, al ser la solución de (1.1) una función $u(x,t)$ de dos variables, tales soluciones sencillas han de ser producto de una función de x por una función de t; es decir, $u(x,t) = X(x)Z(t)$, o lo que es lo mismo, **funciones con variables separadas.** Derivando y sustituyendo, de manera formal, en (1.1), llegamos a los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0,\ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{1.5}$$

$$T''(t) + \lambda Z(t) = 0,\ t > 0. \tag{1.6}$$

En la expresión anterior, λ hace el papel de parámetro real.

Es sencillo probar ([14]) que (1.5) tiene solución no trivial si y solamente si $\lambda \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\lambda = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (1.5) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $\operatorname{sen}(nx)$. Análogamente, para $\lambda = n^2$, el conjunto de soluciones de (1.6) es un espacio vectorial real de dimensión dos, cuya base la constituyen las funciones $\cos(nt),\ \operatorname{sen}(nt)$.

Disponemos por tanto de un procedimiento que nos permite calcular infinitas "soluciones elementales" de la ecuación de ondas, a saber, las funciones de la forma $a_n u_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y u_n se define como en (1.3) . Es trivial que, si la posición inicial f de la cuerda, en (1.1), es algún múltiplo de $\operatorname{sen}(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (1.1) es un múltiplo adecuado de u_n (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma. Es curioso poner de manifiesto que este hecho era conocido por *Euler*, como manifestó *Bernouilli* en su trabajo. Sin embargo, *Euler* trató sólo el caso de superposiciones finitas. Véase el Capítulo IV para detalles).

Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y ahora viene la pregunta clave: ¿Será posible obtener la solución de (1.1), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas u_n? Esto es lo que propuso *Bernouilli*.

Si la solución propuesta por *Bernouilli* fuese correcta, ello obligaría a que

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx)$$

y por tanto a que

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \operatorname{sen}(nx), \ \forall\ x \in [0,\pi], \tag{1.7}$$

para "una adecuada elección de los coeficientes a_n".

Por favor, medítese un largo rato si (1.7) es intuitivo o no, para poder valorar adecuadamente la aportación de *Bernouilli*.

Las ideas expuestas por *Bernouilli* en el trabajo mencionado, no tuvieron aceptación en su tiempo. En particular, recibió duras contestaciones por parte de *d'Alembert* y *Euler* quienes no admitían que cualquier función con una expresión analítica pudiera representarse en la forma (1.7) (*d'Alembert*) ni menos aún cualquier función (*Euler*). Representativo de esto que decimos puede ser el artículo de *d'Alembert* titulado "*Fondamental*" contenido en el volumen séptimo de la famosa "*Encyclopédie*". De manera más precisa, la parte derecha de (1.7), suponiendo que fuese convergente, era para *Euler* una función, mientras que la parte izquierda podría representarse mediante varias funciones, en diferentes intervalos. La controversia se prolongó durante años sin llegarse a ningún acuerdo, pues *Daniel Bernouilli* seguía firme en sus ideas, argumentando que en (1.7) hay "suficientes coeficientes" como para poderlos elegir, de tal manera que (1.7) se cumpla. Por tanto, para *Bernouilli*, (1.4) representaba la "solución general" de (1.1) .

El tiempo ha demostrado que estaba más cerca de la verdad *Bernouilli* que *Euler*. De hecho, hoy en día el resultado siguiente, que se demostrará en el Capítulo IV, forma parte de cualquier curso elemental de Ecuaciones en Derivadas Parciales ([39], [41]):

Sea $f \in C^3[0,\pi]$, *tal que* $f(0) = f(\pi) = f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$. *Entonces (1.1) tiene una única solución u de clase* $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$, *donde* $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$. *Además u viene dada por la fórmula (1.4), donde*

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\xi)\,\mathrm{sen}(n\xi)\,d\xi,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \tag{1.8}$$

Es usual, al explicar en los cursos actuales el problema (1.1), hacerse la siguiente pregunta: ¿Cuál de los dos resultados anteriores es mejor (el de *d'Alembert* o el de *Bernouilli*)? Obviamente, el matemático preocupado por tener la mayor generalidad posible diría que, sin duda, el primero de ellos, pues exige a la condición inicial f menos regularidad. Este es el motivo por el que el segundo resultado ha sido en cierta forma relegado de los libros de texto sobre el tema. Sin embargo, al matemático al que le importe más obtener la solución de (1.1) de la manera más explícita posible, le parecerá mejor el segundo resultado. Es claro que no hay uno mejor que otro: ambos se complementan. El primero de ellos muestra, para $f \in C^2[0,\pi]$, la existencia y unicidad de solución de (1.1), proporcionando una manera teórica de construirla, mientras que el segundo afirma que si " f es mejor", también la solución se puede "representar mejor". De lo que no nos cabe ninguna duda es de que, limitar la discusión docente a este aspecto, sin ninguna referencia histórica a los trabajos de *d'Alembert, Euler* y *Bernouilli*, es tremendamente pobre para la formación científica del alumno, que no tiene así la oportunidad de conocer la filosofía tan diferente que se encuentra presente en los dos resultados.

Hubo que esperar 54 años hasta que las ideas de *D. Bernouilli* fueron tomadas en cuenta por el barón *Jean Baptiste-Joseph Fourier*, matemático y físico francés, quien, entre otras actividades, acompañó a Napoleón en calidad de científico, en la campaña de éste a Egipto. Allí, como secretario del "Instituto de Egipto", hizo gala de una gran competencia en diversos asuntos administrativos.

Al regresar a Francia, y como profesor de Análisis de la Escuela Politécnica *Fourier* se interesó por la teoría de la conducción del calor en los cuerpos sólidos. En 1807 envió un artículo a la Academia de Ciencias de París, que trataba sobre dicho tema. Más concretamente, *Fourier* consideró una varilla delgada de longitud dada, digamos π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura en la varilla viene dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla en cada sección transversal de la misma es constante), ¿cuál será la temperatura de cualquier punto x de la varilla en el tiempo t ?

Suponiendo que la varilla satisface condiciones físicas apropiadas ([39]), demostró que si $u(x,t)$ representa la temperatura en la sección x y en el tiempo t , entonces la función u debe satisfacer:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi.
\end{aligned} \tag{1.9}$$

La primera condición en (1.9) es una Ecuación en Derivadas Parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **Ecuación del Calor**. La segunda significa que la temperatura, en los extremos de la varilla, se mantiene a 0° centígrados en cualquier tiempo, mientras que la última relación representa la distribución inicial de temperatura en la varilla considerada.

Partiendo de las ideas de *Bernouilli,* para la ecuación de ondas, Fourier buscó las soluciones más sencillas que puede presentar la ecuación del calor: aquellas que son de la forma $u(x,t) = X(x)P(t)$. Imponiendo la condición de que tales funciones satisfagan, formalmente, dicha ecuación, obtenemos, como en el caso de la ecuación de ondas, los dos problemas siguientes de ecuaciones diferenciales ordinarias (Capítulo III):

$$X''(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in (0,\pi), X(0) = X(\pi) = 0, \tag{1.10}$$

$$P'(t) + \mu P(t) = 0,\ 0 < t < T. \tag{1.11}$$

En la expresión anterior, μ hace el papel de parámetro real. Como antes, (1.10) tiene solución no trivial si y solamente si $\mu \in \{n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Además, si $\mu = n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (1.10) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $\operatorname{sen}(nx)$. Análogamente, para $\mu = n^2$, el conjunto de soluciones de (1.11) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base la constituye la función $\exp(-n^2 t)$.

Así, disponemos de un procedimiento que nos permite calcular infinitas “soluciones elementales” de la ecuación del calor, a saber, las funciones de la forma $a_n v_n$, donde $a_n \in \mathbb{R}$ y v_n se define como

$$v_n(x,t) = \exp(-n^2 t) \operatorname{sen}(nx). \tag{1.12}$$

Es trivial que si la distribución inicial de temperatura f, es algún múltiplo de $\operatorname{sen}(nx)$ (o una combinación lineal finita de funciones de este tipo), entonces la solución buscada de (1.9) es un múltiplo adecuado de v_n (respectivamente, una adecuada combinación lineal de funciones de esta forma; véase el Capítulo III para detalles).

Ahora bien, f no es, en general de la forma justo mencionada, pero, y aquí demostró *Fourier*, como *Bernouilli*, una enorme intuición, ¿será posible obtener la solución u de (1.9), para cualquier f dada, como superposición de las anteriores soluciones sencillas v_n? Es decir, ¿será posible elegir adecuadamente los coeficientes a_n tal que la única solución de (1.9) sea de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 t)\,\mathrm{sen}(nx). \tag{1.13}$$

Fourier afirmó en su artículo que esto era así. Observemos que nuevamente llegamos a que, entonces, se ha de satisfacer la relación (1.7). Tenemos la misma cuestión para dos problemas completamente diferentes, el problema (1.1) y el problema (1.9). Sin embargo, es de justicia mencionar que *Fourier*, a diferencia de *Bernouilli,* alcanzó la fórmula (1.8) para el cálculo de los coeficientes a_n (aunque la forma en que lo hizo fue uno de los puntos más criticado por los matemáticos de la época), llamados desde entonces coeficientes de Fourier.

El artículo de *Fourier* fue estudiado por *Lagrange, Laplace y Legendre* y fue rechazado por la Academia Francesa, básicamente por la manera en que dedujo la ecuación del calor y por la falta de rigor en la obtención de sus conclusiones (siempre según la opinión de los académicos citados). No obstante, los miembros de tan prestigiosa institución estaban convencidos de la importancia que tenían los problemas relacionados con la propagación del calor y, los resultados teóricos presentados por *Fourier* tenían una gran concordancia con diversos experimentos llevados a cabo previamente. Por este motivo, convocaron un premio sobre el tema. Dicho premio fue otorgado a *Fourier* en 1812, pero a pesar de esto, los miembros de la Academia seguían criticando su falta de rigor, de tal manera que, aunque obtuvo el citado premio, *Fourier* no consiguió el propósito de publicar su trabajo en la célebre serie "Mémoires" de la Academia Francesa.

Fourier, haciendo gala de un gran tesón, siguió trabajando en el tema y en 1822 publicó su famoso libro **Théorie Analytique de la Chaleur, Firmin Didot, Père et Fils, 1.822, París**, donde incorporó parte de su artículo de 1812 prácticamente sin cambio. Este libro es actualmente una de las obras Clásicas en Matemáticas.

Dos años más tarde consiguió el cargo de *Secretario de la Academia Francesa* y al fin pudo publicar el mencionado artículo en la serie "Mémoires".

La Historia ha dado la razón a *Fourier*, como se muestra en el siguiente resultado, que se demostrará con detalle en el Capítulo III y que forma parte hoy en día de cualquier curso de introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales ([39], [41]):

Sea $f \in C^1[0,\pi]$, tal que $f(0) = f(\pi) = 0$. Entonces (1.9) tiene una única *solución $u \in C_t^1(\Omega) \cap C_x^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (de clase C^1, respecto de t, C^2 respecto de x y continua en $\overline{\Omega}$), donde $\Omega = (0, \pi) \times (0, T]$. Además, dicha solución viene dada por la fórmula (1.13) donde los coeficientes a_n están definidos en (1.8).*

Problemas distintos de los aquí considerados, conducen a la posibilidad de desarrollos similares a (1.7). Por ejemplo, el problema de las vibraciones de una cuerda libre en sus extremos ([41]), nos plantea la cuestión de si será posible desarrollar una función dada f, definida en $[0, \pi]$, en una serie de la forma

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi] \tag{1.14}$$

para coeficientes b_n adecuados. Muchos problemas de naturaleza periódica dan lugar a plantearse la cuestión de si se podrá obtener, para una función f, definida sobre $[-\pi, \pi]$, un desarrollo de la forma

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)), \ \forall \ x \in [-\pi, \pi] \tag{1.15}$$

La posibilidad de obtener una respuesta afirmativa a las anteriores cuestiones es, cuanto menos en una primera impresión, aparentemente difícil y porqué no decirlo, descabellada. No es pues de extrañar la reacción de *d'Alembert* y *Euler* ante las afirmaciones de *Bernouilli*, y de los miembros de la Academia Francesa ante las afirmaciones de *Fourier*. Sin embargo, aunque de manera lejana en sus planteamientos y en su origen, el problema tiene algo de similitud con el desarrollo infinito de Taylor de una función suficientemente regular, pues en ambos casos se trata de desarrollar una función dada en una serie, utilizando para ello funciones "más sencillas": los polinomios en el caso de la fórmula de Taylor y las funciones trigonométricas en los casos de las fórmulas (1.7), (1.14) y (1.15) . Es claro que hay también diferencias fundamentales entre ambos propósitos, que se observan no sólo en el origen del problema sino también en su posterior desarrollo. Pero es evidente que en los siglos XVIII y XIX, ya nadie dudaba de la utilidad del desarrollo de Taylor. Se puede consultar la referencia [18] para apreciar con detalle algunas de las relaciones más curiosas e importantes entre las series de Taylor y de Fourier.

Las ideas expuestas por *Fourier* en el libro citado plantearon de manera inmediata innumerables interrogantes. Algunos fueron los siguientes: dada una función real f definida en $[0, \pi]$ (o en $[-\pi, \pi]$), ¿será posible encontrar coeficientes a_n o b_n adecuados tales que se tenga el desarrollo (1.7), ó (1.14) ó (1.15) ?, ¿cuáles son las expresiones concretas de tales coeficientes?, ¿en qué sentido se tiene la anterior convergencia?, ¿qué tipos de problemas pueden resolverse usando las anteriores ideas? La lista de preguntas sería interminable...

Las cuestiones anteriores han originado, a lo largo de casi dos siglos, gran cantidad de investigación y han sido muchas las partes de la Matemática que se han desarrollado a partir de ellas. Comentar, incluso sólo las más significativas, sería demasiado largo. Sin embargo, no nos resistimos a mencionar algunas de las que más nos han llamado la atención.

Comencemos con el tema de la existencia de funciones continuas no derivables (esto podrá parecer obvio a muchos lectores; por favor, sigan leyendo).

Las nociones de continuidad y diferenciabilidad de una función real de variable real están hoy en día perfectamente establecidas y, ya desde la enseñanza secundaria, los alumnos distinguen claramente ambos conceptos. Sin embargo, históricamente no ha ocurrido así. De hecho, el primitivo concepto de derivada debido a *Newton* y *Leibniz* era bastante más complicado de expresar del que conocemos en la actualidad. Fue *Cauchy* quien, unificando las notaciones de *Newton* y *Leibniz*, y basado en una definición anterior de *Bolzano* de 1.817, introdujo, en 1823 (**Résume des leçons, OEuvres, (2),4, 22**), la definición que hoy en día se da en todos los libros de texto

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.16}$$

Durante bastante tiempo se estuvo convencido de que cualquier función continua debía ser derivable, excepto posiblemente en conjuntos "aislados" de puntos. Pero, insistamos, ¿en cuántos puntos puede una función continua no ser derivable? La respuesta a esta pregunta estuvo relacionada desde el principio con la siguiente cuestión sobre series de Fourier: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua dada? De hecho, después de la publicación, en 1.822, del libro de *Fourier*, *Dirichlet* se ocupó durante varios años del problema de la convergencia de las series de Fourier, dando, por primera vez de forma rigurosa, un conjunto de hipótesis para garantizar la convergencia de las mismas (**Jour. für Math., 4, 1.829, 157-69**). Este conjunto de hipótesis incluía la continuidad. Durante aproximadamente los cincuenta años siguientes, se pensó que la continuidad de la función debería ser suficiente para la convergencia de su serie de Fourier. Sin embargo, algunos matemáticos sospechaban que ello no debía ser así y todo ello motivó el estudio de funciones "raras" en el sentido de que tales funciones fuesen continuas, pero no derivables "en el máximo número de puntos posibles".

El ejemplo que comenzó a poner las cosas en su sitio es debido a *Riemann* (**Abh. der Ges. der Wiss. zu Gött., 13, 1.868, 87-132; Werke, 227-64**), quien en esa época estaba tratando, entre otras cosas, la posibilidad del desarrollo de una función dada en serie trigonométrica. El concepto de serie trigonométrica, más general que el de serie de Fourier, es el de una serie de la forma

$$\frac{b_0}{2} + \sum_1^{\infty} (a_n \operatorname{sen}(nx) + b_n \cos(nx)) \tag{1.17}$$

donde a_n, b_n son números reales, no necesariamente coeficientes de Fourier de alguna función dada (los coeficientes de Fourier, se definen dependiendo de la serie considerada: por ejemplo, para el caso del desarrollo (1.7), los coeficientes de Fourier se definen en (1.8) . Formalmente, para obtener a_n se multiplican ambos lados de (1.7) por la función $\operatorname{sen}(nx)$, y se integra término a término, en el intervalo dado, la serie así obtenida. Utilizando el hecho de la ortogonalidad de las funciones $\operatorname{sen}(mx)$, $m \in \mathbb{N}$, en el intervalo $[0, \pi]$, se obtiene a_n. Análogo razonamiento se aplica para calcular los coeficientes de Fourier de los desarrollos (1.14) y (1.15). Esto se verá con detalle en el Capítulo II).

Riemann definió una función f, integrable en cualquier intervalo real finito, pero que tiene un conjunto infinito de discontinuidades en cualquier intervalo real no trivial. Una primitiva cualquiera de f, es continua en cualquier punto de $\mathbb{R}$, y sin embargo no es derivable en ningún punto de discontinuidad de f (véanse [24] y [30] para detalles).

Posteriormente, *Weierstrass* (**Jour. für Math., 79, 1.875, 21-37**), estudiando el tipo de funciones que podían representarse o desarrollarse en serie de *Fourier*, presentó en 1.872 un ejemplo sorprendente a la Real Academia de Ciencias de Berlín: una función real, de variable real, continua en cualquier punto y no derivable en ninguno. Concretamente, el ejemplo de *Weierstrass* está dado por la función

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n \pi x), \tag{1.18}$$

donde $0 < b < 1$, y a es cualquier entero impar tal que $ab > 1 + (3\pi/2)$ (aquí tiene el lector un buen ejercicio de Análisis Real).

Puede pensarse, de manera intuitiva, que el tipo de funciones anteriores es excepcional. Nada más lejos de la realidad. El Análisis Funcional, la disciplina matemática por excelencia del siglo XX ([17]), permite probar que las anteriores situaciones son las que "usualmente cabe esperar" (aunque, gracias a Dios, no encontrar, puesto que no es fácil definir funciones del tipo anterior). ¿Cómo es esto? La herramienta clave para entenderlo es lo que se conoce con el nombre de Teorema de la Categoría de *Baire* (*Baire*, **Ann. di Mat., (3),3, 1.899, 1-123)**, que comentamos a continuación.

Sea X un espacio de Banach real cualquiera (es decir un espacio vectorial real, dotado de una norma ([6]), tal que cualquier sucesión de *Cauchy* es convergente). Si $M \subset X$, diremos que M es de primera categoría en X, si y solamente si, M es alguna unión numerable de subconjuntos M_n de X tales que cada M_n verifica la propiedad $int\ \overline{M_n} = \emptyset$, donde $int\ \overline{M_n}$ denota el interior de la clausura de M_n y $\emptyset$ indica el conjunto vacío. Por ejemplo, cualquier subconjunto numerable de X es de primera categoría.

Un subconjunto M de X se dice de segunda categoría en X, si M no es de primera categoría en X. Intuitivamente, los conjuntos de segunda categoría "deben contener muchos más elementos" que los de primera categoría.

Consideremos ahora $X = C([a,b], \mathbb{R})$, es decir, el espacio de Banach de las funciones reales y continuas, definidas en un intervalo dado $[a,b]$ de $\mathbb{R}$, con la norma uniforme. Más precisamente,

$$X = \{f : [a,b] \to \mathbb{R},\ f \text{ continua en } [a,b]\}$$

y

$$\|f\| = \max_{x \in [a,b]} \{|f(x)|\},\ \forall\ f \in X.$$

Sea

$$M = \{f \in X : \exists x_* \in [0,1) : \text{ existe } f'(x_*+)\}$$

Pues bien, puede probarse que el conjunto M es de primera categoría en X ([43]) y por tanto $X \setminus M$ es de segunda categoría en X. En definitiva, lo que en principio puede pensarse que es excepcional (que existan funciones como las encontradas por *Riemann* y *Weierstrass*), resulta que es lo usual.

En lo que respecta a las series de Fourier de funciones continuas, *Du Bois-Reymond* (**Nachrichten König, Ges. der Wiss. zu Gött., 1.873, 571-82**), dió en 1.873 un ejemplo de una función continua cuya serie de Fourier no convergía en un punto particular. Es más, construyó un ejemplo de una función continua tal que su serie de Fourier no convergía en un conjunto denso de puntos. Llegados aquí, la pregunta puede ser: ¿en cuántos puntos puede no converger la serie de Fourier de una función continua? Hubo que esperar hasta 1.966, año en que *Carleson* demostró que se da la convergencia salvo posiblemente en un conjunto de medida de *Lebesgue* nula ([11], [12]). Para redondear el tema, *Kahane y Katznelson* probaron, también en 1966, que dado cualquier conjunto A de medida nula existe una función continua cuya serie de Fourier diverge en cada punto de A ([28]).

La teoría de conjuntos de *Cantor*, base y fundamento de lo que se conoce con el nombre de Matemática moderna, estuvo en buena parte motivada por el estudio de los puntos de convergencia o divergencia de las series trigonométricas. Fue este problema lo que llevó a *Cantor* a definir algunas de las primeras nociones de Topología conjuntista, como las de conjunto cerrado y punto de acumulación.

En efecto, cuando *Cantor* comenzó a trabajar en la Universidad de Halle, otro colega, *Heine*, estaba interesado en aquella época en la cuestión de la unicidad de la representación de una función dada en serie trigonométrica. Más concretamente, si suponemos que la serie (1.17) es convergente, en todos los puntos del intervalo $[-\pi, \pi]$ a una función $f(x)$, la cuestión era: ¿será única la representación de f en serie trigonométrica ? La respuesta afirmativa a esto es equivalente al hecho de que si la serie trigonométrica (1.17) es convergente a cero en todos los puntos de $[-\pi, \pi]$, entonces todos los coeficientes deben ser cero.

Cantor probó (**Jour. für Math., 72, 1.870, 139-42**) que ello era así y que incluso, se puede renunciar a la convergencia de la serie en un conjunto finito de puntos. La pregunta que *Cantor* se hizo a continuación era obvia: ¿en cuántos puntos podemos renunciar a la convergencia de la serie dada y sin embargo seguir teniendo el mismo resultado de unicidad? Según mis conocimientos, este problema sigue sin resolverse hoy en día en toda su generalidad, a pesar de que se han realizado numerosos estudios sobre ello, comenzando por varios de *Cantor*, el primero fechado en 1.871 (**Jour. für Math., 73, 1.871, 294-6**). En este trabajo *Cantor* demostró que el conjunto de puntos excepcionales, es decir, aquellos donde no se tiene necesariamente convergencia de la serie trigonométrica, puede estar formado por infinitos elementos, siempre que tal conjunto sea "de orden finito". ¿Cómo definió *Cantor* el orden de un conjunto? De la siguiente manera: dado cualquier subconjunto E de números reales, *Cantor* introdujo el concepto de punto de acumulación de E, tal y como se entiende hoy en día. Al conjunto de todos los puntos de acumulación, conjunto derivado de E, lo notó por E'. Análogamente puede definirse el segundo conjunto derivado de E, E'', como el conjunto derivado de E', y así sucesivamente. Claramente se tienen las inclusiones $...E''' \subset E'' \subset E'$. Entonces, un conjunto es de orden finito si algún derivado suyo es finito. También *Cantor* definió los conjuntos cerrados como aquellos que contienen a su derivado. Demostró además que un conjunto de orden finito es o finito o puede ponerse en correspondencia biyectiva con el conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales. A estos últimos conjuntos les dió el nombre de infinitos numerables, interesándose a continuación por la existencia de subconjuntos de números reales infinitos no numerables, para seguir con el estudio de subconjuntos del espacio $\mathbb{R}^n$. Por cierto, que posteriormente fue demostrado que cualquier conjunto numerable es válido también como conjunto de puntos excepcionales donde puede fallar la convergencia de la serie trigonométrica considerada y seguir teniendo la representación única. También se han dado ejemplos de conjuntos excepcionales no numerables ([45]).

Resumiendo, los problemas planteados por la representación única de funciones en series trigonométricas, tuvieron una influencia decisiva en el interés de *Cantor* por estudiar de manera cuidadosa las propiedades de subconjuntos de números reales relacionadas con el número de sus elementos, lo que originó en gran medida la creación de la teoría de conjuntos.

Como ya hemos mencionado, las fórmulas para calcular los coeficientes de Fourier fueron obtenidas por el mismo *Fourier*, aunque de manera no muy rigurosa. Por ejemplo, para el desarrollo (1.15) se tiene (véase el Capítulo II)

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \operatorname{sen}(nx)\, dx, \; b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(nx)\, dx. \tag{1.19}$$

Para el caso en que f es una función continua, era suficiente el concepto de integral dado por *Cauchy*, para la existencia de los anteriores coeficientes. *Cauchy* usó, para la definición de la llamada integral de Cauchy (para funciones continuas), lo que hoy en día se conoce con el nombre de sumas de Riemann; es decir, sumas de la forma

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}), \tag{1.20}$$

donde $x_0 = -\pi < x_1 < ... < x_n = \pi$ es cualquier partición del intervalo $[-\pi, \pi]$ y $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$, $1 \leq i \leq n$.

Aunque de manera no totalmente rigurosa, pues no expuso explícitamente el concepto de continuidad uniforme, *Cauchy* demostró que si f es continua en $[-\pi, \pi]$, las anteriores sumas tendían a un límite (único), llamado la integral de la función, si las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tendían a cero.

Riemann también se interesó en el tema de las series trigonométricas. Él dijo que era importante, al menos para los matemáticos aunque no necesariamente para las aplicaciones físicas, establecer las condiciones más amplias posibles bajos las cuales tienen sentido las fórmulas (1.19) . Introdujo así lo que llamamos hoy en día integral de Riemann, cuya idea básica es suponer sólo de partida la acotación de la función f tratada (no necesariamente continua) y establecer condiciones lo más generales posibles para que las sumas (1.20) tengan un único límite, cuando las longitudes de todos los subintervalos de la partición considerada tienden a cero. Esto le permitió integrar funciones con un número infinito de discontinuidades, aunque como es conocido, hubo que esperar a los trabajos de *Lebesgue* sobre la medida de un conjunto, para tener una caracterización precisa de las funciones que pueden integrarse según *Riemann*. De hecho, la que se considera actualmente como "integral definitiva" en muchos aspectos, es la introducida por *Lebesgue* en su tesis doctoral: "Intégrale, longueur, aire" (**Annali**

di Mat. Pura Appl., 7, 1.902, 231-59). El punto de partida, respecto de la noción de integral de Cauchy o de Riemann es completamente diferente, pues lo que se intentaba era medir, de alguna forma, el conjunto de puntos de discontinuidad de una función dada.

Para ello, después de diferentes trabajos previos de *Du Bois-Reymond, Harnack, Stolz, Cantor, Peano, Jordan* y *Borel* ([30]) sobre la medida de conjuntos, el paso definitivo fue dado por *Lebesgue*, como ya hemos comentado, a principios de este siglo, cuando introdujo la noción de función medible.

Comentemos brevemente las ideas básicas para el caso de una variable real.

La medida de un intervalo arbitrario $[a,b]$ (ó $[a,b)$, $(a,b]$, (a,b)), $\mu\ [a,b]$, es $b-a$. Entonces, teniendo en cuenta que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ se expresa, de manera única, como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos ([4]), se tiene que si $G \subset \mathbb{R}$ es abierto tal que $G = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} I_i$, podemos definir la medida de G, $\mu(G)$, como, $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ (esta suma puede ser infinita).

Dado un subconjunto cualquiera $E \subset \mathbb{R}$ se define la medida exterior, $\mu^*(E)$, como

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\{\mu(G) : E \subset G, G\ abierto\}.$$

Sea ahora $A \subset [a,b]$. Diremos que A es medible si $\mu^*(A) + \mu^*([a,b] \setminus A) = b-a$. En este caso, $\mu^*(A)$ es la medida de A y se indicará como $\mu(A)$. No es difícil ver que la medibilidad y la medida de A son independientes del intervalo elegido $[a,b]$ tal que $A \subset [a,b]$.

Si A es tal que $\mu(A) = 0$, diremos que A es de medida nula. Cualquier subconjunto numerable de $[a,b]$ es de medida nula. No obstante, hay subconjuntos de medida nula que no son numerables ([3]).

Una propiedad relativa a puntos de $[a,b]$ diremos que se cumple casi por doquier (c.p.d.) en $[a,b]$ si el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida nula.

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in [a,b] : f(x) > \alpha\}$ es medible. Si $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles también lo son $|f|, \alpha f$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ y $f+g$. Toda función continua casi por doquier es medible. Si f es medible y $f = g$ c.p.d. en $[a,b]$, entonces g es medible.

Consideremos ahora cualquier función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ medible y acotada. Sean $m = \text{ínf}_{[a,b]}\ f$, $M = \sup_{[a,b]}\ f$ y tomemos una partición cualquiera del intervalo $[m,M]$, P, definida por $P : m = y_0 < y_1 < ... < y_n = M$. Definamos $A_j = \{x \in$

$[a,b] : y_{j-1} \leq f(x) \leq y_j\}, 1 \leq j \leq n$. Cada A_j es medible. Consideremos las sumas

$$S_P = \sum_1^n y_j \mu(A_j), \; s_P = \sum_1^n y_{j-1}\mu(A_j).$$

La gran novedad de los estudios de *Lebesgue* consistió en que éste probó que las dos cantidades

$$J = \inf_{P \in P([m,M])} S_P, \;\; I = \sup_{P \in P([m,M])} s_P,$$

coinciden si, como ya hemos convenido antes, f es medible y acotada ($P([m, M])$ denota el conjunto de todas las particiones del intervalo $[m, M]$). A este valor común se le denomina integral de *Legesgue* de f en $[a, b]$ y se nota por $\int_a^b f(x)\,dx$. Merece la pena observar con detenimiento que la filosofía de la integral de *Lebesgue* está basada, a diferencia de la de Riemann, en particiones de la imagen de la función f en $[a, b]$.

Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable *Riemann*, entonces f es integrable (en el sentido de *Lebesgue*) y ambas integrales coinciden. El recíproco no es cierto. Además, si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces f es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f no es continua tiene medida cero.

La integral de *Lebesgue* puede también extenderse al caso de funciones no acotadas y al caso en que la función considerada lo es de varias variables independientes ([3]).

La noción de integral de Lebesgue permitió probar con gran generalidad muchas conclusiones sobre series de Fourier que anteriormente eran conocidas para tipos particulares de funciones (Lema de *Riemann-Lebesgue*, Igualdad de *Parseval*, criterios de convergencia puntual, etc.). Además, muchos resultados de la teoría de integración de *Lebesgue* se expresan con una gran simplicidad y claridad respecto de las teorías de integración anteriores (Teoremas de convergencia, Teorema de *Fubini*, etc.), de tal forma que el conocimiento de la teoría de la integral de *Lebesgue* es, hoy en día, imprescindible, para poder entender y presentar adecuadamente la teoría de series de Fourier (Capítulo I).

En adelante, cuando hablemos de funciones integrables se entenderá siempre, salvo que explícitamente se diga lo contrario, que lo son en el sentido de *Lebesgue*.

En la actualidad, la teoría de series de Fourier puede presentarse usando los conceptos y métodos del Análisis Funcional. Más concretamente, está íntimamente relacionada con la integral de *Lebesgue*, los espacios de Hilbert (extensión a dimensión infinita de la noción de espacio euclídeo finito dimensional $\mathbb{R}^n$) y los operadores compactos y autoadjuntos (extensión, a dimensión infinita, de los endomorfismos de $\mathbb{R}^n$ definidos por matrices simétricas). Fue Hilbert quien identificó una función dada f con sus coeficientes de Fourier $\{f_n, \; n \in \mathbb{N}\}$. Estos coeficientes satisfacen, en general, la condición

$\sum_{n=1}^{\infty} |f_n|^2 < +\infty$ (si f es de cuadrado integrable). Hilbert introdujo además el espacio l^2 de sucesiones de números reales $\{a_n\}$, tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^2$ es convergente. Posteriormente, Riesz y Fischer demostraron la existencia de una aplicación biyectiva entre el conjunto de las funciones de cuadrado integrable $L^2(a,b)$ (en un intervalo finito dado (a,b)) y el conjunto l^2 (a cada función se le hace corresponder sus coeficientes de Fourier). De esta manera, una función de cuadrado integrable puede ser considerada como un elemento con infinitas coordenadas (sus coeficientes de Fourier) en un espacio de dimensión infinita (ver [30]). Esta abstracción permite, por una parte, comprender mejor los métodos de *Fourier*; por otra, se consigue, sin apenas esfuerzo, una gran generalidad. Exponemos a continuación algunas de las ideas fundamentales.

El espacio $L^2(-\pi,\pi)$ (elegimos el intervalo $(-\pi,\pi)$ sólo por concretar), se define como el conjunto de funciones medibles $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, para las que la integral $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, dx$ existe, en el sentido de Lebesgue, y es finita. Suponemos que dos funciones son iguales si lo son c.p.d. en $[-\pi,\pi]$. Este tipo de espacios fue introducido por *Riesz*, en 1.907, en el estudio de ecuaciones integrales de *Fredholm* de segunda especie, con núcleo no necesariamente continuo ([30]). Aquellos que tengan alguna dificultad con la teoría de integración de *Lebesgue*, deben tener en mente, en todo lo que sigue, los dos tipos de funciones siguientes, que constituyen subconjuntos típicos de funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ (véase el Capítulo I para los detales de las afirmaciones que siguen):

1.- Las funciones $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, que sean continuas.

2.- Las funciones $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, que sean continuas en $[-\pi,\pi]$, excepto posiblemente en un número finito de puntos y que son, además, acotadas.

$L^2(-\pi,\pi)$ es un espacio vectorial real, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función. Además, su dimensión es infinita; es decir, es posible encontrar subconjuntos de $L^2(-\pi,\pi)$ que sean linealmente independientes y conteniendo infinitos elementos (piénsese que las funciones polinomiales son elementos de $L^2(-\pi,\pi)$). Además, si $f,g \in L^2(-\pi,\pi)$, se puede definir el producto escalar de f y g como

$$< f,g >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x)\, dx \tag{1.21}$$

Esto transforma a $L^2(-\pi,\pi)$ en un espacio prehilbertiano. El teorema de *Riesz-Fischer* muestra que, con la norma derivada del anterior producto escalar, es decir,

$$\|f\| =< f, f >^{1/2}, \ \forall \ f \in L^2(-\pi,\pi), \tag{1.22}$$

el espacio $L^2(-\pi,\pi)$ es completo. En definitiva tenemos que $L^2(-\pi,\pi)$, con el producto escalar (1.21) es un ESPACIO DE HILBERT REAL DE DIMENSIÓN INFINITA.

Es ciertamente satisfactoria la estructura algebraico-topológica de $L^2(-\pi,\pi)$. Sin embargo, este espacio encierra muchos misterios. Por ejemplo, ¿qué significado tiene la convergencia en el espacio $L^2(-\pi,\pi)$?, ¿qué relación tiene con la convergencia puntual o uniforme? La respuesta se pone de manifiesto en el cuadro siguiente, que indica, que, al menos, se ha de ser precavido:

$$\begin{array}{ccc}
 & & \{f_n\} \to f \ en \ L^2(-\pi,\pi) \\
 & \not\swarrow \ \nearrow & \\
\{f_n\} \to f \ \text{ uniformemente en } [-\pi,\pi] & & \not\uparrow \ \not\downarrow \\
 & \not\nwarrow \ \searrow & \\
 & & \{f_n\} \to f \ c.p.d.
\end{array}$$

(Después de leer detenidamente las relaciones anteriores, uno tiene la impresión de que $L^2(-\pi,\pi)$ es aún más misterioso de lo que se creía).

Otros espacios de Hilbert que conocemos, como el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Además, tal base puede elegirse siempre ortonormal. Esto facilita muchísimo su estudio, así como el de ciertas clases de funciones definidas entre estos espacios (por ejemplo, las funciones lineales u homomorfismos) . La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿tendrá $L^2(-\pi,\pi)$ una base? Esto origina, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿cuál sería una definición "adecuada" de base en $L^2(-\pi,\pi)$?, ¿cuántas bases hay (si es que las hay) en $L^2(-\pi,\pi)$?, ¿qué ventajas tiene la utilización del concepto de base?; etc.

Para responder a las cuestiones anteriores, conviene que pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \cdots$ etc. En $\mathbb{R}$, una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}$); en $\mathbb{R}^2$, una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos (ninguno de los cuales es nulo), y en general, en $\mathbb{R}^n$, una base está formada por un subconjunto ortogonal de n elementos, ninguno de los cuales es nulo (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente $\{f_1, \cdots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^n$, otro subconjunto ortogonal que engendra el mismo subespacio).

En este caso, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente: "Un subconjunto A de $L^2(-\pi,\pi)$ que sea ortogonal, se dirá que es una base de $L^2(-\pi,\pi)$ si todo elemento de $L^2(-\pi,\pi)$ es combinación lineal finita (al ser A ortogonal, A es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de A". Es interesante mostrar que no puede existir tal subconjunto A. En efecto, si existiese, podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal. Ahora bien, si $A \subset L^2(-\pi,\pi)$ es un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior, A debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real $L^2(-\pi,\pi)$ sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues A debe contener algún subconjunto numerable. Sea $B \subset A$, B numerable. Entonces $B = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos la sucesión $\{f_n\}$ definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}$$

Entonces, $\{f_n\} \to f$ donde $f \in L^2(-\pi,\pi)$; de hecho

$$f = \frac{b_1}{2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k},$$

que prueba que f no puede ser una combinación lineal finita de elementos de A.

Creo que lo anterior motiva la siguiente definición:

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(-\pi,\pi)$. Diremos que tal subconjunto es una base, si cualquier elemento f de $L^2(-\pi,\pi)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n \tag{1.23}$$

La anterior definición motiva de manera inmediata una serie de cuestiones: ¿existen bases de $L^2(-\pi,\pi)$? Si la respuesta es afirmativa, ¿cuántas bases hay en $L^2(-\pi,\pi)$?, ¿cómo se pueden construir bases de $L^2(-\pi,\pi)$?, ¿qué utilidades tiene la utilización de la noción de base en $L^2(-\pi,\pi)$? etc.

La primera pregunta que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en $L^2(-\pi,\pi)$. En este sentido, es muy corriente en Matemáticas al objeto de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en $L^2(-\pi,\pi)$), dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia (que lo será) sino para poder utilizarlas según nos exija la situación concreta que se nos plantee. En este sentido puede probarse que si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(-\pi,\pi)$, entonces son equivalentes:

1. $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $L^2(-\pi,\pi)$.

2. Para cualquier f de $L^2(-\pi,\pi)$ se cumple la llamada igualdad de *Parseval*

$$\| f \|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2 \tag{1.24}$$

3. El único elemento de $L^2(-\pi,\pi)$ ortogonal al conjunto $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es el elemento cero.

4. Para cualquier par de elementos f y g de $L^2(-\pi,\pi)$, se tiene

$$< f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > < g, f_n > . \tag{1.25}$$

Usando las anteriores caracterizaciones (exactamente, el apartado (c)), *Lebesgue* probó que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(nx)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx)\ ,\ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{1.26}$$

es una base de $L^2(-\pi,\pi)$ ([30], [45]). Insisto en que las afirmaciones anteriores se probarán en el Capítulo I.

Lo anterior significa, entre otras cosas que, para cualquier función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, se tiene que

$$f \,=\, B_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)) + A_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)) \right) \tag{1.27}$$

donde

$$B_0 =< f,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx$$

$$B_n =< f,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \cos(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

$$A_n =< f,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ \operatorname{sen}(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},$$

Estas relaciones suelen escribirse de la forma:

$$f \,=\, \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (b_n \cos(n(\cdot)) + a_n \operatorname{sen}(n(\cdot))) \tag{1.28}$$

donde

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos(nx)\,dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\} \\ \text{y}& \\ a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

Dada $f \in L^2(-\pi,\pi)$, a la serie (1.28) con a_n y b_n definidos por (1.29) se le llama serie de Fourier de f respecto del sistema ortonormal (1.26). Observemos que, en realidad, el desarrollo (1.28) no es sino (1.15) (admitiendo convergencia puntual de la serie (1.28)), con lo que se tiene, casi un siglo después, una confirmación satisfactoria del desarrollo propuesto por *Fourier*.

Los otros desarrollos en serie, (1.7) y (1.14), propuestos por *Fourier*, pueden obtenerse muy fácilmente, realizando extensiones convenientes al intervalo $[-\pi,\pi]$, (impares o pares), de las funciones definidas en $[0,\pi]$. De esta manera se obtiene que el conjunto

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mathrm{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{1.30}$$

es una base de $L^2(0,\pi)$, a la que corresponde el desarrollo de Fourier (1.7) (Capítulo II). Análogamente, el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\} \tag{1.31}$$

es una base de $L^2(0,\pi)$, a la que corresponde el desarrollo (1.14) (Capítulo II).

Los resultados referentes a convergencia puntual, uniforme, derivación e integración, etc., de las series de Fourier anteriores, así como diversas aplicaciones se mostrarán en el Capítulo II y pueden también encontrarse en [29], [31] y [38].

No debemos proseguir sin comparar algunas de las propiedades del espacio $L^2(-\pi,\pi)$ con las correspondientes del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, pues entendemos que, en la Ciencia, es fundamental ir reconociendo las analogías y diferencias entre los nuevos objetos y lo que son familiares, para poder avanzar en el conocimiento de aquellos.

1. $\mathbb{R}^n$ es un espacio vectorial real de dimensión n. Una base ortonormal, V, está formada por n vectores $V = \{v_1, ..., v_n\}$ ortonormales. En este caso, cualquier elemento $x \in \mathbb{R}^n$ se expresa de la forma

$$x = \sum_{i=1}^{n} < x, v_i > v_i\,. \tag{1.32}$$

donde $< .,. >$ es el producto escalar usual.

1'.- $L^2(-\pi,\pi)$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita. Una base ortonormal está formada por una sucesión ortonormal $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ tal que cualquier elemento $f \in L^2(-\pi,\pi)$ se expresa en la forma

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n \tag{1.33}$$

donde $< .,. >$ es el producto escalar definido en (1.21) .

2.- $\mathbb{R}^n$, con el producto escalar

$$< x, y >= \sum_{i=1}^{n} < x, v_i >< y, v_i >, \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n, \tag{1.34}$$

es un espacio de Hilbert real de dimensión n, donde las coordenadas de los vectores se entienden respecto de la base V.

2'.- $L^2(-\pi,\pi)$, con el producto escalar

$$< f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > < g, f_n >, \ \forall f, g \in L^2(-\pi,\pi), \tag{1.35}$$

es un espacio de Hilbert real de dimensión infinita.

3.- Para cualquier $x \in \mathbb{R}^n$, se cumple

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} | < x, v_i > |^2. \tag{1.36}$$

3'.- Para cualquier $f \in L^2(-\pi,\pi)$, se cumple

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2 \tag{1.37}$$

4.- El único elemento de $\mathbb{R}^n$, ortogonal a todos los elementos v_i, $1 \leq i \leq n$, es el elemento cero.

4'.- El único elemento de $L^2(-\pi,\pi)$, ortogonal a todos los elementos $f_n, n \in \mathbb{N}$, es el elemento cero.

5.- $\mathbb{R}^n$ es un espacio de Hilbert separable (es decir, contiene algún subconjunto denso y numerable) de dimensión finita.

5'.- $L^2(-\pi, \pi)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

Como hemos mostrado, existen grandes analogías entre el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ y $L^2(-\pi, \pi)$. Ahora bien, también hay grandes diferencias, marcadas por el paso de la dimensión finita a la infinita. La primera, que ya hemos visto, se refiere al concepto de base. Otra muy importante puede ser la siguiente, que nos indica que en los espacio de dimensión infinita, hemos de ser cuidadosos con nuestras conclusiones: El conocido teorema de *Bolzano-Weierstrass* afirma que si $S \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y contiene infinitos elementos, entonces el conjunto derivado de S, $S,'$ es no vacío ([4]). Pues bien, no es posible establecer una propiedad análoga en $L^2(-\pi, \pi)$. Es decir, en $L^2(-\pi, \pi)$ es posible que un subconjunto sea acotado, con infinitos elementos y que en cambio, S' sea vacío. También, en $L^2(-\pi, \pi)$, cualquier subconjunto compacto ha de tener interior vacío ([6], [23]).

Otros problemas conducen a la posibilidad de desarrollos de Fourier distintos de los mencionados. Por ejemplo, si se estudian las vibraciones pequeñas de una cuerda, estando libres los extremos de la misma, tendremos en lugar de (1.1), el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, && 0 < x < \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, && t \ge 0, \end{aligned} \tag{1.38}$$

Aplicando el método de separación de variables al problema anterior, se nos plantea la posibilidad de obtener un desarrollo en serie como (1.14) . Los sumandos de tal desarrollo en serie son precisamente las funciones propias del problema de contorno

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \; x \in (0, \pi), \; X'(0) = X'(\pi) = 0, \tag{1.39}$$

Incluso, se pueden considerar condiciones de contorno de tipo mixto, tales como

$$\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = 0,\ t \geq 0,$$
$$\beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = 0,\ t \geq 0,$$

donde u_x indica la derivada parcial respecto de la variable x y $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ son números reales dados. Esto conduce a la posibilidad de desarrollos en serie que usan las funciones propias de problemas de contorno muy generales. Es evidente que sería estupendo disponer de un resultado general que nos afirmase que tales desarrollos son posibles. A este respecto, la teoría de problemas de contorno del tipo *Sturm-Liouville* proporciona, de manera bastante general, bases del espacio $L^2(-\pi,\pi)$, que pueden usarse en los problemas a estudiar. Pero, ¿qué son los problemas de contorno del tipo *Sturm-Liouville*? Como ya hemos tenido ocasión de ver en los problemas (1.1) y (1.9), cuando se aplica el método de separación de variables a numerosos problemas de tipo mixto para Ecuaciones en Derivadas Parciales ([41]), se originan dos Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, y las condiciones de contorno de la ecuación primitiva, producen unas condiciones de contorno sobre una de las ecuaciones ordinarias aparecidas. Normalmente, estas ecuaciones dependen de un parámetro. Se trata entonces de estudiar para qué valores de dicho parámetro (valores propios), las ecuaciones consideradas tienen soluciones no triviales (funciones propias). De esta manera se encuentran soluciones sencillas del problema primitivo. El objetivo es entonces encontrar la solución general del problema dado a partir de dichas soluciones sencillas.

Las anteriores ideas fueron desarrolladas, en el siglo XIX, por *Sturm*, profesor de Mecánica en la Sorbona y por *Liouville*, profesor de Matemáticas en el College de Francia. Con la ayuda del lenguaje de hoy en día, sus resultados pueden resumirse de la forma siguiente: Consideremos un problema de contorno de la forma

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}[\ p(t)\frac{dx(t)}{dt}\ ] + (\lambda - q(t))x(t) = 0,\ t \in [a,b] \\ &\alpha_1 x(a) + \alpha_2 x'(a) = 0 \\ &\beta_1 x(b) + \beta_2 x'(b) = 0, \end{aligned} \tag{1.40}$$

donde suponemos las siguientes hipótesis:

1) $p \in C^1([a,b],\mathbb{R})$; además $p(t) > 0,\ \forall\, t \in [a,b]$.

2) $q \in C([a,b],\mathbb{R})$.

3) $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ y β_2 son números reales dados tales que $|\alpha_1| + |\alpha_2| > 0$ y $|\beta_1| + |\beta_2| > 0$.

4) λ es un parámetro real.

A las condiciones de contorno que aparecen en (1.40) se les llama condiciones de contorno separadas; de especial significación son las llamadas condiciones de contorno de *Dirichlet*

$$x(a) = x(b) = 0 \tag{1.41}$$

y las condiciones de contorno de *Neumann*

$$x'(a) = x'(b) = 0 \tag{1.42}$$

Es claro que los únicos valores interesantes del parámetro λ son aquellos para los cuales (1.40) tiene soluciones no triviales. En este caso diremos que λ es **valor propio** de (1.40) y cualquier solución de (1.40) se dice que es una **función propia** asociada al valor propio λ.

En los enunciados que siguen mostramos un resumen de las principales aportaciones de *Sturm* y *Liouville* ([15]):

a) Cualquier valor propio de (1.40) es de multiplicidad 1.

b) Cualquier par de funciones propias x e y, asociadas respectivamente a valores propios distintos λ y μ, son ortogonales, es decir,

$$\int_a^b x(t)y(t)\,dt = 0$$

c) El conjunto de valores propios de (1.40) es infinito numerable. El sistema ortonormal de funciones propias asociado $\{\phi_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, es una base de $L^2(a,b)$.

d) Sea $g \in C^2[a,b]$ cualquier función satisfaciendo las condiciones de contorno dadas en (1.40) . Entonces

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} < g, \phi_n > \phi_n(t),\ \forall\ t \in [a,b]$$

donde la serie converge de manera absoluta y uniforme en $[a,b]$.

Si se eligen las condiciones de contorno (1.41), para $[a,b] = [0,\pi]$, se obtendría la base (1.30), que se corresponde con el desarrollo de

Fourier (1.7), y si se eligen las condiciones de contorno (1.42), también para $[a,b] = [0,\pi]$, tendríamos la base (1.31) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (1.14) .

De manera análoga se puede estudiar el problema de contorno correspondiente a condiciones de contorno periódicas

$$x(a) = x(b),\ x'(a) = x'(b). \tag{1.43}$$

El resultado que se obtiene es análogo al expresado en el teorema anterior, excepto en lo que se refiere a la multiplicidad de los valores propios. Tomando $[a, b] = [-\pi, \pi]$ obtendríamos la base (1.26) que se corresponde con el desarrollo de Fourier (1.15) .

Eligiendo condiciones de contorno distintas de las mencionadas, obtendríamos diferentes bases del espacio $L^2(a, b)$. También, las funciones de *Bessel, Legendre*, etc. (de gran significación en Física e Ingeniería), pueden estudiarse como soluciones de ciertos problemas de contorno para Ecuaciones Diferenciales Ordinarias lineales con coeficientes singulares ([16]).

Una de las maneras más bonitas y sencillas de probar los resultados de *Sturm* y *Liouville* es usando el concepto de función de Green. Ello permite transformar (1.40) en una ecuación integral equivalente y trabajar, a partir de ahí, con operadores integrales ([25]). De esta forma van surgiendo de manera natural una serie de propiedades que, puestas de manera abstracta, dan lugar a la teoría de operadores compactos y autoadjuntos. Esta teoría, debida en gran parte a *Fredholm* y *Hilbert*, tuvo su origen a finales del siglo XIX ([30]) y principios del actual y proporcionó muchas ideas claves para el nacimiento del Análisis Funcional. Permite generalizar de manera destacada la teoría de los desarrollos de Fourier, y legitima el uso de métodos análogos en problemas aparentemente muy diferentes de los aquí considerados. Presentamos a continuación algunas de las ideas básicas ([6], [26]).

Sea H cualquier espacio de Hilbert real separable y $T : H \to H$ un operador lineal. T se dice compacto si $T(B)$ es relativamente compacto, donde B es la bola cerrada unidad de H. Puede probarse que T es compacto si y solamente si para cada sucesión acotada $\{f_n\}$ de H, la sucesión $\{T(f_n)\}$ contiene alguna sucesión parcial convergente.

Cualquier operador compacto es continuo, pero el recíproco no es necesariamente cierto (considérese la aplicación identidad en H). El recíproco es obviamente cierto si la dimensión de H es finita.

Por otra parte, T se dice autoadjunto si $< Tu, v >=< u, Tv >$,
$\forall\ u, v \in H$, donde $< . >$ es el producto escalar definido en H.

El conjunto resolvente de T, $\rho(T)$, se define de la forma

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} : T - \lambda I \ \text{ es biyectivo de } H \text{ en } H\},$$

donde I indica la aplicación identidad en H.

Si $\lambda \in \rho(T)$, entonces $(T - \lambda I)^{-1} : H \to H$ es lineal y continuo. El espectro de T, $\sigma(T)$ se define como el conjunto complementario de $\rho(T)$, es decir, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$. Por último, diremos que $\lambda \in \mathbb{R}$ es valor propio de T, y se escribe $\lambda \in VP(T)$ si $ker(T - \lambda I)$ no es trivial, donde ker indica el núcleo del operador lineal correspondiente. Es claro que $VP(T) \subset \sigma(T)$, siendo la inclusión estricta, en general (si H tiene dimensión finita, entonces $VP(T) = \sigma(T)$).

Los resultados siguientes, generalizan, a dimensión infinita, los correspondientes a la diagonalización de una matriz cuadrada, real y simétrica. Sea H un espacio de Hilbert separable real y $T : H \to H$ un operador lineal, compacto y autoadjunto. Entonces H admite una base hilbertiana formada por vectores propios de T.

Más precisamente, si $H_0 = ker(T)$, y $H_n = ker(T - \lambda_n I)$, donde λ_n es la sucesión (que puede ser finita) de valores propios distintos de T, excluido el cero, entonces:

a) La dimensión de H_n es finita, $\forall\ n \geq 1$.

b) Los subespacios $H_n,\ n \geq 0$, son ortogonales dos a dos.

c) El espacio vectorial generado por los $H_n,\ n \geq 0$, es denso en H.

d) Para cualquier $u \in H$, se tiene

$$u = \sum_{n \geq 0} u_n, \tag{1.44}$$

donde $u_n = P_{H_n}\, u$, siendo P_{H_n} la proyección de u sobre H_n. Además,

$$\|u\|^2 = \sum_{n \geq 0} \|u_n\|^2. \tag{1.45}$$

Por último, $T(u) = \sum_{n \geq 1} \lambda_n u_n$ (T es diagonalizable).

Observemos la analogía entre (1.44), (1.32) y (1.33), por una parte, y (1.45), (1.36) y (1.37) por otra.

Los resultados anteriores son de una gran utilidad y justifican la aplicación del método de separación de variables cuando estamos tratando con problemas de contorno como (1.1) o (1.9), pero donde la variable x puede ser multidimensional. Ello origina las series de Fourier en varias variables. Por ejemplo, si estamos tratando el problema de la conducción del calor en un cuerpo (abierto y acotado) Ω de $\mathbb{R}^3$, en lugar de en una varilla unidimensional como en (1.9), tendríamos que considerar el problema

$$\begin{aligned} &\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ (x,t) \in \Omega \times (0,T), \\ &u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \\ &u(x,0) = f(x),\ \forall\ x \in \overline{\Omega}, \end{aligned} \tag{1.46}$$

siendo Δ_x el operador Laplaciano con respecto a $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$; es decir,

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2}.$$

Por su parte, $\partial\Omega$ indica la frontera del conjunto Ω.

La aplicación del método de separación de variables al problema anterior, origina, en lugar de (1.10), que es un problema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el problema

$$\Delta_x X(x) + \mu X(x) = 0,\ x \in \Omega;\ X(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \tag{1.47}$$

Ahora puede aplicarse lo anterior ([6]) para demostrar que el conjunto de valores propios de (1.47) es infinito numerable y que el conjunto de funciones propias asociadas, convenientemente ortonormalizadas, $\{X_n(x),\ n \in \mathbb{N}\}$, forma una base del espacio $L^2(\Omega)$. Esto justifica el hecho de que cualquier condición inicial f se exprese como

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x), \tag{1.48}$$

para coeficientes convenientes a_n. Así, la solución de (1.46) es de la forma

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(t) X_n(x), \tag{1.49}$$

donde las funciones P_n satisfacen una ecuación análoga a (1.11) .

Ideas parecidas pueden aplicarse al estudio del problema de la cuerda vibrante (1.1) en dimensiones superiores, así como a otros problemas de naturaleza diferente ([6], [16], [44]).

Como hemos tenido ocasión de ver, la teoría de series de Fourier es una de las creaciones más grandes de la Historia de la Ciencia. Ha tenido, además, una gran influencia en el nacimiento y desarrollo de numerosas técnicas y conceptos matemáticos. Como he comentado con anterioridad, enumerarlos sería muy extenso. No obstante, el lector interesado no debería dejar pasar la oportunidad de consultar las referencias [9], [16], [17], [19], [20], [29], [30], [31], [39] y [44]), para comprender la magnitud del tema.

En la actualidad, la teoría de Series de Fourier sigue teniendo una gran importancia y su conocimiento es de gran utilidad en disciplinas muy diversas como Matemáticas, Física, Biología, Ingeniería, Economía, etc. Tales series están siempre presentes en todos aquellos procesos naturales de tipo oscilatorio, de difusión o de naturaleza periódica. Por mencionar algunos, los métodos de Fourier se emplean en problemas tan diversos como los relacionados con: el ciclo de las manchas solares, predicción de mareas, mejora de la calidad de las imágenes de los objetos celestes tomadas desde el espacio, física de plasmas, física de semiconductores, acústica, sismografía, oceanografía, confección de imágenes en Medicina (escáner TAC), estudio del ritmo cardíaco, análisis químicos, estudios de rayos X (usando el análisis de Fourier, los astrónomos pueden estudiar las variaciones en intensidad de las señales de rayos X de un objeto celeste), etc. (véanse [21], [34] y [40]).

Especialmente en Física son hoy más válidas que nunca las palabras de **Lord Kelvin: "Los métodos de Fourier no son solamente uno de los resultados más hermosos del Análisis moderno, sino que puede decirse además que proporcionan un instrumento indispensable en el tratamiento de casi todas las cuestiones de la Física actual, por recónditas que sean".**

Capítulo 2

El espacio $L^2(a, b)$

2.1. Algunas nociones previas necesarias para entender el capítulo.

2.1.1. Sobre la notación

En lo que sigue:

- $\mathbb{N}$ indicará el conjunto de los números naturales.
- $\mathbb{Z}$ indicará el conjunto de los números enteros.
- $\mathbb{Q}$ indicará el conjunto de los números racionales.
- $\mathbb{R}$ indicará el conjunto de los números reales.

2.1.2. Sobre numerabilidad

Definición 1. Diremos que un conjunto C es *numerable* si existe una aplicación inyectiva $r : C \longrightarrow \mathbb{N}$.

Es claro que todo conjunto finito es numerable. También $\mathbb{Q}$ es numerable mientras que $\mathbb{R}$ no lo es. La unión numerable de conjuntos numerables es asímismo un conjunto numerable.

Si $r : C \longrightarrow B$ es inyectiva y B es numerable, C es numerable ([38]).

2.1.3. Sobre Integración de Lebesgue en $\mathbb{R}$

- La medida de un intervalo arbitrario $[a, b]$ (ó $[a, b)$, $(a, b]$, (a, b)), $\mu\ [a, b]$, es $b - a$. Sabemos también que todo conjunto abierto de $\mathbb{R}$ se expresa, de manera única, como una unión numerable de intervalos abiertos disjuntos ([4]); así, si $G \subset \mathbb{R}$ es abierto tal que $G = \cup_{i\in\mathbb{N}} I_i$, se define la medida de G, $\mu(G)$, como $\mu(G) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(I_i)$ (esta suma puede ser infinita).

Dado un subconjunto cualquiera $E \subset \mathbb{R}$, se define la medida exterior de E, $\mu^*(E)$, como

$$\mu^*(E) = \text{ínf}\{\mu(G) : E \subset G, G \text{ abierto}\}$$

Observemos que la medida exterior existe para cualquier subconjunto de $\mathbb{R}$ (aunque puede ser infinita).

Sea ahora $A \subset [a,b]$. Diremos que el conjunto A es medible si $\mu^*(A)+$
$+\mu^*([a,b] \setminus A) = b-a$. En este caso, $\mu^*(A)$ es la medida de A y se indicará como $\mu(A)$. No es difícil ver que la medibilidad y la medida de A son independientes del intervalo elegido $[a,b]$ tal que $A \subset [a,b]$.

Si A es tal que $\mu(A) = 0$, diremos que A es de medida nula. Cualquier subconjunto numerable de $[a,b]$ es de medida nula.

Una propiedad relativa a puntos de $[a,b]$ diremos que se cumple casi por doquier (c.p.d.) en $[a,b]$ si el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde dicha propiedad no se verifica es un conjunto de medida nula.

Una función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible si para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$ el conjunto $\{x \in [a,b] : f(x) > \alpha\}$ es medible. Si $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son funciones medibles también lo son $|f|, \alpha f$ $(\forall \alpha \in \mathbb{R})$ y $f+g$. Toda función continua casi por doquier es medible. Si f es medible y $f = g$ c.p.d. en $[a,b]$, entonces g es medible.

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función medible, diremos que f es integrable si la integral $\int_a^b f(x)\,dx$ existe en el sentido de Lebesgue y es finita.

Conviene tener en cuenta las siguientes consideraciones (algunas de las cuales no son, en absoluto, elementales):

- Si f y g son funciones integrables en $[a,b]$, entonces también son integrables las funciones $f+g$ y cf, para cualquier número real c.

- Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable en $[a,b]$ y $g = f$ c.p.d. en $[a,b]$, entonces g es integrable en $[a,b]$ y $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$.

- Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y $|f(x)| \leq g(x)$ c.p.d. en $[a,b]$, con g integrable en $[a,b]$, entonces f es integrable en $[a,b]$. En particular, cualquier función medible y acotada en $[a,b]$ es integrable en $[a,b]$.

- Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible, entonces f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si $|f|$ es integrable en $[a,b]$.

Para aquellos lectores que no conozcan la integración de Lebesgue, viene inmediatamente en su ayuda la noción de integral de Riemann:

- Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es integrable Riemann, entonces f es integrable (en el sentido de Lebesgue) y ambas integrales coinciden.

- Recordemos que si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es acotada, entonces f es integrable Riemann si y sólo si el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde f no es continua tiene medida cero. Como una consecuencia de esta observación y de las anteriores consideraciones, tenemos que cualquier función continua en $[a,b]$ será integrable (según Riemann y Lebesgue) en $[a,b]$; también, cualquier función acotada y continua en $[a,b]$ salvo en un número finito de puntos, será integrable (según Riemann y Lebesgue) en $[a,b]$.

- En adelante, cuando hablemos de funciones integrables se entenderá siempre, salvo que explícitamente se diga otra cosa, que lo son en el sentido de Lebesgue.

Teorema de la convergencia monótona :

Sea $\{f_n\}$ una sucesión monótona de funciones reales definidas en $[a,b]$ ($f_n \geq f_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$ ó $f_n \leq f_{n+1},\ \forall n \in \mathbb{N}$) , integrables Lebesgue , tal que la sucesión $\{\int_a^b f_n(x)\, dx\}$ es acotada. Entonces:

1. La sucesión $\{f_n\}$ converge casi por doquier.
2. Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es tal que $\{f_n\} \longrightarrow f$ c.p.d., entonces f es integrable Lebesgue en $[a,b]$ y

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx.$$

Teorema de la convergencia dominada :

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones reales definidas en $[a,b]$ e integrables Lebesgue, tal que $\{f_n\} \longrightarrow f\ c.p.d.\ en\ [a,b]$ y existe una función

$g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrable Lebesgue, verificando $|f_n| \leq g\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces se verifica que f es una función integrable y

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)\, dx$$

Funciones absolutamente continuas y fórmula de integración por partes:

Una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ se dirá absolutamente continua si cumple la propiedad siguiente:

"$\forall\ \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\ \delta(\varepsilon) \in \mathbb{R}^+$ tal que para toda sucesión finita de intervalos disjuntos $(a_k,\ b_k)\ de\ [a,b],\ 1 \leq k \leq n$, tal que $\sum_{k=1}^{n} |b_k - a_k| < \delta$, se verifica $\sum_{k=1}^{n} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$".

Una función absolutamente continua (a.c.) en $[a,b]$ es uniformemente continua en $[a,b]$; el recíproco no es necesariamente cierto.

Es claro que si f es $Lipschitziana$ en $[a,b]$ entonces f es a.c. en $[a,b]$. En particular, si $f \in C^1[a,b]$, o si f es una función continua en $[a,b]$ y "lineal a trozos" en $[a,b]$, f es a.c. en $[a,b]$.

Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es a.c., entonces existe $f'(x)$ c.p.d. en $[a,b]$ y $f' \in L^1(a,b)$ (es decir, f' es integrable Lebesgue en $[a,b]$). También, si $g \in L^1(a,b)$, la función $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \int_c^x g(t)\, dt$ (c es un punto fijo de $[a,b]$), $\forall x \in [a,b]$, es a.c. en $[a,b]$ y $f'(x) = g(x)$ c.p.d. en $[a,b]$.

Por último diremos que si $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ son a.c., entonces es válida la fórmula de integración por partes:

$$\int_a^b f(x)g'(x)\, dx \;=\; f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b g(x)f'(x)\, dx$$

El lector puede consultar [3] y [38] para más detalles sobre integración de Lebesgue.

2.1.4. Sobre la definición de espacio normado y de Hilbert

- Sea X un espacio vectorial real. Una norma en X es una aplicación $\|\cdot\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

1. $\|x\| \geq 0,\ \forall x \in X$ y $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
2. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$ (desigualdad triangular).
3. $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x \in X$.

En este caso, a $\|\cdot\|$ se le llama una norma definida en X.

Diremos que $(X, \|\cdot\|)$ **es un espacio normado completo** (o espacio de Banach), si cualquier sucesión de Cauchy en X es convergente en X; es decir, si para cualquier sucesión $\{x_n\}$ en X satisfaciendo la propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists\, n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ p, q \geq n_0(\varepsilon) \ \Rightarrow \|x_p - x_q\| \leq \varepsilon$$

se tiene que existe $x \in X$ tal que $\{x_n\} \longrightarrow x$ ($\{x_n\} \longrightarrow x$ si $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $n \geq n_0(\varepsilon) \Longrightarrow \|x_n - x\| \leq \varepsilon$)

El espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ diremos que es separable si existe un subconjunto B de X que sea denso y numerable.

- Sea X un espacio vectorial real. Un producto escalar en X es una aplicación $< ., . >:\ X$ x $X \longrightarrow \mathbb{R}$ que satisface:

1. $< x, y >=< y, x >$, $\forall x, y \in X$.
2. $< x + y, z >=< x, z > + < y, z >$, $\forall x, y, z \in X$.
3. $< \alpha x, y >= \alpha < x, y >$, $\forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall x, y \in X$.
4. $< x, x >\geq 0\ \forall x \in X\ y\ < x, x >= 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Si $(X, < .,. >)$ es un espacio dotado con un producto escalar, entonces X es un espacio normado (véase el ejercicio 7), con la norma definida por

$$\|x\| = (< x, x >)^{\frac{1}{2}} \ , \ \forall x \in X$$

Si $(X, \|\cdot\|)$, donde $\|\cdot\|$ indica la norma anterior definida a partir del producto escalar, es un espacio normado completo, diremos que $(X, < .,. >)$ es un espacio de Hilbert real. Si además $(X, \|\cdot\|)$ es separable, diremos que $(X, < .,. >)$ es un espacio de Hilbert separable.

El lector puede consultar [6] para la teoría básica general de espacios normados y de espacios de Hilbert.

2.2. Presentación del capítulo y resumen de resultados fundamentales.

En este capítulo estudiamos el conjunto $L^2(a, b)$, formado por aquellas funciones medibles $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ para los que la integral $\int_a^b f^2(x)\, dx$ existe, en el sentido de Lebesgue y es finita. Se supone que dos funciones son iguales si lo son c.p.d. en $[a, b]$.

En primer lugar pretendemos que el lector se familiarice con tipos de funciones que pertenezcan a $L^2(a, b)$. A continuación estudiamos la estructura algebraica y topológica de $L^2(a, b)$, haciendo un estudio detallado de la convergencia en este espacio y su relación con otros tipos de convergencia (puntual, uniforme, etc.), familiares para el lector. Estudiamos la noción de ortogonalidad en $L^2(a, b)$ y su utilidad para el concepto de base. Sobre esto último hacemos un especial hincapié debido a su trascendencia en lo que sigue. Probamos la existencia de una base de tipo especial en $L^2(a, b)$ (la base trigonométrica) y mostramos algunas consecuencias de este hecho.

El estudio que se hace de $L^2(a, b)$ no pretende en modo alguno ser exhaustivo; muy al contrario se han tratado de poner de manifiesto sólo aquellas propiedades útiles para el estudio de las Series de Fourier. Por último sí que se han tratado con especial cuidado algunas de las similitudes y diferencias existentes entre el espacio de Hilbert de dimensión infinita $L^2(a, b)$ y el espacio de Hilbert de dimensión finita $\mathbb{R}^n$.

Los resultados y enunciados fundamentales son, a mi juicio, los siguientes:

- $L^2(a, b)$ es el conjunto de funciones medibles $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue, donde dos funciones se consideran iguales si lo son casi por doquier en $[a, b]$ (c.p.d. en $[a, b]$). Es decir

$$L^2(a, b) = \{f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ medible } : \int_a^b f^2(x)\, dx \ < +\infty\}$$

y si

$$f, g \in L^2(a,b),\ f = g \Leftrightarrow f(x) = g(x)\ c.p.d.\ en\ [a,b].$$

- $L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real con la suma usual de funciones y el producto usual de un número real por una función. Además, en $L^2(a,b)$ se puede definir el producto escalar

$$< f, g >= \int_a^b f(x)g(x)\, dx,\ \forall f, g \in L^2(a,b)$$

Con este producto escalar, $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable de dimensión infinita.

- El conjunto de funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}},\ p_n,\ \ q_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

donde

$$p_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} cos \left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

$$q_n(x) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \operatorname{sen} \left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a} \right)$$

es una base de $L^2(a,b)$. Esto significa que, para cualquier función $f \in L^2(a,b)$, se tiene que

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{b-a}} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n p_n + b_n q_n)$$

(entendiéndose la convergencia de la serie anterior en $L^2(a,b)$), donde

$$a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{b-a}} >,\ a_n =< f, p_n >,\ b_n =< f, q_n >,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

son los llamados coeficientes de Fourier de f respecto de la base anterior.

En particular se cumple la igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\, dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2),\ \forall f \in L^2(a,b).$$

2.3. Desarrollo del capítulo

Si a y b son dos números reales dados, con $a < b$, denotaremos por $[a,b]$ al intervalo cerrado de extremos a y b. Al intervalo abierto de extremos a y b lo notamos por (a,b). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible, diremos que f es de cuadrado integrable si la integral

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

existe en el sentido de Lebesgue y es finita ($|.|$ significa el valor absoluto).

$\mathbf{L}^2(a,b)$ representa al conjunto de todas las funciones reales, definidas en $[a,b]$, medibles y de cuadrado integrable.

En el conjunto $\mathbf{L}^2(a,b)$ se puede definir la siguiente relación de equivalencia: dados f, g dos elementos de $\mathbf{L}^2(a,b)$, diremos que $f \sim g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ c.p.d. (es decir, $f(x) = g(x)$ salvo en un subconjunto de $[a,b]$ de medida nula).

Pruebe el lector que, efectivamente, dicha relación es una relación de equivalencia, con el objeto de familiarizarse con la realización de ejercicios, ya que si sigue leyendo este libro eso es lo que le espera.

Al conjunto cociente de $\mathbf{L}^2(a,b)$, con la relación de equivalencia anterior, se le nota por $L^2(a,b)$.

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, escribiremos a veces $f \in L^2(a,b)$. Esta afirmación debe entenderse en el sentido de que la clase de equivalencia definida por f (es decir, el conjunto formado por todas aquellas funciones reales, definidas en $[a,b]$ y que coinciden con f salvo en un subconjunto de medida nula de $[a,b]$) pertenece al conjunto $L^2(a,b)$.

También escribiremos a veces $f = g$ en $L^2(a,b)$, debiéndose entender que $f(x) = g(x)$ c.p.d. en $[a,b]$.

Ejemplos y notas:

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in L^2(a,b)$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ de (a,b), y es tal que, para cada i $(1 \leq i \leq n)$ existen los límites laterales $f(t_i-)$ y $f(t_i+)$, entonces $f \in L^2(a,b)$.

- Si $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ es continua y existe $f(b-)$, entonces $f \in L^2(a,b)$ (análogamente si $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y existe $f(a+)$, entonces $f \in L^2(a,b)$).

- Puede ocurrir que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea discontinua en un número infinito de puntos de $[a,b]$ y que $f \in L^2(a,b)$. Por ejemplo, la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} 1 & si \ x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & si \ x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

está en $L^2(a,b)$. De hecho $f = 0$ en $L^2(a,b)$ ($\mathbb{Q}$ es numerable y cualquier subconjunto numerable de $[a,b]$ tiene medida cero).

Para ilustrar las anteriores ideas, y tomando $[a,b] = [-\pi, \pi]$ por concretar, las siguientes funciones pertenecen a $L^2(-\pi,\pi)$:

$$f_1(x) = \operatorname{sen} x,$$

$$f_2(x) = \cos x,$$

$$f_3(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, \ x \in [-\pi, 0), \\ x - \pi, \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

$$f_4(x) = \begin{cases} -\operatorname{sen} x, \ x \in [-\pi, -\pi/2), \\ \cos x, \ x \in [-\pi/2, 0), \\ x - \pi, \ x \in [0, \pi] \end{cases}$$

- Si $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ es continua, no ha de cumplirse necesariamente que $f \in L^2(a,b)$ (ver ejercicio n^o 1).

- Un criterio muy útil para demostrar que una función dada

$f : [a,b] \to \mathbb{R}$ pertenece a $L^2(a,b)$ es el siguiente: "Si f es medible y $|f(x)|^2 \leq g(x)$, c.p.d. en $[a,b]$, donde $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible y existe $\int_a^b g(x)\, dx$, entonces $f \in L^2(a,b)$" (*a estas alturas es posible que muchos lectores hayan sentido la necesidad imperiosa de repasar sus conocimientos sobre integración de Lebesgue*).

El criterio anterior suele utilizarse mucho en la práctica para el caso en que g es una función constante (una cota, si existe, de $|f|^2$ en $[a,b]$) obteniéndose lo siguiente: "Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es medible y f es acotada en $[a,b]$, entonces $f \in L^2(a,b)$".

EJERCICIO 1:

Sea $\alpha > 0$. Considérese la función $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \frac{1}{x^\alpha} \ si \ x \neq 0 \ , \ f(0) = 0.$$

Demuéstrese que $f \in L^2(0,1)$ si y sólo si $\alpha < \frac{1}{2}$.

Solución: f es claramente medible para cualquier $\alpha > 0$, puesto que f es discontinua sólo en $x = 0$. Distinguiremos dos casos:

1. $\alpha = \frac{1}{2}$. Entonces

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx = \int_0^1 \frac{1}{x}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\ln 1 - \ln \varepsilon] = +\infty$$

2. $\alpha > 0,\ \alpha \neq \frac{1}{2}$. Entonces

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^2 dx = \int_0^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{x^{2\alpha}}\, dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} [\frac{1}{-2\alpha + 1} - \frac{\varepsilon^{-2\alpha+1}}{-2\alpha + 1}] =$$

$$= \frac{1}{-2\alpha + 1}[1 - \lim_{\varepsilon \to 0^+} \varepsilon^{-2\alpha+1}]$$

Este límite es finito sólo si $-2\alpha + 1 > 0$; es decir, $\alpha < \frac{1}{2}$.

Notas:

- El hecho de que $f(0) = 0$ no influye para nada en el resultado, de tal manera que el mismo resultado se obtendría para $f(0)$ cualquier otro número real.

- La función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}, \forall x \in (0, 1)$ es continua y no pertenece a $L^2(0, 1)$.

- La función $f : (0, 1) \to \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}, \forall x \in (0, 1)$ no es acotada y sin embargo pertenece a $L^2(0, 1)$.

Antes de continuar sería conveniente que el lector calibrase su capacidad para relacionar las diferentes clases de funciones que han aparecido hasta ahora. Para ello, el siguiente ejercicio puede ser recomendable.

EJERCICIO 2.

Razónese la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

1. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $f \in L^2(a, b)$.
2. Si $f : [a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua, $f \in L^2(a, b)$.
3. Si $f \in L^2(a, b)$, f es continua en $[a, b]$.
4. Si $f \in L^2(a, b)$, f es acotada en $[a, b]$.
5. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y acotada, $f \in L^2(a, b)$.
6. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos, $f \in L^2(a, b)$.
7. Si $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos y f es acotada en $[a, b]$, $f \in L^2(a, b)$.
8. Si $f \in L^2(a, b)$, el conjunto de puntos de $[a, b]$ donde f no es continua es numerable.

Solución: a)V; b)F; c)F; d)F; e)V; f)F; g)V; h)F.

Aquellos que hayan estudiado la teoría de integración de Lebesgue saben que $L^1(a,b)$ representa al conjunto de funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles para las que $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$ es finita (entendemos, igual que anteriormente, que dos funciones son iguales si lo son c.p.d.). La relación existente entre $L^1(a,b)$ y $L^2(a,b)$ se puede ver en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.

Demuéstrese que $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ de manera estricta.

Solución:

Sea $f \in L^2(a,b)$. Entonces, para cualquier $x \in [a,b]$ se tiene que $(|f(x)|-1)^2 \geq 0$, de donde deducimos que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(1+|f(x)|^2), \ \forall x \in [a,b]$$

Ahora bien, $|f|$ es una función medible en $[a,b]$ y la función $|f|$ está acotada por una función integrable (la función $\frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)$). Esto prueba que $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y por tanto $f \in L^1(a,b)$.

Para ver que la inclusión de $L^2(a,b)$ en $L^1(a,b)$ es estricta, utilizaremos el ejercicio 1. Para ello, tomemos por simplicidad $(a,b)=(0,1)$ y sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como

$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0)=0$. Sabemos que $f \notin L^2(0,1)$; sin embargo

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2-2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

lo que prueba que $f \in L^1(0,1)$.

El lector no tendrá (*o no deberá tener*) ninguna dificultad en considerar el caso de un intervalo general (a,b).

Nota

Observemos que en el ejercicio precedente hemos demostrado que si f es medible y existe, en el sentido de Lebesgue, $\displaystyle\int_a^b (f(x))^2\,dx$, también existe (en el sentido de Lebesgue) $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ (estrictamente hemos demostrado que existe $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx$, pero, en integración de Lebesgue, esto es equivalente a la existencia de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$). *¿Sería el lector capaz de dar un ejemplo de función f medible para la que exista*

$\int_a^b f^2(x)\, dx$ *y no exista* $\int_a^b f(x)\, dx$*, tomadas ambas en el sentido de Riemann?*

Hasta ahora hemos intentado familiarizarnos con el conjunto $L^2(a,b)$ describiendo fundamentalmente sus elementos. Ahora bien, gran parte de la utilidad del conjunto $L^2(a,b)$ viene dada por su estructura algebraica y topológica. La primera se describe en el ejercicio siguiente:

EJERCICIO 4.

Demuéstrese que $L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita, con las operaciones usuales de suma de funciones y producto de un número real por una función.

Solución: Las operaciones indicadas son:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ , \forall\ x \in [a,b],\ \forall f,g \in L^2(a,b)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))\ , \forall x \in [a,b],\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in L^2(a,b)$$

La única propiedad de espacio vectorial que no es obvia es precisamente la ley de composición interna para la suma. Probémosla. Para ello, sean $f,g \in L^2(a,b)$; entonces, como

$$(|f(x)|-|g(x)|)^2 \geq 0,\ \forall x \in [a,b]$$

se tiene que

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{1}{2}(|f(x)|^2+|g(x)|^2),\ \forall x \in [a,b]$$

lo que prueba que $|fg| \in L^1(a,b)$. También,

$$|f(x)+g(x)|^2 \leq |f(x)|^2+|g(x)|^2+2|f(x)g(x)|,\ \forall x \in [a,b]$$

de donde se obtiene que $f+g \in L^2(a,b)$.

Que la dimensión de $L^2(a,b)$ es infinita se prueba de manera

inmediata, usando el hecho de que las funciones polinomiales son elementos de $L^2(a,b)$. Esto muestra la existencia de subconjuntos de $L^2(a,b)$, linealmente independientes y con infinitos elementos (*¿sería el lector capaz de dar algún ejemplo de tal subconjunto?*)

El ejercicio anterior permite afirmar que si f y g son dos elementos de $L^2(a,b)$ entonces se puede definir el "producto escalar" de f y g , $<f,g>$, como

$$<f,g> = \int_a^b f(x)g(x)\, dx \tag{2.1}$$

El nombre de "producto escalar" se justifica por las propiedades que se indican a continuación.

EJERCICIO 5.

Pruébese que $< \cdot, \cdot >: L^2(a,b) \mathrm{x} L^2(a,b) \to \mathbb{R}\ ,\ (f,g) \to < f,g >$, satisface las siguientes propiedades:

1. $< f,g > = < g,f >\ ,\ \forall f,g \in L^2(a,b)$.

2. $< f+g,h > = < f,h > + < g,h >,\ \forall f,g,h \in L^2(a,b)$.

3. $< \alpha f,g > = \alpha < f,g >,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f,g \in L^2(a,b)$.

4. $< f,f > \geq 0,\ \forall f \in L^2(a,b)\ y\ < f,f > = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

Solución: 1), 2) y 3) son triviales. Para 4), téngase en cuenta que si $g \in L^1(a,b)$ verifica $\int_a^b |g(x)|\,dx = 0$, entonces debe cumplirse que $g(x) = 0\ c.p.d.\ en\ [a,b]$.

En el ejercicio siguiente se obtiene una propiedad muy útil del producto escalar $< \cdot, \cdot >$ (y en general, de cualquier producto escalar) conocida con el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz.

EJERCICIO 6.

Pruébese que

$$| < f,g > |^2 \leq < f,f > < g,g >,\ \forall f,g \in L^2(a,b) \tag{2.2}$$

(Sugerencia: $< f+\alpha g, f+\alpha g > \geq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f,g \in L^2(a,b)$).

Solución: Sean $f,g \in L^2(a,b)$. Consideremos la función polinómica $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $p(\alpha) = < f+\alpha g, f+\alpha g >$. Entonces

$$p(\alpha) = \alpha^2 < g,g > + 2\alpha < f,g > \ +\ < f,f >$$

Ahora bien, p es una función polinómica de segundo grado y
$p(\alpha) \geq 0,\ \forall \alpha \in \mathbb{R}$. Esto obliga a que

$$(2 < f,g >)^2 - 4 < g,g > < f,f > \leq 0$$

(*¿Por qué?*)

De donde obtenemos (2.2).

Las propiedades del ejercicio 5, junto con la desigualdad (2.2) nos permiten definir una norma en el espacio $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 7.

Pruébese que la aplicación $\|\cdot\|\ :\ L^2(a,b) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\|f\| = < f,f >^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x)\,dx \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

verifica las propiedades usuales de norma, es decir,

1. $\|f\| \geq 0,\ \forall f \in L^2(a,b)$ y $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.
2. $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|,\ \forall f, g \in L^2(a,b)$.
   (desigualdad Triangular)
3. $\|\alpha f\| = |\alpha|\|f\|\ ,\ \forall \alpha \in \mathbb{R},\ \forall f \in L^2(a,b)$.

Solución: a) y c) son triviales. Respecto de b), notemos que, por el ejercicio anterior,

$$\|f+g\|^2 =< f+g, f+g >=< f, f > +2 < f, g > + < g, g >\leq$$

$$\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2.$$

El lector conoce otros ejemplos de espacios normados cuya norma viene definida a partir de un producto escalar:

- El espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2},\ \forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$$

y el producto escalar $< \cdot, \cdot >$ definido por

$$< x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$\forall x = (x_1, \cdots, x_n),\ y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbf{R}^n$.

- El espacio l^2 formado por las sucesiones $\{x_n\}$ de números reales tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2},\ \forall x = \{x_n\} \in l^2$$

y el producto escalar $< \cdot, \cdot >$ definido por

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n,\ \forall x = \{x_n\},\ y = \{y_n\}\ \in l^2$$

Sabemos también que gran parte de las "buenas propiedades" que

cumplen estos espacios son debidas al hecho de que son espacios normados completos. Esta es la propiedad que a continuación probamos para $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 8. (Teorema de Riesz-Fischer)

Pruébese que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert real.

Sugerencia escalonada: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$,

1. Probar que existe una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbf{N}.$$

2. Expresando

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \cdots + (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)),$$

demostrar que $\{f_{n_k}\}$ es convergente c.p.d. a una función f .

3. Probar que $\{f_n\} \to f\ en\ L^2(a,b)$.

Solución: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$. Entonces

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}\ :\ m,n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon \tag{2.4}$$

En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ es posible elegir un natural n_k tal que si $m,n \geq n_k$, entonces $\|f_n - f_m\| < 2^{-k}$. Es claro que la sucesión

$\{n_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$ puede escogerse tal que $n_{k+1} > n_k,\ \forall k \in \mathbb{N}$. Tenemos así una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, cumpliendo que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\|\ <\ 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Nuestro próximo objetivo va a ser probar que f_{n_k} es convergente c.p.d. a una función $f \in L^2(a,b)$ y que $\{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b)$. Para probar que $\{f_{n_k}\}$ es convergente c.p.d., expresaremos $\{f_{n_k}\}$ como una serie cuyas sumas parciales van a ser precisamente f_{n_k}; probar la convergencia de $\{f_{n_k}\}$ será equivalente a probar la convergencia de la citada serie y para esto último utilizaremos (2.5). Así pues, sea

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) + \cdots + f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para probar la convergencia de $f_{n_k}(x)$, consideraremos la sucesión

$$g_{n_k}(x) = |f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \cdots + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\{g^2_{n_k}\}$ es una sucesión de funciones que es:

1. monótona creciente (pues g_{n_k} lo es)

2. $g^2_{n_k}\ \in\ L^1(a,b)\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}$ (pues $g_{n_k} \in L^2(a,b),\ \forall k \in \mathbb{N}$)

3. La sucesión de integrales $\left\{ \int_a^b g_{n_k}^2(x)\, dx \right\}$ es acotada,pues

$$\|g_{n_k}\|^2 \leq \left[\|f_{n_1}\| + \|f_{n_2} - f_{n_1}\| + \cdots + \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|\right]^2$$

$$\leq \left[\|f_{n_1}\| + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right]^2 \leq (\|f_{n_1}\| + 1)^2$$

Por el teorema de la convergencia monótona (aplicado a la sucesión $\{g_{n_k}^2,\ k \in \mathbb{N}\}$), la sucesión $\{g_{n_k}^2,\ k \in \mathbb{N}\}$ converge c.p.d. y como g_{n_k} es no negativa, la sucesión $\{g_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ converge c.p.d., a una función g , de donde deducimos que $\{f_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ también converge c.p.d. a una función que llamaremos f (téngase en cuenta que al ser la sucesión $\{g_{n_k},\ k \in \mathbf{N}\}$ convergente c.p.d., la serie $\sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ es convergente c.p.d., con lo que la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ es también convergente c.p.d. Es claro que $|f| \leq g$).

Sea ahora $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $m \geq n_0(\varepsilon)$ fijo. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que

$$\|f_m - f_{n_k}\|^2 = \int_a^b |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2\, dx \ \leq \varepsilon^2$$

Consideremos la sucesión de funciones $\{(f_m - f_{n_k})^2,\ k \in \mathbb{N}\}$. Tal sucesión lo es de funciones de $L^1(a,b)$ y además sabemos que

$(f_m(x) - f_{n_k}(x))^2$ converge c.p.d. a $(f_m(x) - f(x))^2$. También,

$$|f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2 \leq (|f_m(x)| + |g_{n_k}(x)|)^2 \leq (|f_m(x)| + |g(x)|)^2$$

Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (aplicado a la sucesión $\{(f_m - f_{n_k})^2,\ k \in \mathbb{N}\}$), tenemos que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_a^b |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2\, dx \ = \ \int_a^b |f_m(x) - f(x)|^2\, dx$$

de donde obtenemos que $f_m - f \in L^2(a,b)$ y que $\|f_m - f\| \leq \varepsilon$. Como $f = f_m - (f_m - f),\ f \in L^2(a,b)$ y $\{f_m\} \to f$ en $L^2(a,b)$.

Notas

1.- Las llamadas ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, i.e., ecuaciones integrales del tipo

$$\Phi(x) + \int_a^b K(x,y)\Phi(y)\, dy = f(x) \tag{2.6}$$

con las funciones Φ, f y K continuas en $[a,b]$, $[a,b]$ y $[a,b]\times[a,b]$ respectivamente, fueron estudiadas con detalle por $D.\ Hilbert$ $(1862-1943)$ a comienzos de este siglo.

$F.\ Riesz$ $(1880-1956)$ consideró también ecuaciones del tipo (2.6) para el caso en que Φ, f o K no son necesariamente continuas. El método que aplicó para el estudio de (2.6) le llevó a introducir en 1907 el conjunto de funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue, $L^2(a,b)$, y estudió (2.6) en el caso en que $\Phi,\ f\in L^2(a,b),\ K\in L^2((a,b)\text{x}(a,b))$.

En el mismo año, $E.\ Fischer$ $(1875-1959)$ introdujo el concepto de "convergencia en media": Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en $[a,b]$ se dice que converge en media si

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b (f_n(x)-f_m(x))^2\,dx=0 \tag{2.7}$$

(observemos que esto es lo que nosotros entendemos como sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$). Además Fischer probó el resultado del ejercicio anterior: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $L^2(a,b)$ que "converge en media", entonces existe una función $f\in L^2(a,b)$ tal que $\{f_n\}\to f\ en\ L^2(a,b)$ ([30]).

2.- Consideremos el espacio vectorial real C$[a,b]$ formado por todas las funciones continuas y reales, definidas en $[a,b]$. Si en C$[a,b]$ se considera la norma (2.3), es decir,

$$\|f\|=\left(\int_a^b f^2(x)\,dx\right)^{1/2},\ \forall f\in C[a,b]$$

es fácil demostrar que $(C[a,b],\ \|\cdot\|)$ es un espacio normado no completo. Precisamente su completación es $L^2(a,b)$. (ver Ejercicio n^o 9)

3.- En el ejercicio anterior hemos probado la siguiente propiedad:

"Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $L^2(a,b)\ y\ f\in L^2(a,b)$ es tal que $\{f_n\}\to f\ en\ L^2(a,b)$, entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, cumpliendo que $\{f_{n_k}\}\to f\ c.p.d.;\ i.e.,\ \{f_{n_k}(x)\}\to f(x)\ c.p.d.en[a,b]$". Esto sugiere algunas cuestiones tales como:

1. Si $\{f_n\}\to f\ en\ L^2(a,b)$, ¿ se podrá afirmar que $\{f_n\}\to f\ c.p.d.$?

2. Si $\{f_n\}\to f\ c.p.d.$, ¿ se tiene que $\{f_n\}\to f$ en $L^2(a,b)$?

La respuesta a estas preguntas, así como la relación entre la convergencia en $L^2(a,b)$ y otros tipos de convergencia que el lector está más acostumbrado a manejar (convergencia puntual, convergencia uniforme, etc.) la encontraremos en los ejercicios que siguen. Pero antes de continuar, debemos resaltar el resultado fundamental que hemos obtenido hasta ahora

$$\boxed{L^2(a,b)\text{ ES UN ESPACIO DE HILBERT REAL}}$$

Sigamos con un ejercicio para familiarizarnos con la convergencia en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 9.

Consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por

$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -1/n \\ nx, & -1/n \le x \le 1/n \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

Demuéstrese que $\{f_n\} \to f \; en \; L^2(-1,1)$ donde $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Solución: Es claro que f_n es continua en $[-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto $f_n \in L^2(-1,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte f es continua salvo en el punto x=0 y acotada y por lo tanto $f \in L^2(-1,1)$. También,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_{-1/n}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx +$$

$$+ \int_{0}^{1/n} |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx = \int_{-1/n}^{0} |nx+1|^2 \, dx + \int_{0}^{1/n} |nx-1|^2 \, dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{0} (n^2x^2 + 2nx + 1) \, dx + \int_{0}^{1/n} (n^2x^2 - 2nx + 1) \, dx =$$

$$= n^2 \frac{1}{3n^3} + 2n\frac{1}{2} \cdot \frac{-1}{n^2} + \frac{1}{n} + n^2 \frac{1}{3n^3} - 2n\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3n} \to 0 \; si \; n \to +\infty$$

Luego $\{f_n\} \to f \; en \; L^2(-1,1)$.

Notas y comentarios.

1.- Observemos que la sucesión $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(-1,1)$ y que cada f_n es continua. A raíz de este ejercicio es fácil ver que no existe ninguna función continua g en [-1,1] tal que $\{f_n\} \to g$ en $L^2(-1,1)$ (ver nota 2 del ejercicio n^o 8). *¿Se atrevería el lector a demostrarlo?*

2.- Es claro que $\{f_n\} \to h\ en\ L^2(-1,1)$, donde

$$h(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ a, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

y a es cualquier número real dado. ¿ Contradice esto el principio de unicidad del límite de una sucesión en espacios normados?

3.- En este ejercicio $f_n(x) \to f(x)\ c.p.d.$ (¡Pruébese esta afirmación!). Sin embargo, no siempre es así (véase el ejercicio que sigue).

EJERCICIO 10.

Considérese la sucesión de funciones de $L^2(0,1)$, $\{f_n\}$, definida de la manera siguiente: Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n = 2^{k-1} + j, k \in \mathbb{N}$,

$0 \le j < 2^{k-1}$, entonces $f_n(x) = 1\ si\ x \in \left[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}\right] y\ f_n(x) = 0$ si

$x \in [0,1] - \left[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}\right]$.

Pruébese que $\{f_n\} \to 0\ en\ L^2(0,1)$ y que, sin embargo, $\{f_n\}$ no converge a 0 c.p.d.

Solución: ¡No se asuste el lector al ver la ley que define $\{f_n\}$!. En realidad, si se preocupa un poco por obtener sus gráficas, verá que son funciones que siguen una ley muy sencilla.

Por lo tanto, si $n = 2^{k-1} + j,\ k \in \mathbb{N},\ 0 \le j < 2^{k-1}$, (notemos que k y j son únicos para cada n dado)

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2\, dx = \int_{\frac{j}{2^{k-1}}}^{\frac{j+1}{2^{k-1}}} 1\, dx = \frac{1}{2^{k-1}}$$

y como se cumple que $n \to +\infty \Leftrightarrow k \to +\infty$, $\lim\limits_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$. Luego $\{f_n\} \to 0\ en\ L^2(0,1)$.

Por otra parte, sea $x \in [0,1]$. Es claro que dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, es posible encontrar $n_1,\ n_2$ números naturales mayores que n tales que $f_{n_1}(x) = 0$, $f_{n_2}(x) = 1$. Esto prueba que $\{f_n(x)\}$ no es convergente para ningún $x \in [0,1]$ y en particular se tiene que $\{f_n\}$ no converge a 0 c.p.d.

Nota (y ejercicio incluido).

Observemos que en el ejercicio anterior hemos demostrado que, en general, la convergencia en $L^2(a,b)$ no implica la convergencia puntual. Sin embargo, en el ejercicio 8 se demostró que si $\{f_n\} \to f\ en\ L^2(a,b)$, existe una subsucesión de $\{f_n\}$, que converge casi por doquier a f : *¿sería el lector capaz de encontrar tal subsucesión en el ejercicio previo?*

EJERCICIO 11.

Consideremos la sucesión de funciones de $L^2(0,1)$, $\{f_n\}$, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ó } 1/n \leq x \leq 1 \\ n, & 0 < x < 1/n \end{cases}$$

Demuéstrese que $\{f_n\} \longrightarrow 0$ c.p.d. y que sin embargo $\{f_n\}$ no converge en $L^2(0,1)\}$.

Solución:

Sea $x \in (0,1]$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ $t.q.$ $\dfrac{1}{n_0} < x$; de aquí obtenemos que $f_n(x) = 0$ $\forall n \geq n_0$ y por lo tanto $\{f_n(x)\} \longrightarrow 0$.

Como $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, también $\{f_n(0)\} \longrightarrow 0$. Así pues $\{f_n(x)\} \longrightarrow 0$, $\forall x \in [0,1]$. Sin embargo

$\|f_n - 0\|^2 = \displaystyle\int_0^1 |f_n(x)|^2\,dx = \int_0^{1/n} n^2\,dx = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde deducimos que $\{f_n\}$ no converge en $L^2(0,1)$.

Nota (y otra vez ejercicio incluido).

En el ejercicio previo hemos probado que, en general, la convergencia c.p.d. no implica la convergencia en $L^2(a,b)$. Observemos también que $\{f_n^2\}$ es una sucesión de funciones de

$L^1(0,1)$ $t.q.$ $\{f_n^2\} \longrightarrow 0$ c.p.d. Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n^2(x)\,dx \not\longrightarrow \int_0^1 0\,dx = 0$$

¿Por qué no se puede aplicar el Teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue en este caso?

EJERCICIO 12.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^2(a,b)$ que converge uniformemente a una función f de $L^2(a,b)$. Pruébese que $\{f_n\} \longrightarrow f$ en $L^2(a,b)$.

Solución: Que $\{f_n\}$ converja uniformemente a f quiere decir que

$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ $\exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$: $\forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon, \forall x \in [a,b]$.

Sea entonces $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dado. Tomemos $n_0\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)$ y n un natural cualquiera, $n \geq n_0\left(\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)$. Entonces

$$\|f_n - f\| = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2\,dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \frac{\varepsilon^2}{b-a}\,dx\right)^{1/2} = \varepsilon$$

Podemos resumir lo realizado en los ejercicios n^o 9, 10, 11 y 12 con el gráfico siguiente:

$$
\begin{tikzcd}
 & \{f_n\} \to f \ en \ L^2(a,b) \arrow[dl, shift left, "/" marking] \arrow[dd, shift left, "/" marking] \\
\{f_n\} \to f \ uniformemente \ en \ [a,b] \arrow[ur, shift left] \arrow[dr, shift right] & \\
 & \{f_n\} \to f \ c.p.d. \arrow[ul, shift right, "/" marking] \arrow[uu, shift left, "/" marking]
\end{tikzcd}
$$

Hasta ahora nos hemos familiarizado con la estructura algebraico-topológica de $L^2(a,b)$, así como con el concepto de convergencia de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ de $L^2(a,b)$ hacia un elemento f de dicho espacio. Como resultado fundamental, destaquemos nuevamente el hecho de que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert real.

Otros espacios de Hilbert que ya hemos mencionado, como el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Esto facilita muchísimo su estudio, así como el de ciertas clases de funciones (por ejemplo, las funciones lineales u homomorfismos) definidas entre dichos espacios. La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿tendrá $L^2(a,b)$ una base? Esta pregunta lleva aparejada, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿cuál sería una definición "adecuada" de base en $L^2(a,b)$? ¿cuántas bases hay (si es que las hay) en $L^2(a,b)$? ¿qué ventajas tiene la utilización del concepto de base?, etc.

Trataremos de responder a las cuestiones anteriores en los ejercicios que siguen. Para ello, la noción de ortogonalidad será fundamental.

Definición.

Sea $\mathbf{A} \subset L^2(a,b)$. Diremos que $\mathbf{A}$ está formado por elementos ortogonales (o simplemente que $\mathbf{A}$ es ortogonal) si $< f, g >= 0 \ \forall f, g \in \mathbf{A}$ con $f \neq g$ y además $< f, f >\neq 0, \ \forall f \in \mathbf{A}$ (o sea que el producto escalar de dos elementos cualesquiera distintos de $\mathbf{A}$ es cero y que $\mathbf{A}$ no puede contener al elemento nulo de $L^2(a,b)$).

Definición.

Sea $\mathbf{A} \subset L^2(a,b)$. Diremos que $\mathbf{A}$ está formado por elementos ortonormales (o simplemente que $\mathbf{A}$ es ortonormal) si $< f, g >= 0, \ \ \forall f, g \in \mathbf{A}$ con $f \neq g$ y además $< f, f >= 1, \ \forall f \in \mathbf{A}$.

EJERCICIO 13.

Demostrar que los siguientes conjuntos de funciones son ortogonales en los espacios que se indican:

1.-$\left\{1, \ cos\dfrac{2\pi n(x-a)}{b-a}, \ \text{sen}\ \dfrac{2\pi n(x-a)}{b-a}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \ en \ L^2(a,b)$.

2.-$\left\{1, \ cos\dfrac{\pi n x}{l}, \ sen\dfrac{\pi n x}{l}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \ en \ L^2(-l,l)$.

3.-$\left\{\text{sen}\ \dfrac{n\pi x}{l}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \ en \ L^2(0,l)$.

4.-$\left\{cos\dfrac{n\pi x}{l}, \ n \in \mathbb{N}\right\} \ en \ L^2(0,l)$.

5.- $\left\{ \text{sen}\,\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l},\ n \in \mathbb{N} \right\}$ $en\ L^2(0,l)$.

Solución: Para hacer el ejercicio conviene recordar las siguientes fórmulas de trigonometría elemental, válidas $\forall\ x, y \in \mathbb{R}$:

$$\text{sen}(x)\cdot\text{sen}(y) = \frac{1}{2}[cos(x-y) - cos(x+y)]$$

$$cos(x)\cdot\text{sen}(y) = \frac{1}{2}[\text{sen}(y+x) + \text{sen}(y-x)]$$

$$cos(x)\cdot cos(y) = \frac{1}{2}[cos(x+y) + cos(x-y)]$$

1.-

1.

$$< 1, cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a} >= \int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{b-a}{2\pi n} sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= \frac{b-a}{2\pi n}[\text{sen}(2\pi n) - \text{sen}(0)] = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

2.

$$< 1,\ sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a} >= \int_a^b sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx =$$

$$= -\frac{b-a}{2\pi n} cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= -\frac{b-a}{2\pi n}[cos(2\pi n) - cos(0)] = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

3.

$$< cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ cos\frac{2\pi m(x-a)}{b-a} >=$$

$$= \int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a} cos\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\,dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left(cos\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a} + cos\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ \ sen\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b +$$

$$+ \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)} sen\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}[sen\ 2\pi(n+m) - \text{sen}(0)] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)}[sen\ 2\pi(n-m)-\mathrm{sen}(0)]=0$$

$\forall n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m.$

4.
$$< cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a} >=$$

$$=\int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(sen\frac{2\pi(m+n)(x-a)}{b-a}+sen\frac{2\pi(m-n)(x-a)}{b-a}\right)\ dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m+n)}cos\frac{2\pi(m+n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m-n)}cos\frac{2\pi(m-n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m+n)}[cos\ 2\pi(m+n)-cos(0)]-$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m-n)}[cos2\pi(m-n)-cos(0)]=0$$

$\forall n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m.$

Si n=m,
$$< cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a} >=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b sen\frac{2\pi(n+n)(x-a)}{b-a}\ dx=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{b-a}{4n\pi}cos\frac{2\pi(2n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{b-a}{4n\pi}[cos(4\pi n)-cos(0)]=0$$

$\forall n\in\mathbb{N}.$

5.
$$< sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a} >=$$

$$=\int_a^b sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\ dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(cos\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}-cos\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}\right)\ dx=$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)} sen \frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ sen \frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)}\ [sen\ 2\pi(n-m) - \text{sen}(0)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ [sen\ 2\pi(n+m) - \text{sen}(0)] = 0$$

$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$

2.-

1.
$$< 1, cos\frac{\pi n x}{l} >= \int_{-l}^{l} cos\frac{\pi n x}{l}\ dx = \frac{l}{\pi n} sen\frac{\pi n x}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{l}{\pi n}[\text{sen}(\pi n) - \text{sen}(\pi(-n))] = 0\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

2.
$$< 1, sen\frac{\pi n x}{l} >= \int_{-l}^{l} sen\frac{\pi n x}{l}\ dx = \frac{-l}{n\pi} cos\frac{\pi n x}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{-l}{n\pi}[cos(n\pi) - cos(n(-\pi))] = 0\ ,\ \forall n \in \mathbf{N}$$

3.
$$< cos\frac{\pi n x}{l}, cos\frac{\pi m x}{l} >= \int_{-l}^{l} cos\frac{\pi n x}{l} cos\frac{\pi m x}{l}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(cos\frac{\pi(n+m)x}{l} + cos\frac{\pi(n-m)x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)} sen\frac{\pi(n+m)x}{l}\Big]_{-l}^{l} +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)} sen\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)}[\text{sen}(\pi(n+m)) - \text{sen}(\pi(-n-m))] +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)}[\text{sen}(\pi(n-m)) - \text{sen}(\pi(-n+m))] = 0,$$

$\forall n, m \in \mathbb{N}\ ,\ n \neq m.$

4.
$$< cos\frac{\pi n x}{l}, sen\frac{\pi m x}{l} >= \int_{-l}^{l} cos\frac{\pi n x}{l} sen\frac{\pi m x}{l}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(sen\frac{\pi(m+n)x}{l} + sen\frac{\pi(m-n)x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{-1}{2}\frac{l}{\pi(m+n)}cos\frac{\pi(m+n)x}{l}\Big]_{-l}^{l} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(m-n)}cos\frac{\pi(m-n)x}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= -\frac{l}{2\pi(m+n)}[cos(\pi(m+n)) - cos(\pi(-m-n))] -$$

$$-\frac{l}{2\pi(m-n)}[cos(\pi(m-n)) - cos(\pi(-m+n))] = 0$$

$\forall m, n \in \mathbb{N},\ m \neq n.$

Si $m = n \in \mathbb{N}$,

$$< cos\frac{\pi nx}{l},\ sen\frac{\pi nx}{l} >= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l} sen\frac{\pi 2nx}{l}\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{l}{2\pi n}cos\frac{2\pi nx}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{-l}{4\pi n}[cos(2\pi n) - cos(-2\pi n)] = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

5.

$$< sen\frac{\pi nx}{l}, sen\frac{\pi mx}{l} >= \int_{-l}^{l} sen\frac{\pi nx}{l} sen\frac{\pi mx}{l}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_{-l}^{l}\left(cos\frac{\pi(n-m)x}{l} - cos\frac{\pi(n+m)x}{l}\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)}sen\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]_{-l}^{l} -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)}sen\frac{\pi(n+m)x}{l}\Big]_{-l}^{l} =$$

$$= \frac{l}{2\pi(n-m)}[\mathrm{sen}(\pi(n-m)) - \mathrm{sen}(\pi(m-n))] -$$

$$-\frac{l}{2\pi(n+m)}[\mathrm{sen}(\pi(n+m)) -$$

$$-\,\mathrm{sen}(\pi(-n-m))] = 0,\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$$

3.-

$$< sen\frac{n\pi x}{l}, sen\frac{m\pi x}{l} >= \int_0^l sen\frac{n\pi x}{l} sen\frac{m\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(cos\frac{\pi(n-m)x}{l} - cos\frac{\pi(n+m)x}{l} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)} sen\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]_0^l - \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)} sen\frac{\pi(n+m)x}{l}\Big]_0^l =$$

$$= \frac{l}{2\pi(n-m)}[\mathrm{sen}(\pi(n-m)) - \mathrm{sen}(0)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{l}{2\pi(n+m)}[\mathrm{sen}(\pi(n+m)) - \mathrm{sen}(0)] = 0\ ,\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$$

4.-

$$< cos\frac{n\pi x}{l}, cos\frac{m\pi x}{l} >= \int_0^l cos\frac{n\pi x}{l} cos\frac{m\pi x}{l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(cos\frac{\pi(n+m)x}{l} + cos\frac{\pi(n-m)x}{l} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n+m)} sen\frac{\pi(n+m)x}{l}\Big]_0^l + \frac{1}{2}\frac{l}{\pi(n-m)} sen\frac{\pi(n-m)x}{l}\Big]_0^l =$$

$$= \frac{l}{2\pi(n+m)}[\mathrm{sen}(\pi(n+m)) - \mathrm{sen}(0)] +$$

$$+\frac{l}{2\pi(n-m)}[\mathrm{sen}(\pi(n-m)) - \mathrm{sen}(0)] = 0\ ,\ \forall n, m \in \mathbb{N}\ ,\ n \neq m.$$

5.-

$$< sen\frac{(2n-1)\pi x}{2l}, sen\frac{(2m-1)\pi x}{2l} >=$$

$$= \int_0^l sen\frac{(2n-1)\pi x}{2l} sen\frac{(2m-1)\pi x}{2l}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^l \left(cos\frac{(2n-2m)\pi x}{2l} - cos\frac{(2n+2m-2)\pi x}{2l} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{2l}{2(n-m)\pi} sen\frac{(n-m)\pi x}{l}\Big]_0^l -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{2l}{2(n+m-1)\pi} sen\frac{(n+m-1)\pi x}{l}\Big]_0^l =$$

$$= \frac{l}{2(n-m)\pi}[\mathrm{sen}((n-m)\pi) - 0] -$$

$$-\frac{l}{(n+m-1)\pi}[\mathrm{sen}(n+m-1)\pi) - \mathrm{sen}(0)] = 0\ ,\ \forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$$

Es claro que si un subconjunto **A** de $L^2(a,b)$ es ortogonal, entonces cualquier subconjunto suyo no vacío es también ortogonal y que si cada elemento de **A** se multiplica por un escalar no nulo, el conjunto resultante es también ortogonal; en particular, si cada elemento de un conjunto ortogonal se divide por su norma, se tiene un conjunto ortonormal.

El siguiente ejercicio será de utilidad en la motivación del concepto de base en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 14.

Sea $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Demostrar que si $\{\lambda_n\}$ es una sucesión de números reales tales que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente a $f \in L^2(a,b)$ entonces $\lambda_n =< f, f_n >,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

Solución: Probemos en primer lugar que $\lambda_n =< f, f_n >, \forall n \in \mathbb{N}$.

$< f, f_n >=< \displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >= \lim_{k\to\infty} < \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n > = \lim_{k\to\infty} \lambda_n = \lambda_n$.

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n\|^2 =< f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n,\ f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n >=$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{k} \lambda_n < f,\ f_n > + \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2$$

Como $\displaystyle\lim_{k\to+\infty} \|f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n\| = 0,$

$$\|f\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

Notas.

1.- En el ejercicio anterior se ha afirmado que

$< \displaystyle\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >= \lim_{k\to\infty} < \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >$. Esto es fácil de probar pues si $\{h_k\}$ es una sucesión de elementos de $L^2(a,b)$ que converge a $h \in L^2(a,b)$, entonces $\lim\limits_{k\to\infty} < h_k, g >=< h, g >, \forall g \in L^2(a,b)$. Para ver esto, pensemos que

$| < h_k, g > - < h, g > | = | < h_k - h, g > | \leq \|h_k - h\| \; \|g\|$

Una vez que tenemos cierta familiaridad con la noción de subconjunto ortogonal de $L^2(a,b)$, podemos plantearnos nuevamente: ¿cuál será una definición "adecuada" de base en $L^2(a,b)$?

Pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \cdots$, etc. En $\mathbb{R}$, una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}$); en $\mathbb{R}^2$, una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos, y en

ggeneral, en $\mathbf{R}^n$, una base está formada por un subconjunto ortogonal de n elementos (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de $\mathbf{R}^n$ es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente $\{f_1, \cdots, f_m\}$ de $\mathbb{R}^n$ otro subconjunto ortonormal que engendra el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente: "Un subconjunto **A** de $L^2(a,b)$ que sea ortogonal se dirá que es una base de $L^2(a,b)$ si todo elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita (al ser **A** ortogonal, **A** es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de **A**". Rápidamente vamos a ver que no existe tal subconjunto.

EJERCICIO 15.

Demostrar que no existe ningún subconjunto **A** de $L^2(a,b)$ que sea ortogonal y que cumpla la siguiente propiedad: "Cualquier elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita de elementos de **A**".

Solución: Obviamente podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal.

Si $\mathbf{A} \subset L^2(a,b)$ es un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior, **A** debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real $L^2(a,b)$ sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues **A** debe contener algún subconjunto numerable (veremos posteriormente que cualquier subconjunto ortogonal de $L^2(a,b)$ debe ser numerable); Sea $\mathbf{B} \subset \mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ numerable. Entonces $\mathbf{B} = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos la sucesión $\{f_n\}$ definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}$$

Si $n > m$,

$$\|f_n - f_m\|^2 = \|\frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}\|^2 =$$

$$=< \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n}, \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} >=$$

$$= \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{2^{2m+4}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}$$

y como la sucesión $\left\{ \sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{2n}}, k \in \mathbb{N} \right\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$,

$\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^2(a,b)$. Por ser $L^2(a,b)$ completo, $\{f_n\} \to f$ donde $f \in L^2(a,b)$; además,

$$f = \frac{b_1}{2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

Por otra parte, f debería ser una combinación lineal finita de elementos de $\mathbf{A}$: es decir, existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbf{A}$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$$

De donde se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} = 0,$$

que no es posible utilizando el ejercicio 14. (¿por qué?)

Creo que los ejercicios 14 y 15 “justifican"la siguiente definición:

Definición.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Diremos que tal subconjunto es una base si cualquier elemento f de $L^2(a,b)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n \tag{2.8}$$

(es decir $f = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n \right)$ $en\ L^2(a,b)$)

La anterior definición motiva de manera inmediata una serie de cuestiones: ¿existen bases de $L^2(a,b)$? Si la respuesta es afirmativa (que evidentemente lo será porque si no, no habríamos dado la anterior definición), ¿cuántas bases hay en $L^2(a,b)$? ¿cómo se pueden construir bases de $L^2(a,b)$? ¿qué utilidades tiene la utilización de la noción de base en $L^2(a,b)$? etc.

La primera pregunta que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en $L^2(a,b)$. En este sentido, es muy corriente en Matemáticas, con objeto de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en $L^2(a,b)$), dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia, sino para poder utilizar las diversas caracterizaciones, según nos exija la situación concreta que se plantee.

EJERCICIO 16.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Demostrar que son equivalentes:

1. $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $L^2(a,b)$.

2. Para cualquier f de $L^2(a,b)$ se cumple la llamada igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |< f, f_n >|^2$$

3. El único elemento de $L^2(a,b)$ ortogonal al conjunto $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es el elemento cero (es decir si $f \in L^2(a,b)$ satisface que $< f, f_n >= 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f = 0$).

Sugerencia: Probar que $a) \Rightarrow b),\ b) \Rightarrow c),\ c) \Rightarrow a)$. Para $c) \Rightarrow a)$ pruébese en primer lugar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$ es convergente (probando que es de Cauchy) a un elemento g de $L^2(a,b)$; después, demuéstrese que $< g, f_n >=< f, f_n >$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución: $a) \Rightarrow b)$: Es el ejercicio 14.

$b) \Rightarrow c)$: Si $f \in L^2(a,b)$ satisface que $< f, f_n >= 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\|f\|^2 = 0$, es decir, $f = 0$.

$c) \Rightarrow a)$: Demostremos en primer lugar que dado $f \in L^2(a,b)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$ es convergente: o lo que es lo mismo, que la sucesión de sumas parciales $\{S_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es convergente donde $S_k = \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > \ f_n$.

Ahora bien, como $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto un espacio normado completo) bastará con probar que $\{S_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy; para ello, si $m, n \in \mathbb{N},\ m > n$, se tiene que

$$\|S_m - S_n\|^2 =< S_m - S_n,\ S_m - S_n >=$$

$$=< \sum_{k=n+1}^{m} < f, f_k > f_k,\ \sum_{j=n+1}^{m} < f, f_j > f_j >=$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} |< f, f_k >|^2$$

Recalquemos la igualdad que hemos obtenido, porque será utilizada no sólo en este ejercicio sino también posteriormente:

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} |< f, f_k >|^2 \tag{2.9}$$

La parte derecha de (2.9) es en realidad $|H_m - H_n|$, donde $\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} |< f, f_k >|^2 \tag{2.10}$$

Por otra parte, se cumple que

$$0 \leq \left\| f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n \right\|^2 =$$

$$=< f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n,\ f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n >=$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{k} |< f, f_n >|^2 + \sum_{n=1}^{k} |< f, f_n >|^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |< f, f_n >|^2$$

Lo que prueba que

$$H_k = \sum_{n=1}^{k} |< f, f_n >|^2 \leq \|f\|^2\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Así pues, la serie (2.10) tiene sumas parciales acotadas. Al ser una serie de términos no negativos, esto implica que (2.10) es convergente; de aquí se obtiene que la sucesión $\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy, que junto con (2.9) prueba que la sucesión $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ es también de Cauchy.

Ya sabemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n >\ f_n \tag{2.11}$$

es convergente. Queda por probar que lo es a f. Para ello, sea $g \in L^2(a,b)$ tal que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$$

Entonces, por el ejercicio 14, si $n \in \mathbb{N}$,

$$< g, f_n >=< f, f_n >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $< g - f, f_n >= 0, \ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí obtenemos, usando la hipótesis (c), que $g = f$.

Notas y comentarios.

1.- En la solución del ejercicio anterior se han probado algunos hechos que conviene recalcar: si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$ (no necesariamente una base) entonces:

1. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2 \leq \|f\|^2 \ , \ \forall f \in L^2(a,b) \tag{2.12}$$

((2.12) se llama desigualdad de Parseval).

2. La serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$ es convergente (no necesariamente a f).

3. Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales dados, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ es convergente si y solamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ es convergente. De hecho, si $\mathbf{S}_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n \ f_n, \ \forall k \in \mathbb{N}$ y si $m, n \in \mathbb{N}, \ m > n$, entonces

$$\|\mathbf{S}_m - \mathbf{S}_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k^2.$$

2.- La anterior definición de base es válida para cualquier espacio de Hilbert real de dimensión infinita y separable, así como las equivalencias probadas en el ejercicio anterior (véase [6]).

3.- En $\mathbb{R}^n$, un conjunto formado por n vectores ortonormales forma una base. Si

$\{v_1, \cdots, v_n\}$ es tal conjunto, entonces todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ se expresa de la forma

$$v = \sum_{k=1}^{n} < v, v_k > v_k$$

(obsérvese la analogía con (2.8)).

Además se cumple que

$$\|v\|_{\mathbb{R}^n}^2 = \sum_{k=1}^{n} | < v, v_k > |^2$$

(Igualdad de Parseval)

y si $v \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los v_i, $1 \leq i \leq n$, entonces v debe ser el vector cero (apartado (c) del ejercicio anterior).

Obsérvese pues, las analogías existentes entre los espacios de Hilbert $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Es claro que hay también grandes diferencias (las que existen entre un espacio de Hilbert real y separable de dimensión infinita y un espacio de Hilbert real de dimensión finita; véase, por ejemplo, el ejercicio 15), pero en Matemáticas es fundamental ir reconociendo las analogías y las diferencias entre los nuevos objetos y los que son "familiares" al lector para poder avanzar en el conocimiento de aquellos.

Antes de probar la existencia de bases en $L^2(a,b)$ probemos otro resultado que pone de manifiesto más analogías existentes entre los espacios $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Sabemos que si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y si $v, w \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v = \sum_{k=1}^{n} < v, v_k > v_k$, $w = \sum_{k=1}^{n} < w, v_k > v_k$, entonces el producto escalar de v y w, $< v, w >$ viene dado por

$$< v, w >= \sum_{k=1}^{n} < v, v_k > < w, v_k >$$

El resultado análogo en $L^2(a,b)$ es el siguiente.

EJERCICIO 17.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ una base de $L^2(a,b)$. Pruébese que si f y g son elementos arbitrarios de $L^2(a,b)$, entonces:

$$< f, g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > < g, f_n > \tag{2.13}$$

Solución: Sabemos que $f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$, $g = \sum_{n=1}^{\infty} < g, f_n > f_n$. Sean $\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ las sucesiones de las sumas parciales respectivas de las series anteriores; es decir,

$$H_k = \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n, \; M_k = \sum_{n=1}^{k} < g, f_n > f_n \; , \; \forall k \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$| < f, g > - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n >< g, f_n > | = | < f, g > - < H_k, M_k > | =$$

$$= | < f, g > - < f, M_k > + < f, M_k > - < H_k, M_k > | \leq$$

$$\leq | < f, g - M_k > | + | < f - H_k, M_k > | \leq$$

$$\leq \|f\| \|g - M_k\| + \|f - H_k\| \|M_k\|$$

Como $\lim_{k\to\infty} H_k = f$ y $\lim_{k\to\infty} M_k = g$, se tiene que
$\lim_{k\to\infty} \|g - M_k\| = \lim_{k\to\infty} \|f - H_k\| = 0$ y como la sucesión $\{\|M_k\|, k \in \mathbb{N}\}$ es acotada, deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} | < f, g > - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > < g, f_n > | = 0$$

lo que prueba (2.13).

Vamos ya a demostrar la existencia de bases en $L^2(a, b)$. Ello se hará para una base muy especial que se utilizará en el capítulo siguiente en los desarrollos en serie de Fourier. Como uno de los objetivos de estas notas es que sean útiles para el mayor número de lectores posibles, presentamos la demostración dada por Lebesgue que, aunque ingeniosa, utiliza hechos elementales.

El ejercicio que sigue muestra una base del espacio $L^2(-\pi, \pi)$. Será inmediato, a partir de un cambio de variable conveniente, la construcción de una base en $L^2(a, b)$ cualquiera.

EJERCICIO 18.

Demostrar que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx) \; , \; \frac{1}{\sqrt{\pi}} \operatorname{sen}(nx) \; , \; n \in \mathbb{N} \right\} \tag{2.14}$$

es una base de $L^2(-\pi, \pi)$.

Sugerencia (más que una sugerencia es un plan de ataque para resolver el ejercicio): Utilícese la caracterización de base dada en el apartado c) del ejercicio 16. Para ello hay que demostrar que si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ es ortogonal al conjunto (2.14), entonces $f = 0$

(en $L^2(a,b)$). Es conveniente hacer esto en dos etapas:

1. f continua en $[-\pi,\pi]$. Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y ortogonal al conjunto (2.14), f debe ser ortogonal a cualquier polinomio trigonométrico. Si $f \not\equiv 0\ en\ [-\pi,\pi]$, debe existir $x_0 \in (-\pi,\pi)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \geq \varepsilon$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi)$. Demuéstrese entonces que para m suficientemente grande f no es ortogonal al polinomio trigonométrico

$$g_m(x) \equiv\ (1 + cos(x-x_0) - cos(\delta))^m$$

realizando para ello un estudio detallado de g_m en los intervalos definidos por las desigualdades $|x-x_0| \leq \delta$, $|x-x_0| \leq \delta/2$, $|x-x_0| > \delta$.

2. Si $f \in L^2(-\pi,\pi)$, considérese la siguiente función $h : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}$, $g(x) \equiv \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$,
$a_0 =< g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >$.

Solución: Sabemos que el conjunto (2.14) es ortogonal (véase el apartado 2 del ejercicio 13); es trivial que la norma de cada elemento del conjunto dado es 1 y por lo tanto dicho conjunto es ortonormal.

Para ver que es base, utilizaremos el apartado c) del ejercicio 16. Sea pues $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ortogonal al conjunto (2.14). Entonces:

$$< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= 0,\ < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx) >= 0,$$
$$< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}(nx) >= 0,\ \forall n \in \mathbb{N} \tag{2.15}$$

Debemos demostrar que $f(x) = 0\ c.p.d.\ en\ [-\pi,\pi]$. Para ello consideramos dos etapas:

1. f continua en $[-\pi,\pi]$.

2. $f \in L^2(-\pi,\pi)$ arbitraria.

Concentrémonos en el caso a). Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y

$f \neq 0\ en\ L^2(-\pi,\pi)$ debe existir $x_0 \in (-\pi,\pi)$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y por la continuidad de f existen números reales y positivos $\varepsilon\ y\ \delta$ tales que

$$|f(x)| \geq \varepsilon\ ,\ \forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi) \tag{2.16}$$

Por otra parte, de (2.15) se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{sen}(nx)\,dx = 0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(f(x) \left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k\,\mathrm{sen}(kx) \right) \right) dx = 0 \tag{2.17}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier elección de números reales

$a_k\ (0 \leq k \leq n)$, $b_k\ (1 \leq k \leq n)$.

Consideremos ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g_m(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta))^m$

g_m verifica las siguientes propiedades:

(P1) g_m es una combinación lineal finita de funciones del conjunto (2.14). En efecto, probémoslo por inducción sobre m:

Para $m = 1$,

$$g_1(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta)) =$$

$$= 1 - cos(\delta) + cos(x_0)cos(x) + \mathrm{sen}(x_0)\,\mathrm{sen}(x)$$

Sea la afirmación válida para m=p, es decir,

$$g_p(x) = \sum_{k=0}^{p} (a_k cos(kx) + b_k\,\mathrm{sen}(kx))$$

Entonces

$$g_{p+1}(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta))^{p+1} = g_p(x)g_1(x)$$

y usando las fórmulas del ejercicio 13, se prueba que

$$g_{p+1}(x) = \sum_{k=0}^{p+1} (a_{k'} cos(kx) + b_{k'}\,\mathrm{sen}(kx))$$

para ciertos números reales $a_{k'}\ (0 \leq k' \leq p+1)$, $\ b_{k'}\ (1 \leq k' \leq p+1)$.

(P2) $\forall x \in (-\pi, \pi) / |x - x_0| \leq \delta$, se cumple

$$|g_m(x)| \geq 1 \tag{2.18}$$

Esto es trivial pues si $|x - x_0| \leq \delta$ $(\delta < \pi/2)$, entonces

$cos(x - x_0) \geq cos(\delta)$.

(P3) $\forall x \in (-\pi,\pi)/\ |x-x_0| \leq \delta/2$, se tiene

$$|g_m(x)| \geq (1+cos(\frac{\delta}{2}) - cos(\delta))^m \tag{2.19}$$

También trivial pues si $|x-x_0| \leq \delta/2,\ cos(x-x_0) \geq cos(\frac{\delta}{2})$
(P4) $\forall x \in (-\pi,\pi)/|x-x_0| > \delta$, se satisface

$$|g_m(x)| \leq 1 \tag{2.20}$$

En efecto, si $x \in (-\pi,\pi)$ es tal que $|x-x_0| > \delta$, entonces

$$x-x_0 \in (-2\pi,2\pi),\ x-x_0 \notin (-2\pi,-2\pi+\delta) \cup (-\delta,\delta) \cup (2\pi-\delta,2\pi) \tag{2.21}$$

Puesto que $x < \pi,\ x_0-\delta > -\pi$ implican $x < \pi,\ -x_0 < \pi-\delta$, se tiene que $x-x_0 < 2\pi-\delta$.

Análogamente $x > -\pi,\ x_0+\delta < \pi$ implican $x > -\pi\ \ -x_0 > -\pi+\delta$, de donde deducimos que $x-x_0 > -2\pi+\delta$

Análogamente,

$$|x-x_0| > \delta \Rightarrow x-x_0 \notin (-\delta,\delta)$$

Así se cumple (2.21).

Pero (2.21) implica que $cos(x-x_0) \leq cos(\delta)$. Luego
$-2 \leq cos(x-x_0) - cos(\delta) \leq 0$, o lo que es lo mismo

$$-1 \leq 1+cos(x-x_0) - cos(\delta) \leq 1,$$

es decir $|g_m(x)| \leq 1$ que es (2.20).

Ahora, de (2.17) y de (P1) deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx = 0\ ,\ \forall m \in \mathbb{N} \tag{2.22}$$

Pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx = \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)g_m(x)\,dx +$$
$$+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx$$

y además,

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)\|g_m(x)|\,dx,$$

puesto que las funciones f y g_m tienen signo constante (no se anulan) en $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ (ver (2.16) y (2.18))

Luego, por (P2) y (P3),

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| =$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)\|g_m(x)|\,dx \ \geq \ \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} |f(x)\|g_m(x)|\,dx \ \geq$$

$$\geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} \varepsilon\,(1+cos(\frac{\delta}{2})-cos(\delta))^{m}\,dx \ = \ \delta\varepsilon(1+cos(\frac{\delta}{2})-cos(\delta))^{m}$$

Así pues,

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| \ \rightarrow\ +\infty\ si\ m \rightarrow\ +\infty \tag{2.23}$$

Por otra parte, por (P4)

$$\left|\int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| \ \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)\|g_m(x)|\,dx \ \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{2.24}$$

y

$$\left|\int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx\right| \ \leq$$

$$\leq \int_{x_0+\delta}^{\pi} |f(x)\|g_m(x)|\,dx \ \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{2.25}$$

Es claro, por último, que (2.23), (2.24) y (2.25) contradicen (2.22).

Por lo tanto, si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y satisface (2.15), $f\ \equiv 0\ en\ [-\pi,\pi]$.

Consideremos ahora la etapa b), es decir, $f\ \in L^2(-\pi,\pi)$ satisfaciendo (2.15).

Sea $g:[-\pi,\pi]\rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$. Como $f\ \in L^2(-\pi,\pi)\subset L^1(-\pi,\pi)$, g es absolutamente continua (y por tanto continua) en $[-\pi,\pi]$. Definamos también $h:[-\pi,\pi]\rightarrow \mathbf{R}$ por

$$h(x) = g(x) - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}\ ,\ a_0 =< g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > .$$

La función h es una función continua en $[-\pi,\pi]$ que satisface

$h'(x) = g'(x) = f(x)\ c.p.d.\ en\ [-\pi,\pi]$. Además

$$< h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >=< g - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >=< g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > -a_0 < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >=$$

$$= a_0 - a_0 = 0$$

$$< h, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} h(x) cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ h(x) \frac{\text{sen}(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\text{sen}(nx)}{n} h'(x)\, dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi} n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, \text{sen}(nx)\, dx = 0,$$

$$< h, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\, \text{sen}(nx) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)\, \text{sen}(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -h(x) \frac{cos(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(nx)}{n} h'(x)\, dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [-h(\pi) cos(n\pi) + h(-\pi) cos(n(-\pi))] +$$

$$+ \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx \right] = 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por el apartado a), $h \equiv 0\ en\ [-\pi,\pi]$, lo que implica que

$f(x) = 0\ c.p.d.\ en[-\pi,\pi]$.

Este ejercicio ha sido duro de resolver, pero merecía la pena hacerlo con detalle. Ánimo, pues el resto del capítulo es "más relajante".

Es inmediato ahora encontrar una base en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 19.

Demostrar que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{b-a}}, \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} cos\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a} \right), \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} sen\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a} \right), n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base de $L^2(a,b)$.

Sugerencia: La aplicación $y \to \dfrac{b-a}{2\pi} y + \dfrac{a+b}{2}$ es una biyección del intervalo $[-\pi,\pi]$ en el intervalo $[a,b]$ (o lo que es lo mismo, la aplicación $x \to \dfrac{\pi(2x-a-b)}{b-a}$ es una biyección del intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$).

Solución: Teniendo en cuenta que

$$cos\left(n\pi \frac{2x-a-b}{b-a} \right) = cos\left(n\pi \frac{2x-2a+a-b}{b-a} \right) =$$

$$= cos\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} - n\pi\right) = (-1)^n cos\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} \ , \ \forall n \in \mathbf{N}$$

y que

$$\text{sen}\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right) = \text{sen}\left(n\pi\frac{2x-2a+a-b}{b-a}\right) =$$

$$= \text{sen}\left(\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} - n\pi\right) = (-1)^n \text{ sen}\frac{2n\pi(x-a)}{b-a} \ , \ \forall n \in \mathbf{N}$$

y el apartado 1) del ejercicio 13, el conjunto dado es ortogonal.

Por otra parte,

$$\left\|\frac{1}{\sqrt{b-a}}\right\|^2 = \int_a^b \frac{1}{b-a}\, dx = 1,$$

$$\left\|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} cos\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right\|^2 =$$

$$= \int_a^b \frac{2}{b-a} cos^2\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\, dx =$$

$$= \int_a^b \frac{2}{b-a}\frac{1+cos\left(2n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right)}{2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b dx + \frac{1}{b-a}\int_a^b cos\frac{2n\pi(2x-a-b)}{b-a}\, dx =$$

$$= 1 + \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{2n\pi 2}\ sen\frac{2n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right]_a^b = 1$$

Análogamente

$$\left\|\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}} \text{ sen}\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right)\right\|^2 = 1 \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que prueba que cada elemento del conjunto dado tiene norma 1. Esto implica que dicho conjunto es ortonormal.

Sea ahora $g \in L^2(a,b)$, ortogonal al conjunto dado. Definamos la función $f \in L^2(-\pi,\pi)$ mediante

$$f(y) = g\left(\frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2}\right)$$

Entonces $< \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} f(y)\, dy.$

Realizando el cambio de variable

$$\frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2} = x \ \ \left(y = \frac{\pi(2x-a-b)}{b-a}\right)$$

$$< \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ f >= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(x) \frac{2\pi}{b-a}\ dx =$$
$$= \frac{\sqrt{2\pi}}{b-a} \int_a^b g(x)\ dx = 0.$$

También,

$$< \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(ny),\ f(y) >= \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(ny)\ f(y)\ dy =$$

$$= \int_a^b \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos \frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\ g(x) \frac{2\pi}{b-a}\ dx = 0$$

Análogamente, $< \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{sen}(ny),\ f(y) >= 0,\ \forall n \in \mathbf{N}$.

Esto prueba que $f \in L^2(-\pi,\pi)$ es ortogonal al conjunto dado en el ejercicio 18. Por lo tanto $f = 0$ en $L^2(-\pi,\pi)$, lo que implica que $g = 0\ en\ L^2(a,b)$.

Notas y comentarios.

1.- El hecho de que el conjunto dado en el ejercicio 19 sea una base de $L^2(a,b)$ tiene muchas e importantes consecuencias. Restrinjámonos por comodidad de notación, al caso en que $(a,b) = (-\pi,\pi)$. Entonces, por definición de base, se tendrá que para cualquier función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, f se expresa de la forma

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)) + b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{sen}(n(\cdot)) \right) \tag{2.26}$$

donde $a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ dx$

$$a_n =< f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)) >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx)\ dx$$
$$b_n =< f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{sen}(n(\cdot)) >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{sen}(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

y se cumple la igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\ dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2)\ ,\ \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$$

Hagamos hincapié en la expresión (2.26). (2.26) significa que

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(k(\cdot)) + b_k \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \mathrm{sen}(k(\cdot)) \right)$$

en $L^2(-\pi,\pi)$. Es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\left\| f - a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(k(\cdot)) + b_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}(k(\cdot))\right)\right)\right\| = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\;dx = 0 \tag{2.27}$$

donde

$$S_n(x) = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(kx) + b_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}(kx))$$

Entonces, ¿podremos escribir la siguiente relación?

$$f(x) = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx) + b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\mathrm{sen}(nx)\right), \tag{2.28}$$

c.p.d. en $[-\pi,\pi]$

La mayoría de los lectores pensarán: ¿qué diferencia existe entre (2.26) y (2.28)? Pues sí que la hay; (2.26) significa que la serie de la parte derecha de la igualdad converge, con la norma de $L^2(-\pi,\pi)$, a f (es decir (2.27)), mientras que (2.28) significa convergencia puntual de la citada serie (c.p.d.) a la función f y es conocido que convergencia en $L^2(-\pi,\pi)$ no implica necesariamente convergencia puntual (c.p.d.) (ver Ejercicio 10).

No parece, con los conocimientos que tenemos hasta ahora, que para funciones arbitrarias de $L^2(-\pi,\pi)$ pueda afirmase (2.28). No obstante, este hecho, cuya prueba se escapa de los límites de este texto, ha sido probado por Carleson ([11], [12]). Desde nuestro punto de vista, sería deseable conocer tipos de funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ para las que (2.28) se cumpla, con vista a las aplicaciones que se harán posteriormente.

Este tipo de cuestiones, así como otras relacionadas (¿para qué tipos de funciones $f \in L^2(-\pi,\pi)$ se cumple (2.28) de manera uniforme en $[-\pi,\pi]$? ¿qué relación hay entre la respuesta a la pregunta anterior y la regularidad de la función f? etc.,) se abordarán en el capítulo siguiente, donde mostraremos diversas aplicaciones del desarrollo (2.26).

Veamos ahora algunas consecuencias inmediatas que, sobre el espacio $L^2(a,b)$, tiene el resultado del ejercicio 19.

EJERCICIO 20.

Demostrar que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable.

Solución: Sea $\mathbf{A} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto dado en el ejercicio 19. El conjunto $\mathbf{H}$ formado por todas las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales de elementos de $\mathbf{A}$ es numerable (*¡Pruebe esto el lector!*). Veamos que $\mathbf{H}$ es denso en $L^2(a,b)$. Para ello, sean $f \in L^2(a,b)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrarios.

Como $f = \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} < f, f_k > f_k \right)$, existe un natural n_0, tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.29}$$

Ahora bien, para cada $k,\ 1 \le k \le n_0,\ < f, f_k >$ es un número real y por tanto existe $\alpha_k \in \mathbb{Q},\ 1 \le k \le n_0$, tal que
$|\alpha_k - < f, f_k > | < \dfrac{\varepsilon}{2n_0}\ \ \forall k,\ 1 \le k \le n_0$. Por tanto

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \right\| \le \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \|(< f, f_k > - \alpha_k) f_k\| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n_0} n_0 = \varepsilon$$

Como $\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \in \mathbf{H}$, el anterior razonamiento prueba que $\mathbf{H}$ es denso en $L^2(a,b)$.

Nota.

El espacio de Hilbert real $\mathbb{R}^n$ es también separable (¿quién es, en este caso, el subconjunto numerable y denso contenido en $\mathbb{R}^n$?). Esto añade otra analogía entre $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Como no quiero que se interpreten mis comentarios sobre esto en el sentido de que $L^2(a,b)$ y $\mathbf{R}^n$ "se parecen mucho" (*sólo quiero que el lector saque la conclusión de que se parecen "lo suficiente"*), vamos a poner de manifiesto otra diferencia fundamental entre ambos espacios, además de la ya citada en el ejercicio 15; nos referimos al conocido teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma lo siguiente:

"Si $\mathbf{S} \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y contiene infinitos puntos, entonces la acumulación de $\mathbf{S}$ es no vacía" ([4]).

Este teorema, fundamental para probar muchos resultados para funciones definidas entre espacios euclídeos de dimensión finita, no es cierto en $L^2(a,b)$ (y en general, en cualquier espacio normado de dimensión infinita).

EJERCICIO 21.

Demuéstrese que la afirmación

"Si $\mathbf{S} \subset L^2(a,b)$ es acotado y contiene infinitos elementos, entonces la acumulación de $\mathbf{S}$ es no vacía"

no es cierta .

Sugerencia: Considérese el conjunto del ejercicio 19.

Solución: Sea $\mathbf{A} = \{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto del ejercicio 19. $\mathbf{A}$ es acotado (pues $\|f_n\| = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}$) y contiene infinitos elementos.

Sin embargo la acumulación de $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}'$, es vacía. De hecho, si $f \in \mathbf{A}'$, debe existir una subsucesión $\{f_{n_k}\}$ de $\{f_n\}$, de elementos distintos, tal que $\{f_{n_k}\} \to f$. Pero como $\|f_n - f_m\| = \sqrt{2}, \forall n, m \in \mathbb{N}, n \neq m$, $\mathbf{A}$ no puede contener ninguna subsucesión convergente.

Lo anterior indica que debemos ser cautos a la hora de establecer paralelismos entre resultados algebraicos y topológicos de los espacio $\mathbb{R}^n$ *y* $L^2(a,b)$; de hecho, existen "más diferencias notables" que semejanzas entre ambos espacios (marcados por el paso de la dimensión finita a infinita). De todas maneras, el lector debería leer, para tener más información al respecto, el estupendo capítulo n^o 18 que, con el título de "Análisis Funcional" escribió *I.M. Gelfand* formando parte del libro (3 volúmenes): "La Matemática: su contenido, métodos y significado" ([1]).

Terminamos el capítulo con la discusión sobre la existencia de
diferentes bases en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 22.

Demuéstrese que existen infinitas bases en $L^2(a,b)$.

Solución: Sea $\mathbf{A} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ la base dada en el ejercicio 19. Consideremos el conjunto

$$\mathbf{B} = \left\{ \frac{f_1 + f_2}{\|f_1 + f_2\|},\ \frac{f_1 - f_2}{\|f_1 - f_2\|},\ f_n,\ n \geq 3 \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{f_1 + f_2}{\sqrt{2}},\ \frac{f_1 - f_2}{\sqrt{2}},\ f_n, n \geq 3 \right\}.$$

Es trivial demostrar que $\mathbf{B}$ es también una base de $L^2(a,b)$.

Es claro que el anterior procedimiento permite construir infinitas bases de $L^2(a,b)$.

Notas y comentarios.

El hecho de disponer de diferentes bases en $L^2(a,b)$ es extremadamente útil para las aplicaciones (está claro que las infinitas bases construidas en el ejercicio anterior tienen la misma utilidad que la dada en el ejercicio 19 y que interesaría por tanto construir otras bases formadas por funciones "distintas de las trigonométricas"). Muchas de estas bases (y quizás las más interesantes) pueden construirse usando la teoría de operadores compactos y autoadjuntos definidos en espacios de Hilbert separables ([26]).

Para bases de $L^2(a,b)$ relacionadas con funciones de Bessel, Legendre, Hermite, Laguerre, etc., se puede consultar el excelente libro de *Courant y Hilbert* ([16]).

Por último, para aquellos que quieran profundizar en el estudio de $L^2(a,b)$ recomendamos el libro de *Brezis* ([6]) y para aquellos lectores que quieran tener un conocimiento adecuado y más general de los espacios de Hilbert recomendamos el libro de *Halmos* ([23]).

Capítulo 3

Series de Fourier

3.1. Algunas nociones previas necesarias para entender el capítulo.

3.1.1. Sobre convergencia uniforme de series de funciones

Sea $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de funciones reales definidas en un intervalo $[a,b]$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, consideremos la función

$$\mathrm{S}_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$$

- Si existe una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ tal que $\{\mathrm{S}_n\} \to f$ uniformemente en $[a,b]$, decimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformemente en $[a,b]$ y escribimos

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{uniformemente en } [a,b]$$

- Si existe una sucesión $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ de números reales tales que

$$|f_n(x)| \leq a_n\ ,\ \forall x \in [a,b],\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y tal que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ es convergente, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a,b]$.

- Si $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x)$ uniformemente en $[a,b]$ y cada $f_n,\ n \in \mathbb{N}$, es continua en $[a,b]$, entonces f es continua en $[a,b]$.

- Supongamos que para cada $n \in \mathbb{N}$, existe $f_n'(x),\ \forall x \in [a,b]$ y que la serie

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x)$ converge uniformemente en $[a, b]$.

Entonces si existe por lo menos un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ es convergente, se tiene que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ es uniformemente convergente en $[a, b]$ y si

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = f(x) \text{ uniformemente en } [a, b]$$

entonces f es derivable en $[a, b]$ y

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n'(x) = f'(x) \text{ uniformemente en } [a, b]$$

(véase [4] para la demostración de las afirmaciones anteriores).

3.1.2. Sobre $C^n[a, b]$

$C^0[a, b] \equiv C[a, b]$ representa el conjunto de funciones reales, definidas en $[a, b]$ y continuas.

Si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función dada, diremos que f es derivable en $[a, b]$ si existe $f'(x),\ \forall x \in (a, b),\ f'(a^+)$ (derivada por la derecha de $f\ en\ x = a$) y $f'(b^-)$ (derivada por la izquierda de $f\ en\ x = b$).

$C^1[a, b]$ representa el conjunto de funciones reales, definidas en $[a, b]$, derivables en $[a, b]$ y con derivada continua en $[a, b]$.

Análogamente, si $n \in \mathbb{N},\ C^n[a, b]$ representa al conjunto de funciones reales, definidas en $[a, b]$, derivables hasta el orden n en $[a, b]$ y con todas las funciones derivadas, hasta el orden n, continuas en $[a, b]$.

3.1.3. Sobre la densidad de $C_0(a, b)$ en $L^1(a, b)$

$L^1(a, b)$ se introdujo en el capítulo anterior.

$C_0(a, b)$ representa al conjunto de funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas, tales que su soporte (clausura del conjunto $\{x \in [a, b]/f(x) \neq 0\}$) está contenido en (a, b) (es decir, el conjunto de funciones $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continuas tales que existe $\varepsilon > 0$ (dependiente de f) cumpliendo que $f(x) = 0$, $\forall x \in [a, a + \varepsilon] \cup [b - \varepsilon, b]$).

El conjunto $C_0(a, b)$ es denso en $L^1(a, b)$. Esto significa que para cualquier $g \in L^1(a, b)$ y cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $f \in C_0(a, b)$ tal que

$$\int_a^b |g(x) - f(x)|\, dx < \varepsilon$$

(véase [6]).

3.1.4. Sobre una fórmula de Geometría Diferencial

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ una función de clase $C^1[a,b]$, $(\gamma(s) = (x(s), y(s)), \forall s \in [a,b]$ y $x, y \in C^1[a,b])$. La imagen de $[a,b]$ por γ se dice que es la curva determinada por γ y que une los puntos $\gamma(a)$ y $\gamma(b)$.

Si $\gamma(a) = \gamma(b)$, la curva se llama cerrada. Si γ es inyectiva en $[a,b)$ y $\gamma(a) = \gamma(b)$ la curva se dice simple y cerrada.

Si γ es una curva cerrada y simple en $\mathbb{R}^2$ (se suele llamar γ a $\gamma[a,b]$) y $\mathrm{S} = \mathrm{R}^2 - \gamma$, entonces $\mathrm{S} = \gamma_i \cup \gamma_e$ donde γ_i y γ_e son abiertos y conexos, γ_i es acotado y γ_e no acotado. A γ_i se le suele llamar región interior a γ.

El área de la región γ_i es $\frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s) - x'(s)y(s))\, ds$. (véase [4]).

3.2. Presentación del capítulo y resumen de resultados fundamentales.

El punto de partida de este capítulo es el siguiente resultado fundamental probado en el capítulo anterior (véase el ejercicio 18, Cap. I):

“El conjunto $\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)),\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathrm{N} \right\}$ es una base de $L^2(-\pi,\pi)$”.

Esto significa que

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))\ ,\ \forall f \in L^2(-\pi,\pi)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

La convergencia de la serie dada en la parte derecha de la igualdad anterior, a la que se llama serie de Fourier de f, se entiende en $L^2(-\pi,\pi)$, o sea que si

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))\ ,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [-\pi,\pi],$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \mathrm{S}_n(x)|^2\, dx = 0.$$

Se cumple, además, la igualdad de Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \pi \left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n^2 + B_n^2) \right), \ \forall f \in L^2(-\pi, \pi).$$

El capítulo lo comenzamos con ejemplos de Series de Fourier para algunas funciones concretas, escribiendo la igualdad de Parseval para cada una de ellas. Probamos también el conocido lema de Riemann-Lebesgue.

A continuación nos ocupamos del problema de la convergencia puntual de las Series de Fourier, probando el criterio de Dini:

"Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es* 2π-periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi, \pi)$ y si $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función $\tau \to \dfrac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta, \delta)$ para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, entonces $S_n(x) \to f(x)$".

Aplicamos después dicho criterio a algunas funciones particulares.

Tratamos a continuación la relación existente entre derivación y Series de Fourier, demostrando que si $f : [-\pi, \pi] \to R$ es absolutamente continua y 2π-periódica, entonces la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot)))$$

(o sea, la serie de Fourier de f' se obtiene derivando, término a término, la serie de Fourier de f).

Un hecho que llama la atención es que si a es un punto dado de $[-\pi, \pi]$, entonces

$$\int_a^x f(t) \, dt = \frac{A_0(x-a)}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(A_n \int_a^x cos(nt) \, dt + B_n \int_a^x sen(nt) \, dt \right)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (o sea, "la integración término a término de la serie de Fourier de una función dada f converge uniformemente a la integral de f").

Los resultados anteriores se ilustran con diversos ejemplos que proporcionan la suma de numerosas series numéricas conocidas por el lector.

Damos también condiciones suficientes que permiten garantizar que $S_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$; a saber :

$f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, 2π-periódica y $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

Nos ocupamos asímismo de la relación existente entre la regularidad de la función f y de la convergencia uniforme de $S_n(x)$, $S'_n(x), \cdots$, a f, $f', \cdots$ respectivamente. Este hecho será de gran utilidad al aplicar la teoría de Series de Fourier al estudio de las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática en los capítulos III y IV.

Demostramos a continuación que los conjuntos

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)) \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)) \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$$

son bases de $L^2(0, \pi)$, estableciendo las correspondientes igualdades de Parseval y las condiciones suficientes que garantizan la convergencia uniforme de la serie de Fourier de f a f, para cada una de las bases citadas.

En un ejercicio, estudiamos las similitudes y diferencias que existen cuando se utilizan distintas bases para un espacio $L^2(a, b)$ general, en lo concerniente a la igualdad de Parseval, condiciones para la convergencia uniforme, etc.

El capítulo termina con algunas aplicaciones de las series de Fourier: teoremas de aproximación del tipo de Weierstrass, desigualdades integrales y el estudio de un problema isoperimétrico en el plano. Estas son sólo una muestra pequeñísima de las posibilidades de aplicación de la teoría de Series de Fourier, pero suficiente para vislumbrar la potencia que puede tener el uso de tales series en otros problemas de la Ciencia.

3.3. Desarrollo del Capítulo

En este capítulo vamos a obtener la mayoría de los resultados para funciones del espacio $L^2(-\pi, \pi)$. Esto se hace simplemente por comodidad de notación y por simplicidad de las expresiones que van a aparecer. De hecho, la extensión de los resultados a funciones del espacio general $L^2(a, b)$ será obvia.

En el ejercicio 18, capítulo I, se ha demostrado que el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)), \ \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(\cdot)), \ n \in \mathbb{N} \right\} \tag{3.1}$$

es una base de $L^2(-\pi, \pi)$. Esto significa que para cualquier función $f \in L^2(-\pi, \pi)$ se tiene que

$$f = a_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)) + b_n \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(\cdot)) \right) \tag{3.2}$$

donde

$$a_0 =< f, \ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx$$

$$a_n =< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, cos(nx)\, dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n =< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(n(\cdot)) >= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, sen(nx)\, dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \tag{3.3}$$

Sustituyendo las expresiones (3.3) en (3.2), tenemos que

$$f = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx \right) cos(n(\cdot)) + \right.$$

$$\left. + \left(\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx \right) sen(n(\cdot)) \right]$$

La serie anterior suele escribirse en la forma:

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \tag{3.4}$$

donde

$$\begin{aligned} \mathrm{A}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \\ &\text{y} \\ \mathrm{B}_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \end{aligned} \tag{3.5}$$

Definición 1.

Dada $f \in L^2(-\pi, \pi)$, a la serie

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

con A_n y B_n definidos por (3.5) le llamaremos serie de Fourier de f respecto del sistema ortonormal (3.1). Al conjunto

$$\left\{ \frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

se le llama conjunto de coeficientes de Fourier de f respecto de (3.1). En la expresión (3.4), la convergencia de la serie de la parte derecha de la igualdad ha de entenderse en $L^2(-\pi, \pi)$; es decir, si $\{\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de tal serie, o sea

$$\mathrm{S}_n(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))$$

entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\mathrm{S}_n(x)|^2\,dx = \tag{3.6}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\frac{\mathrm{A}_0}{2}-\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{A}_k cos(kx)+\mathrm{B}_k sen(kx))|^2\,dx = 0$$

Se cumple también la igualdad de Parseval:

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = a_0^2+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\ ,\ \forall f\in L^2(-\pi,\pi)$$

Como $\mathrm{A}_0=\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}a_0,\ \mathrm{A}_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}a_n,\ \mathrm{B}_n=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}b_n,\ \forall n\in\mathbb{N}$, tenemos que

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx =$$

$$= \pi\left(\frac{\mathrm{A}_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n^2+\mathrm{B}_n^2\right)\right)\ ,\ \forall f\in L^2(-\pi,\pi) \tag{3.7}$$

Hagamos algún ejercicio para familiarizarnos con lo dicho.

EJERCICIO 1.

Calcúlese la serie de Fourier de la función $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=|x|,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$. Aplicar la igualdad de Parseval para deducir que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96}$$

Solución:

$$\mathrm{A}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}x\,dx=\pi$$

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|cos(nx)\,dx=$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}xcos(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\left(x\frac{sen(nx)}{n}\Big]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\frac{sen(nx)}{n}\,dx\right)=$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}sen(nx)\,dx\right]=\frac{2}{\pi}\frac{1}{n^2}[cos(n\pi)-cos(0)].$$

Así pués,

$$\mathrm{A}_n=\begin{cases}0 & \text{si n es par}\\ \dfrac{-4}{\pi n^2} & \text{si n es impar}\end{cases}$$

$\mathrm{B}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |x| sen(nx)\, dx = 0$, puesto que la función $|x|sen(nx)$ es una función impar en $[-\pi, \pi]$.

Por tanto, la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2} + \sum_{n=1, n\ impar}^{\infty} \frac{-4}{\pi n^2} cos(n(\cdot)) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4}{\pi(2n-1)^2} cos(2n-1)(\cdot)$$

La igualdad de Parseval quedaría en este caso como

$$\int_{-\pi}^{\pi} x^2\, dx = \pi\left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}\right)$$

Por tanto,

$$\frac{2}{3}\pi^3 = \pi\left(\frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{16}{\pi^2(2n-1)^4}\right)$$

de donde se obtiene que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^4} = \frac{\frac{2}{3}\pi^3 - \frac{1}{2}\pi^3}{16}\pi = \frac{\pi^4}{96}$$

Nota.

Obsérvese que, puesto que $\left|\dfrac{-4}{\pi(2n-1)^2} cos(nx)\right| \leq \dfrac{4}{\pi(2n-1)^2}$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in [-\pi, \pi]$ y la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$ es convergente, la serie de Fourier de f es ahora uniformemente convergente en $[-\pi, \pi]$. Sabemos por otra parte que la serie de Fourier de f converge, con la norma de $L^2(-\pi, \pi)$ a f. ¿Se podrá afirmar en este caso que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$? (*los lectores que tengan frescos los conocimientos del capítulo anterior tienen la respuesta. Los lectores que no estén en el conjunto anterior y sean impacientes pueden mirar el ejercicio 14*).

EJERCICIO 2.

Sean $c_1,\ c_2\ \in \mathbb{R}\ con\ c_1 \neq c_2\ y\ f : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} c_1, & x \in [-\pi, 0) \\ c_2, & x \in [0, \pi] \end{cases}$$

Calcúlese la serie de Fourier de f, y obténgase la igualdad de Parseval en este caso. Muéstrese que la serie de Fourier de f no converge puntualmente en $x = 0$ a $f(0)$.

Solución:

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} c_1 \pi + \frac{1}{\pi} c_2 \pi = c_1 + c_2$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} c_1 cos(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} c_2 cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left. \frac{sen(nx)}{n} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi} \left. \frac{sen(nx)}{n} \right]_{0}^{\pi} = 0$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} f(x) sen(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} c_1 sen(nx)\, dx + \frac{1}{\pi} \int_{0}^{\pi} c_2 sen(nx)\, dx =$$

$$= \frac{c_1}{\pi} \left. \frac{cos(nx)}{-n} \right]_{-\pi}^{0} + \frac{c_2}{\pi} \left. \frac{cos(nx)}{-n} \right]_{0}^{\pi} =$$

$$= \frac{-c_1}{\pi n} (1 - cos(n(-\pi))) + \frac{-c_2}{n\pi} (cos(n\pi) - 1)$$

.

Luego

$$\mathrm{B}_n = \begin{cases} 0, & \text{si n es par} \\ \dfrac{2}{n\pi}\,(c_2 - c_1), & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Así pues, la serie de Fourier de f es

$$\frac{c_1 + c_2}{2} + \sum_{n=1, n\ impar}^{\infty} \frac{2}{n\pi} (c_2 - c_1) sen(n(\cdot)) =$$

$$= \frac{c_1 + c_2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(c_2 - c_1)}{(2n-1)\pi} sen(2n-1)(\cdot).$$

La igualdad de Parseval quedaría en este caso como

$$\| f \|^2 = \int_{-\pi}^{\pi} | f(x)|^2\, dx = \pi \left(\frac{(c_1 + c_2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(c_2 - c_1)^2}{\pi^2 (2n-1)^2} \right)$$

Es decir,

$$c_1^2 + c_2^2 = \frac{(c_1 + c_2)^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4(c_2 - c_1)^2}{\pi^2 (2n-1)^2}$$

y realizando operaciones se obtendría que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

Por último, la serie de Fourier, en $x = 0$, vale $\dfrac{c_1 + c_2}{2}$, mientras que $f(0) = c_2$.

El siguiente ejercicio es trivial pero necesario.

EJERCICIO 3.

Pruébese que si $f \in L^2(-\pi, \pi)$ es una función par ($f(-x) = f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$), entonces $\mathrm{B}_n = 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$ y que si f es una función impar ($f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$), entonces $\mathrm{A}_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Solución: Si f es par, entonces la función $f(x)sen(nx)$ es impar, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por lo tanto $\mathrm{B}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\, dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Si f es impar, entonces la función $f(x)cos(nx)$ es impar, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y por lo tanto $\mathrm{A}_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\, dx = 0$, $\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

En el próximo ejercicio se muestra que una función de $L^2(-\pi, \pi)$ viene determinada por sus coeficientes de Fourier.

EJERCICIO 4.

Sean $f, g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tales que $f, g \in L^2(-\pi, \pi)$. Demuéstrese que $f(x) = g(x)$ c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ $\Leftrightarrow$ Los coeficientes de Fourier de f y g coinciden.

Solución: Si $f, g \in L^2(-\pi, \pi)\ y\ f(x) = g(x)\ c.p.d.\ en\ [-\pi, \pi]$, $f = g$ en $L^2(-\pi, \pi)$; luego sus coeficientes de Fourier coinciden.

Recíprocamente, si los coeficientes de Fourier de f y g coinciden, $f - g$ sería ortogonal a todos los elementos del conjunto (3.1) y por tanto $f - g = 0\ en\ L^2(-\pi, \pi)$; es decir, $(f - g)(x) = 0$ c.p.d. en $[-\pi, \pi]$.

Sabemos que si $\left\{\dfrac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$ son los coeficientes de Fourier de una función $f \in L^2(-\pi, \pi)$, entonces la serie $\dfrac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)$ es convergente (véase (3.7)). Nos podemos plantear, a partir, de aquí la siguiente cuestión: dado un conjunto de números reales

$\left\{\dfrac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, ¿será dicho conjunto el conjunto de los coeficientes de Fourier de alguna función f? En el siguiente ejercicio se da la respuesta cuando $f \in L^2(-\pi, \pi)$.

EJERCICIO 5.

Dado un conjunto de números reales $\left\{\frac{A_0}{2},\ A_n,\ B_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$, pruébese que dicho conjunto es el conjunto formado por los coeficientes de Fourier de alguna función f de $L^2(-\pi,\pi) \Leftrightarrow$ La serie $\dfrac{A_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$ es convergente.

Solución: Si $\left\{\dfrac{A_0}{2},\ A_n, B_n, n \in \mathbb{N}\right\}$ son los coeficientes de Fourier de alguna función $f \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces, por la igualdad de Parseval,

$\|f\|^2 = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)\right)$, lo que prueba que la serie dada es convergente.

Recíprocamente, si la serie $\dfrac{A_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n^2 + B_n^2\right)$ es convergente, la serie de funciones $\dfrac{A_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n cos(nx) + B_n sen(nx)\right)$ es convergente en $L^2(-\pi,\pi)$ (véase la nota 1, c) del ejercicio 16, cap. I) a una función f cuyos coeficientes de Fourier son los del conjunto $\left\{\dfrac{A_0}{2},\ A_n,\ B_n,\ n \in \mathrm{N}\right\}$.

El ejercicio que sigue será útil para probar el criterio de Dini sobre convergencia puntual de Series de Fourier (Ejercicio 7).

EJERCICIO 6. (Lema de Riemann-Lebesgue)

Demuéstrese que si $f \in L^1(-\pi,\pi)$, entonces

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\, dx = \lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\, dx = 0 \qquad (3.8)$$

Solución: Si $f \in L^2(-\pi,\pi)$, entonces la igualdad de Parseval prueba que la serie $\dfrac{A_0^2}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(A_n^2 + B_n^2)$ es convergente, lo que implica que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} B_n = 0$, que es (3.8).

Sea ahora $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Sabemos que $C_0(-\pi,\pi)$ (conjunto de funciones reales y continuas en $[-\pi,\pi]$ con soporte contenido en $(-\pi,\pi)$) es denso en $L^1(-\pi,\pi)$ (véase [3], [6]). Por tanto, dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $S(x) \in C_0(-\pi,\pi)$ tal que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S(x)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

de donde deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)cos(nx) - S(x)cos(nx)|\, dx \leq \frac{\varepsilon}{2},\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Como $S(x) \in C_0(-\pi,\pi)$ y $C_0(-\pi,\pi) \subset L^2(-\pi,\pi), S(x) \in L^2(-\pi,\pi)$.

Así pues

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} S(x)cos(nx)\,dx = 0$$

y por tanto existe $n_0 \in \mathbb{N}\ t.q.\ si\ n \geq n_0$, entonces

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} S(x)cos(nx)\,dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

Así, para cualquier $n \geq n_0$,

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left|\int_{-\pi}^{\pi} (f(x)cos(nx) - S(x)cos(nx) + S(x)cos(nx))\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)cos(nx) - S(x)cos(nx)|\,dx + \left|\int_{-\pi}^{\pi} S(x)cos(nx)\,dx\right| \leq \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx = 0$. Análogamente se prueba que $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx = 0$.

Vamos a ocuparnos a continuación del problema de la **convergencia puntual** de la serie de Fourier de una función dada. Algo sabemos ya sobre el tema. En efecto, si $f \in L^2(-\pi,\pi)$ y $S_n,\ n \in \mathbb{N}$ es la sucesión de sumas parciales de su serie de Fourier, entonces $\{S_n\} \to f$ en $L^2(-\pi,\pi)$ (véase la igualdad 3.6). Por lo tanto, existe una subsucesión $\{S_{n_k}\}\ de\ \{S_n\}$ tal que

$$S_{n_k}(x) \to f(x)\ c.p.d.\ en\ [-\pi,\pi]$$

(véase nota 3 del Ejercicio 8, Cap. I).

Es claro que este resultado no es satisfactorio desde el punto de vista práctico, entre otras razones porque la subsucesión $\{S_{n_k}\}$ es difícil de conocer, en general.

Lo que sería útil es disponer de un criterio, fácil de aplicar en la práctica, para que $S_n(x) \to f(x)$ para $x \in [-\pi,\pi]$. Esto es lo que hacemos a continuación.

EJERCICIO 7 (**Criterio de Dini** sobre convergencia puntual de Series de Fourier).

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ 2\pi$-periódica tal que $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$. Entonces si $x \in \mathbb{R}$ es tal que la función

$$\tau \to \frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau} \in L^1(-\delta,\delta)$$

para algún $\delta > 0$ suficientemente pequeño, pruébese que $S_n(x) \to f(x)$.

Sugerencias: Demuéstrese que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right)\, d\tau.$$

Entonces, utilizando el hecho de que

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) sen\frac{1}{2}\tau = \frac{1}{2} sen(n+\frac{1}{2})\tau,\ \forall \tau \in \mathbb{R},$$

pruébese que:

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2})\tau} sen(n+\frac{1}{2})\tau\, d\tau$$

y utilícese el lema de Riemann-Lebesgue con la función $\dfrac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2})\tau}$.

Solución: Sea $\dfrac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(A_k cos(k(\cdot)) + B_k sen(k(\cdot)))$ la serie de Fourier de f. Teniendo en cuenta las expresiones de los coeficientes $A_k,\ B_k$, si $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de dicha serie, entonces

$$S_n(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k cos(kx) + B_k sen(kx)) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt + \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) cos(kt)\, dt\right) cos(kx) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) sen(kt)\, dt\right) sen(kx) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n}(cos(kt)cos(kx) + sen(kt)sen(kx))\right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k(t-x))\right) dt.$$

Realizando el cambio de variable $t - x = \tau$, tenemos que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) d\tau$$

y como la función

$$f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right)$$

como función de τ, es 2π -periódica y el intervalo de integración $[-\pi - x, \pi - x]$ tiene longitud 2π, se obtiene que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\tau)\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.9}$$

Por otra parte, es inmediato comprobar que

$$\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) sen(\frac{1}{2}\tau) = \frac{1}{2} sen(n+\frac{1}{2})\tau,\ \forall \tau \in \mathbb{R} \tag{3.10}$$

Así, si $h_n : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se define como

$$h_n(\tau) = \begin{cases} \dfrac{sen(n+\frac{1}{2})\tau}{2sen(\frac{1}{2}\tau)} & si\ \tau \neq 0 \\ \\ n + \dfrac{1}{2} & si\ \tau = 0 \end{cases}$$

entonces h_n es continua en $[-\pi, \pi]$ y $\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau) = h_n(\tau),\ \forall \tau \in [-\pi, \pi]$, lo que implica que

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} cos(k\tau)\right) d\tau = \int_{-\pi}^{\pi} h_n(\tau)\, d\tau$$

De donde tenemos

$$\pi = \int_{-\pi}^{\pi} h_n(\tau)\, d\tau$$

lo que da lugar a

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, h_n(\tau)\, d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.11}$$

Ahora (3.9) , (3.10) y (3.11) originan que

$$S_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} (f(x+\tau) - f(x))\, h_n(\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)} sen(n+\frac{1}{2})\,\tau\, d\tau,\ \forall x \in \mathbb{R}$$

Supongamos por un momento que hemos probado la siguiente afirmación:

(*) La función $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ definida como

$$g(\tau) = \frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)},\ \forall \tau \in [-\pi, \pi] - \{0\}$$

pertenece a $L^1(-\pi,\pi)$ (el valor de g en $\tau = 0$ es cualquiera que quiera el lector).

Entonces, como

$$\mathrm{S}_n(x) - f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) sen((n+\frac{1}{2})\tau)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) cos(\frac{1}{2}\tau) sen(n\tau)\, d\tau + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(\tau) sen(\frac{1}{2}\tau) cos(n\tau)\, d\tau$$

el lema de Riemann-Lebesgue (Ejercicio 6) garantiza que

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) - f(x) = 0$$

que es lo que queremos demostrar.

Probemos la afirmación (*). Para ello es suficiente con ver que $g(\tau) \in L^1(-\alpha,\alpha)$ para algún $\alpha > 0$ suficientemente pequeño. Sea $\alpha = \delta$ (el mismo que el de la hipótesis del ejercicio). Entonces, $\forall \tau \in (-\delta,\delta),\ \tau \neq 0$, se tiene

$$|g(\tau)| = \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{sen(\frac{1}{2}\tau)}\right| \leq \left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau}\right| \left|\frac{\tau}{sen(\frac{1}{2}\tau)}\right| \leq$$

$$\leq \mathrm{M}\left|\frac{f(x+\tau) - f(x)}{\tau}\right|$$

para cierta constante $\mathrm{M} > 0$ lo que prueba que $g \in L^1(-\delta,\delta)$.

Notas y comentarios.

1.- En este ejercicio se ha hablado de la serie de Fourier de una función $f \in L^1(-\pi,\pi)$. Pensemos que la definición 1 tiene perfecto sentido para funciones del conjunto $L^1(-\pi,\pi)$. Por otra parte, como se cumple que $L^2(-\pi,\pi) \subset L^1(-\pi,\pi)$, el resultado es válido para aquellas funciones del conjunto $L^2(-\pi,\pi)$ (estudiado en el capítulo anterior) que satisfagan las hipótesis del ejercicio.

2.- *¡Ojo: esta nota es tan importante como el ejercicio que acabamos de hacer!*. Si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica, $f|_{[-\pi,\pi]} \in L^1(-\pi,\pi)$ y si $x \in \mathbb{R}$ es tal que existe $f'(x)$, entonces es claro que se satisfacen las hipótesis del ejercicio previo (*el lector debe probar esta afirmación*). En particular, las funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, 2π-periódicas y derivables en $\mathbb{R}$ satisfacen las hipótesis del ejercicio previo.

3.- Observemos que si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es 2π-periódica y $f \in L^1(-\pi,\pi)$, entonces dado $x \in$ R, el “comportamiento local de f en x” puede determinar la convergencia de la serie de Fourier de f hacia $f(x)$. Este hecho es sorprendente puesto que la serie de Fourier de f viene determinada por los coeficientes A_k y B_k, los cuales a su vez dependen del “comportamiento global de f en $[-\pi,\pi]$” (*¿se sorprende el lector de este hecho? Si la respuesta es negativa su capacidad de admiración es realmente* *baja. Si la respuesta es positiva, cosa que es estupenda, su capacidad crítica debe llevarle a encontrar una explicación. Para ello debe leer atentamente (una y otra vez) la demostración dada en el ejercicio anterior*).

Es más, puede probarse que la convergencia o divergencia de la serie de Fourier de f en un punto x depende sólo del comportamiento de f “cerca de x”, a pesar de que en la definición de dicha serie de Fourier influya el comportamiento de f en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$ (esto se conoce con el nombre de “Principio de localización de Riemann” (ver [4])). También ver [4] y [38] para otros criterios de convergencia, además del de Dini.

4.- La convergencia puntual de Series de Fourier sigue siendo una cuestión que genera parte de la investigación que se realiza en la Matemática actual. Restringiéndonos al subconjunto C, de $L^2(-\pi, \pi)$, formado por las funciones continuas y 2π -periódicas ($f(-\pi) = f(\pi)$), diremos que fué Du Bois-Reymond, en 1873, el primero que encontró una función $f \in C$ cuya serie de Fourier diverge en algún punto de $[-\pi, \pi]$ (ver [31]). Posteriormente fueron dados ejemplos más simples como el de Fejér, en 1911 (ver [38] para más detalles).

En 1966, *L. Carleson (“On the convergence and growth of partial sums of Fourier series”, Acta Math. 116, 135-157, 1966*) probó que si $f \in C$, entonces la serie de Fourier de f converge c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ a f. El mismo año, *Kahane y Katznelson* probaron que si E $\subset [-\pi, \pi]$ es un subconjunto de medida cero, entonces existe una función $f \in C$ tal que su serie de Fourier no converge en E(ver [29]); desde luego, estos dos últimos resultados que hemos mencionado (que no son en absoluto triviales de probar y cuyo nivel rebasa el de estas notas), dejan zanjada la cuestión de la convergencia puntual de las Series de Fourier en el conjunto C.

No obstante, el comportamiento (referente a la convergencia puntual) que pueden ofrecer las Series de Fourier es a veces “tremendamente patológico”. Por ejemplo, en 1926, *Kolmogorov (“Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout”. C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A-B, 183, 1327-1328 (1926))* dió un ejemplo de una función $f \in L^1(-\pi, \pi)$ y 2π-periódica tal que su serie de Fourier no converge en ningún punto.

5.- A veces, a partir de la serie de Fourier de una función dada f, puede formarse otra serie que es más adecuada desde el punto de vista de la convergencia puntual a f. Este es el caso por ejemplo, de la sumabilidad Cesáreo de las Series de Fourier (ver [4] y [38] para más detalles), donde la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f, $\{S_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ se sustituye por la sucesión formada por sus medias aritméticas.

Los dos ejercicios siguientes constituyen una aplicación del ejercicio anterior.

EJERCICIO 8.

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función 2π -periódica definida en $(-\pi, \pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \ -\pi < x < 0 \\ 0 & si \ x = 0 \ o \ x = \pi \\ 1 & si \ 0 < x < \pi \end{cases}$$

   Pruébese que

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{sen(2n-1)x}{2n-1}, \ \forall x \in \mathbb{R} \tag{3.12}$$

2. Probar que

$$x = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} sen(nx)}{n}, \ \forall x \in (-\pi, \pi) \tag{3.13}$$

3. Probar que

$$xcosx = -\frac{1}{2} senx + 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n nsen(nx)}{n^2 - 1}, \ \forall x \in (-\pi, \pi) \tag{3.14}$$

Solución:

1. La función f satisface las condiciones del ejercicio (7)

   $\forall x \in \mathbb{R} - \mathrm{A}$, donde

$$\mathrm{A} = \{x \in \mathbb{R} / x = k\pi \ \text{ para algún } \ k \in \mathbb{Z}\}$$

   Por otra parte, como f es impar en $[-\pi, \pi]$, $\mathrm{A}_k = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y

$$\mathrm{B}_k = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(kx) \, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} sen(kx) \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi} \left(\frac{-cos(kx)}{k} \Big]_0^{\pi} \right) = \frac{2}{\pi} \left(\frac{-cos(k\pi) + cos(0)}{k} \right).$$

   Luego

   $\mathrm{B}_k = 0$ si k es par y $\mathrm{B}_k = \dfrac{4}{\pi k}$ si k es impar).

   Por lo tanto, la serie de Fourier de f es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4 sen(2n-1)x}{\pi(2n-1)}$$

En conclusión,

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)}, \ \forall x \in \mathbb{R} - \text{A}.$$

También, si $x \in \text{A}$, $f(x) = 0 \ y \ sen(2n-1)x = 0, \forall n \in \mathbb{N}$, luego se cumple (3.12).

(en particular $\frac{\pi}{4} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2n-1)x}{(2n-1)}$, $\forall x \in (0,\pi)$. *¡ Esto es curioso!*).

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(-\pi,\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x \ , & -\pi < x < \pi \\ 0 \ , & x = \pi \end{cases}$$

Entonces f satisface todas la hipótesis del ejercicio 7 en todo punto $x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi / \ k \in \text{Z}\}$.

Calculemos la serie de Fourier de f. Para ello, observamos que $\text{A}_k = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y que

$$\text{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx) \, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x sen(kx) dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(kx)}{k}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{cos(kx)}{k} dx \right] =$$

$$= \frac{2}{\pi k}\left(-\pi cos(k\pi)\right) = \frac{-2}{k}(-1)^k = \frac{+2(-1)^{k-1}}{k}$$

Luego

$$f(x) = x = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1} sen(nx)}{n}, \ \forall x \in (-\pi,\pi).$$

3. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(-\pi,\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x cos x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = \pi \end{cases}$$

Entonces f satisface las hipótesis del ejercicio 7 en todo punto $x \in \mathbb{R} - \{(2k-1)\pi / k \in \text{Z}\}$.

Además los coeficientes de Fourier de f vienen dados por

$$\text{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx) \, dx = 0, \ \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

y

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)\, dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcosxsen(kx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcosxsen(kx)\, dx = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} \frac{x}{2}\left(sen(k+1)x + sen(k-1)x\right)\, dx$$

Así,

$$B_1 = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(2x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{cos(2x)}{2}\, dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{-\pi}{2}\right) = \frac{-1}{2}$$

y si $k > 1$,

$$B_k = \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(k+1)x\, dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(k-1)x\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(k+1)x}{k+1}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{cos(k+1)x}{k+1}\, dx\right] +$$

$$+ \frac{1}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{cos(k-1)x}{k-1}\, dx\right] =$$

$$= \frac{-\pi cos(k+1)\pi}{\pi(k+1)} + \frac{-\pi cos(k-1)\pi}{\pi(k-1)} = \frac{-cos(k+1)\pi}{(k+1)} - \frac{cos(k-1)\pi}{(k-1)} =$$

$$= \frac{cos(k\pi)}{k+1} + \frac{cos(k\pi)}{k-1} = \frac{kcos(k\pi) - cos(k\pi) + kcos(k\pi) + cos(k\pi)}{k^2-1} =$$

$$= \frac{2k(-1)^k}{k^2-1}$$

Por lo tanto

$$f(x) = xcos(x) = -\frac{1}{2}sen(x) + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n sen(nx)}{n^2-1}\ ,\ \forall x \in (-\pi, \pi).$$

EJERCICIO 9.

Pruébese:

1.
$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n}\ ,\ \forall x \in (0, 2\pi)$$

2.
$$x^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cos(nx)}{n^2} - \frac{\pi sen(nx)}{n}\right)\ ,\ \forall x \in (0, 2\pi)$$

Sugerencia: En ambos apartados, aplíquese el resultado del ejercicio 7 a extensiones 2π-periódicas de las funciones dadas.

Solución:

1. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica y definida en $(0, 2\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x\,, & x \in (0, 2\pi) \\ 0\,, & x = 2\pi \end{cases}$$

Claramente f satisface las hipótesis del Ejercicio 7 para todo punto $x \in \mathbb{R} - \{2k\pi/k \in \mathbb{Z}\}$. Los coeficientes de Fourier de f son

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx$$

Luego

$$\mathrm{A}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} f(x)\,dx + \int_{0}^{\pi} f(x)\,dx\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} (x + 2\pi)\,dx + \int_{0}^{\pi} x\,dx\right] = 2\pi$$

y si $k > 1$,

$$\mathrm{A}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x + 2\pi)cos(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xcos(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xcos(kx)\,dx + 2\int_{-\pi}^{0} cos(kx)\,dx = 0\,,$$

$\forall k \in \mathbb{N}$.

Por otra parte, $\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(kx)\,dx =$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x + 2\pi)sen(kx)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} xsen(kx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} xsen(kx)\,dx + 2\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\,dx =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} + 2\left(\left.\frac{-cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} + 2\left(\frac{-1}{k} + \frac{cos(k\pi)}{k}\right) =$$

$$= \frac{2(-1)^{k-1}}{k} - \frac{2}{k} + \frac{2(-1)^k}{k} = \frac{-2}{k}$$

Así pues,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(nx) + B_n sen(nx)),$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi/k \in Z\}$

En particular

$$x = \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(nx)}{n} \ , \ \forall x \in (0, 2\pi)$$

2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-periódica, definida en $(0, 2\pi]$ como

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x \in (0, 2\pi) \\ 0 & , \ x = 2\pi \end{cases}$$

f satisface las hipótesis del Ejercicio 7, $\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi/k \in Z\}$.

Los coeficientes de Fourier de f son

$$A_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\ dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x + 2\pi)^2\ dx +$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2\ dx = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{(x+2\pi)^3}{3}\right]_{-\pi}^{0} + \left[\frac{x^3}{3}\right]_{0}^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(2\pi)^3}{3} - \frac{\pi^3}{3} + \frac{\pi^3}{3}\right) = \frac{1}{\pi}\frac{8\pi^3}{3} = \frac{8\pi^2}{3}$$

Análogamente, si $k \in \mathbb{N}$,

$$A_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}(x + 2\pi)^2 cos(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 cos(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} x cos(kx)\ dx +$$

$$+4\pi\int_{-\pi}^{0} cos(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 cos(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} xcos(kx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{x^2 sen(kx)}{k} + \frac{2xcos(kx)}{k^2} + \frac{sen(kx)}{k^2}\right]_0^{\pi}\ \right] +$$

$$+4\left[\left[\frac{xsen(kx)}{k} + \frac{cos(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{0}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{2\pi cos(k\pi)}{k^2} + 4\left(\frac{1}{k^2} - \frac{cos(k\pi)}{k^2}\right) = \frac{4}{k^2}$$

También,

$$\mathrm{B}_k = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} (x+2\pi)^2 sen(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 sen(kx)\ dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} x^2 sen(kx)\ dx + 4\int_{-\pi}^{0} xsen(kx)\ dx +$$

$$+4\pi\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\ dx + \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 sen(kx)\ dx =$$

$$= 4\int_{-\pi}^{0} xsen(kx)\ dx + 4\pi\int_{-\pi}^{0} sen(kx)\ dx =$$

$$= 4\left[\frac{-xcos(kx)}{k} + \frac{sen(kx)}{k^2}\right]_{-\pi}^{0} + 4\pi\left[\frac{-cos(kx)}{k}\right]_{-\pi}^{0} =$$

$$= 4\left(\frac{-\pi cos(k\pi)}{k}\right) + \frac{4\pi}{k}\left(-1 + \frac{cos(k\pi)}{k}\right) = \frac{-4\pi}{k}$$

Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(nx) + \mathrm{B}_n sen(nx)),$$

$\forall x \in \mathbb{R} - \{2k\pi / k \in \mathrm{Z}\}$

En particular

$$x^2 = \frac{4\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{cos(nx)}{n^2} - \pi\frac{sen(nx)}{n}\right)\ ,\ \forall x \in (0, 2\pi)$$

El ejercicio siguiente muestra la relación existente entre la serie de Fourier de una función y la de su derivada.

EJERCICIO 10.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función absolutamente continua y 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$). Demuéstrese que la serie de Fourier de f' puede obtenerse derivando, término a término, la serie de Fourier de f.

Solución: Como f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$, existe $f'(x)$ c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ y $f' \in L^1(-\pi, \pi)$. Recordemos otra vez que la definición 1 tiene perfecto sentido para funciones de $L^1(-\pi, \pi)$.

Entonces, si

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

y

$$\frac{\mathrm{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{C}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{D}_n sen(n(\cdot)))$$

son las Series de Fourier de f y f' respectivamente, tenemos que

$$\mathrm{C}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)cos(nx)]_{-\pi}^{\pi} + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\, dx \right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(\pi)cos(n\pi) - f(-\pi)cos(n(-\pi)) + n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\, dx \right] =$$

$$= n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\, dx = n\mathrm{B}_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\mathrm{D}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x) sen(nx)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)sen(nx)]_{-\pi}^{\pi} - n\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\, dx \right] =$$

$$= -n\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\, dx = -n\mathrm{A}_n\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

También,

$$\mathrm{C}_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, dx = \frac{1}{\pi}\left(f(\pi) - f(-\pi)\right) = 0$$

Luego la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

EJEMPLO:

Sea $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}/f(x)=|x|\ ,\ \forall x\in[-\pi,\pi]$. Entonces f es absolutamente continua (¿por qué?) y 2π -periódica.

En los ejercicios 1 y 2 demostramos que la serie de Fourier de f es

$$\frac{\pi}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-4}{\pi(2n-1)^2}cos(2n-1)(\cdot) \tag{3.15}$$

y la de f' (pensemos que $f'(x)=-1\ si\ x\in(-\pi,0)\ y\ f'(x)=1$

$si\ x\in(0,\pi)$)

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)\pi}sen(2n-1)(\cdot)$$

que se obtiene derivando, término a término, (3.15).

Notas.

1.- El resultado del ejercicio anterior es en particular cierto para funciones $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ absolutamente continuas, 2π-periódicas y tales que $f'\in L^2(-\pi,\pi)$.

2.- *¡ Atención a esta nota, que también es importante!*. Las hipótesis del ejercicio anterior se verifican si $f\in C^1[-\pi,\pi]$ y es 2π-periódica.

El próximo resultado se refiere a la relación entre la integración, término a término, de la serie de Fourier de una función dada f, y la integral de f. Sorprendentemente, dicha integración proporciona una serie que converge uniformemente a la integral de f.

EJERCICIO 11.

Sea $f\in L^2(-\pi,\pi)$ y $\dfrac{\mathrm{A}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(n(\cdot))+\mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$ la serie de Fourier de f. Demuéstrese que si $a\in[-\pi,\pi]$ es un punto dado, entonces

$$\int_a^x f(t)\,dt = \tag{3.16}$$

$$=\frac{\mathrm{A}_0(x-a)}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n\int_a^x cos(nt)\,dt+\mathrm{B}_n\int_a^x sen(nt)\,dt\right)$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Solución: Sea $\mathrm{S}_n(x)=\dfrac{\mathrm{A}_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\mathrm{A}_k cos(kx)+\mathrm{B}_k sen(kx))$.

Entonces, es conocido (ver (3.6)) que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\mathrm{S}_n(x)|^2\,dx=0 \tag{3.17}$$

Por otra parte, si $x\in[-\pi,\pi]$, tenemos que

$$\left| \int_a^x f(t)\, dt - \int_a^x \mathrm{S}_n(t)\, dt \right| \leq \left| \int_a^x |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|\, dt \right| \leq$$

(por la desigualdad de Cauchy-Schwartz)

$$\leq \left(\int_a^x |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2\, dt \right)^{1/2} \left(\int_a^x 1^2\, dt \right)^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2\, dt \right)^{1/2} |x-a|^{1/2} \leq$$

$$\leq \left(\int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - \mathrm{S}_n(t)|^2\, dt \right)^{1/2} (2\pi)^{1/2}$$

Luego, por (3.17),

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x \mathrm{S}_n(t)\, dt = \int_a^x f(t)\, dt$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, que es (3.16).

Notas y comentarios.

1.- Tomando $a = 0$ en (3.16), como

$$\int_0^x cos(nt)\, dt = \frac{sen(nx)}{n}\ ,$$

$$\int_0^x sen(nt)\, dt = \frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}\ ,\ \forall x \in [-\pi, \pi],$$

tenemos que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \frac{\mathrm{A}_0 x}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n \frac{sen(nx)}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n \left(\frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n} \right)$$

O sea que

$$\int_0^x f(t)\, dt - \frac{\mathrm{A}_0 x}{2} = \tag{3.18}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\mathrm{B}_n}{n} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-\mathrm{B}_n}{n} cos(nx) + \frac{\mathrm{A}_n}{n} sen(nx)) \right)$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (*¿se ha planteado el lector porqué la serie* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{B}_n}{n}$ *es* *convergente? Pues plantéeselo*).

Como la función $g(x) \equiv \int_0^x f(t)\,dt - \frac{A_0 x}{2}$ es una función de $L^2(-\pi,\pi)$, tiene un desarrollo en serie de Fourier. Este desarrollo es precisamente el escrito en la parte derecha de (3.18). (¿Por qué?).

2.- La observación anterior puede utilizarse para calcular el desarrollo de Fourier de algunas funciones como veremos en los ejercicios 12 y 13 que siguen.

EJERCICIO 12.

Considérese la función $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & si \ x \in [-\pi, 0) \\ 1 & si \ x \in [0,\pi]\,. \end{cases}$$

Calcúlese la serie de Fourier de f y aplíquese el ejercicio anterior para obtener la serie de Fourier de la función $g(x) = |x|$. Compruébese que es la misma que la obtenida en el ejercicio 1.

Solución: La serie de Fourier de f se obtuvo en el ejercicio 2 ($c_1 = -1,\ c_2 = 1$); luego dicha serie es

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} sen(2n-1)(\cdot)$$

Por otra parte $g(x) = \int_0^x f(t)\,dt\ ,\ \forall x \in [-\pi,\pi]$ (¿por qué?)

Luego, por el ejercicio anterior

$$|x| = g(x) = \int_0^x f(t)\,dt = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \int_0^x sen(2n-1)t\,dt$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Es decir,

$$|x| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n-1)\pi} \left(\frac{-cos(2n-1)x}{(2n-1)} + \frac{1}{(2n-1)} \right) =$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \text{(ver Ejercicio 2)}$$

$$= \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2}.$$

Luego

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \ \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi] \tag{3.19}$$

La relación anterior es difícil de creer. Pensar que la función $|x|$ admite un desarrollo en serie como el dado es, cuando menos, no intuitivo. Sin embargo, como una imagen vale más que mil palabras, el lector puede obtener fácilmente las gráficas de las cuatro primeras sumas parciales de la serie dada. ¿A que ahora es más creíble?

EJERCICIO 13.

Probar que:

1. $x^2 = \dfrac{\pi^2}{3} + 4\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ de manera uniforme.

2. $xsenx = 1 - \dfrac{1}{2}cosx - 2\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1}$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ de manera uniforme.

3. $\dfrac{x^2}{2} = \pi x - \dfrac{\pi^2}{3} + 2\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$, $\forall x \in [0, 2\pi]$ de manera uniforme.

Sugerencia: Utilícense los ejercicios n^o 8, 9 y 11.

Solución:

1. En el apartado b) del ejercicio 8 demostramos que si

   $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} x, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x = -\pi \ \text{ ó } x = \pi \end{cases}$$

   Entonces la serie de Fourier de f es

$$2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} sen(nx)}{n}$$

   Por lo tanto, utilizando el ejercicio 11 con $a = 0$, tenemos que

$$\int_0^x f(t)\,dt = 2\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^x \frac{(-1)^{n-1} sen(nt)}{n}\,dt$$

   uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

De donde se obtiene

$$\frac{1}{2}x^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\left(\frac{-cos(nt)}{n}\Big]_0^x\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}(-cos(nx)+1)$$

Luego

$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-(-1)^{n-1}cos(nx)}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$ y así

$$x^2 = 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

Ahora bien, si en el apartado b) del ejercicio 9 tomamos $x=\pi$, obtenemos que

$$\pi^2 = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{cos(n\pi)}{n^2} = \frac{4}{3}\pi^2 + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$$

De donde se obtiene

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = \frac{-\pi^2}{12} \tag{3.20}$$

Luego

$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$ uniformemente en $[-\pi,\pi]$.

2. Sea $f:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \begin{cases} xcosx, & -\pi < x < \pi \\ 0, & x=-\pi \ o \ x=\pi \end{cases}$$

La serie de Fourier f hemos demostrado que es

$$-\frac{1}{2}senx + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n sen(nx)}{n^2-1}$$

Luego

$$\int_0^x f(t)\,dt = -\frac{1}{2}\int_0^x sent\,dt + 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n(-1)^n}{n^2-1}\int_0^x sen(nt)\,dt$$

de manera uniforme en $[-\pi, \pi]$.

Realizando las integrales tenemos que

$$tsent]_0^x - \int_0^x sent\ dt =$$

$$= -\frac{1}{2}(-cosx + 1) + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{n^2-1}\left(\frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}\right)$$

De aquí obtenemos

$$xsenx =$$

$$= -cosx + cos0 + \frac{1}{2}cosx - \frac{1}{2} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n(-cos(nx))}{n^2-1} + 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1}$$

y como

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2-1} = \frac{1}{4}$$

(¿por qué?) tenemos que

$$xsenx = 1 - \frac{1}{2}cosx - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

3. Consideramos la función del apartado a) del ejercicio 9.

   En este caso $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ está definida como

$$f(x) = \begin{cases} x + 2\pi\ , & -\pi \le x \le 0 \\ x\ , & 0 < x < \pi \end{cases}$$

   La serie de Fourier de f es

$$\pi + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-2}{n} sen(n(\cdot))$$

   y por tanto,

   $\int_0^x f(t)\ dt = \pi x - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n}\int_0^x sen(nt)\ dt$, uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

   Como $\int_0^x sen(nt)\ dt = \left.\frac{-cos(nt)}{n}\right]_0^x = \frac{-cos(nx)}{n} + \frac{1}{n}$, se tiene que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \pi x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2cos(nx)}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$$

y como

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(esto es conocido, pero el lector puede intentar probarlo, utilizando la igualdad de Parseval para una función adecuada), tenemos que

$$\int_0^x f(t)\, dt = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \tag{3.21}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$

Ahora bien,

Si $x \in (-\pi, 0)$, $\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x (t + 2\pi)\, dt = \frac{1}{2}x^2 + 2\pi x$

Si $x \in (0, \pi)$, $\int_0^x f(t)\, dt = \int_0^x t\, dt = \frac{1}{2}x^2$

Luego

$$\frac{1}{2}x^2 + 2\pi x =$$

$$= \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \text{ uniformemente en } [-\pi, 0], \tag{3.22}$$

$$\frac{1}{2}x^2 = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \text{ uniformemente en } [0, \pi]$$

Entonces, $\forall x \in [\pi, 2\pi],\ x - 2\pi \in [-\pi, 0]$, luego por (3.22)

$$\frac{1}{2}(x - 2\pi)^2 + 2\pi(x - 2\pi) =$$

$$= \pi(x - 2\pi) - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(n(x - 2\pi))}{n^2}$$

y realizando operaciones, obtenemos

$$\frac{1}{2}x^2 - 2\pi x + 2\pi^2 + 2\pi x - 4\pi^2 =$$

$$= \pi x - 2\pi^2 - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2}$$

de manera uniforme en $[-\pi, 0]$. O sea que

$$\frac{1}{2}x^2 = \pi x - \frac{\pi^2}{3} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(nx)}{n^2} \text{ uniformemente en } [-\pi, 0].$$

Esto, junto con (3.22), proporciona lo requerido.

Cuando apliquemos la teoría de Series de Fourier a diversos problemas, veremos que hay muchas situaciones donde la convergencia puntual de tales series, no es suficiente para tener una respuesta satisfactoria; éste será el caso, por ejemplo, de las aplicaciones de las Series de Fourier a las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática en los capítulos III y IV. Aquí necesitaremos criterios que nos permitan obtener la convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función dada. De este problema nos vamos a ocupar a continuación.

EJERCICIO 14.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que su serie de Fourier converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Demostrar que dicha serie de Fourier debe converger uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Sugerencia: Si g es la función a la que converge uniformemente la serie de Fourier de f, demostrar que f debe ser igual a g c.p.d. en $[-\pi, \pi]$ y utilizar el hecho de que ambas son continuas.

Solución: Sea

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot)))$$

la serie de Fourier de f y $\{S_n; n \in \mathbb{N}\}$ la sucesión de sumas parciales de dicha serie.

Por hipótesis $\{S_n, n \in \mathbb{N}\}$ converge uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Sea $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ tal que $\{S_n\} \to g$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Como S_n es continua $\forall n \in \mathbb{N}$, g debe ser continua en $[-\pi, \pi]$.

Por otra parte, es conocido que $\{S_n\} \to f \; en \; L^2(-\pi, \pi)$ (*¿había ya el lector olvidado este hecho fundamental?*) y como $\{S_n\} \to g$ uniformemente en $[-\pi, \pi]$, $\{S_n\} \to g \; en \; L^2(-\pi, \pi)$ (véase el ejercicio 12, cap. I); luego $f = g \; en \; L^2(-\pi, \pi)$, lo que implica que $f(x) = g(x) \; c.p.d. \; en \; [-\pi, \pi]$. Pero como $f \; y \; g$ son continuas en $[-\pi, \pi]$, debe tenerse que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$ (*intente el lector probar esto; si no lo consigue, es que ha olvidado demasiado pronto el Capítulo I*).

EJEMPLO:

Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es tal que $f(x) = |x|$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, entonces

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \tag{3.23}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$ (véase el ejercicio 1). Esto se había ya obtenido por un procedimiento distinto (véase 3.19).

EJERCICIO 15.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua, 2π-periódica ($f(-\pi) = f(\pi)$) y tal que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f converge uniformemente a f en $[-\pi, \pi]$.

Sugerencia: Si $\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot)))$ es la serie de Fourier de f, pruébese que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}(|A_n| + |B_n|)$ es convergente.

Solución: Sea

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot))) \tag{3.24}$$

la serie de Fourier de f.

Entonces la serie de Fourier de f' (véase el ejercicio 10) es

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot)))$$

La igualdad de Parseval (3.7), aplicada a f', proporciona que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 B_n^2 + n^2 A_n^2) \right)$$

lo que implica que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 B_n^2 + n^2 A_n^2)$$

es convergente.

Ahora bien, para cada $n \in \mathbb{N}$, se cumple que

$$\left(n|A_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^2 |A_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|A_n| \geq 0$$

$$\left(n|\mathrm{B}_n| - \frac{1}{n}\right)^2 = n^2|\mathrm{B}_n|^2 + \frac{1}{n^2} - 2|\mathrm{B}_n| \geq 0$$

lo que implica que

$$|\mathrm{A}_n| \leq \frac{1}{2}\left(n^2\mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$|\mathrm{B}_n| \leq \frac{1}{2}\left(n^2\mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) \ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Así pues la serie numérica

$$\frac{|\mathrm{A}_0|}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(|\mathrm{A}_n| + |\mathrm{B}_n|)$$

es convergente y como esta serie es una mayorante de la serie (3.24), ésta es convergente uniformemente en $[-\pi, \pi]$. Como además f es continua, por el ejercicio anterior dicha convergencia es a la función f.

Notas y comentarios.

1.- Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua, sabemos que existe $f'(x)\ c.p.d.\ en\ [-\pi, \pi]\ y\ f' \in L^1(-\pi, \pi)$. En el ejercicio anterior se exige, además, que $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

2.- En adelante denotaremos por H al subconjunto de $L^2(-\pi, \pi)$ formado por aquellas funciones que satisfacen las hipótesis del ejercicio anterior.

El ejercicio que sigue describe subconjuntos de H que pueden ser útiles en la práctica, puesto que si una función dada f pertenece a alguno de estos subconjuntos, entonces su serie de Fourier converge uniformemente a f.

EJERCICIO 16.

Demostrar que los conjuntos que se describen son subconjuntos de H.

1. $\mathrm{A} = \{f \in C^1[-\pi, \pi]/f(-\pi) = f(\pi)\}$

2. $\mathrm{B} = \{f \in C^0[-\pi, \pi]/f(-\pi) = f(\pi),\ f'(x)$ existe salvo en un número finito de puntos y f' es medible y acotada $\}$

3. $\mathrm{C} = \{f \in C^0[-\pi, \pi]/f(-\pi) = f(\pi)\ y\ f$ es "lineal a trozos"$\}$

Solución:

1. Si $f \in \mathrm{A}$, entonces $f' \in C^0[-\pi, \pi]$; luego f' es acotada en $[-\pi, \pi]$ y por tanto f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$ (utilícese el teorema del valor medio). Como además $f' \in C^0[-\pi, \pi]$, $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

2. Nuevamente, aplicando el teorema del valor medio se tendría que f es absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$. Además, como f' es acotada en $[-\pi, \pi]$, $f' \in L^2(-\pi, \pi)$.

3. $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ se dirá lineal a trozos si f es continua y existe un conjunto finito de puntos
$$-\pi = a_1 < a_2 < \cdots\cdots < a_n = \pi$$
de $[-\pi, \pi]$ tal que $f|_{[a_i, a_{i+1}]}$ es de la forma $f(x) = m_i x + +n_i$, para $1 \leq i \leq n-1$. Es claro entonces que C $\subset$ B.

EJEMPLOS.

Utilizando el ejercicio previo, se obtienen las siguientes identidades (que ya se habían obtenido por un procedimiento distinto en el ejercicio 11).

$$|x| = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4cos(2n-1)x}{\pi(2n-1)^2} \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2} \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

$$xsenx = 1 - \frac{1}{2}cosx - 2\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2-1} \text{ uniformemente en } [-\pi, \pi].$$

Nota importante.

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^1 y 2π-periódica se tiene que

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(nx) + \mathrm{B}_n sen(nx)) \text{ uniformemente en } \mathbb{R}.$$

Las identidades obtenidas hasta ahora permiten sumar muchas series numéricas, pero a veces hay que ser cautos para no equivocarse (véase el ejercicio que sigue).

EJERCICIO 17.

Obtener la suma de la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2}$$

Sugerencia: Utilizar alguna de las identidades del ejemplo anterior.

Solución: Sabemos que

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2} \tag{3.25}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Luego

$$\frac{x^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(nx)}{n^2}$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

La primera respuesta que a uno se le ocurre es que la suma de la serie pedida es $\frac{20^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4}$. Pero esto es falso, puesto que (3.25) se cumple en $[-\pi, \pi]$ y $20 \notin [-\pi, \pi]$.

Ahora bien, aprovechando la 2π-periodicidad de la función dada por la parte derecha de (3.25), tenemos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20 - 6\pi)n}{n^2}$$

y como $20 - 6\pi \in [-\pi, \pi]$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n cos(20n)}{n^2} = \frac{(20 - 6\pi)^2 - \frac{\pi^2}{3}}{4}.$$

En otros tipos de aplicaciones interesa conseguir no sólo que la serie de Fourier de una función dada f converja uniformemente a f sino también (y suponiendo que f es suficientemente regular) que las Series de Fourier de las derivadas de f converjan uniformemente a tales derivadas. Este es el objetivo de los siguientes ejercicios.

EJERCICIO 18.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con f' absolutamente continua y tal que $f'' \in L^2(-\pi, \pi)$. Si además se cumple que

$$f(-\pi) = f(\pi), \; f'(-\pi+) = f'(\pi-)$$

pruébese que

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$$

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(nx) - nA_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, donde $\left\{ \frac{A_0}{2}, \; A_n, \; B_n, \; n \in N \right\}$ son los coeficientes de Fourier de f.

(**Sugerencia:** pruébese que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (n|B_n| + n|A_n|)$ es convergente).

Solución: Como f y f' están en las condiciones del ejercicio 10, si

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot))) \tag{3.26}$$

es la serie de Fourier de f,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot))) \tag{3.27}$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-n^2 A_n cos(n(\cdot)) - n^2 B_n sen(n(\cdot))) \tag{3.28}$$

son las Series de Fourier de f' y f'' respectivamente.

Aplicando la igualdad de Parseval (3.7) a f'', se tiene que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f''(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 A_n^2 + n^4 B_n^2) \right)$$

lo que prueba que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^4 A_n^2 + n^4 B_n^2)$$

es convergente.

También,

$$\left(n^2 |A_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^4 A_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n|A_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(n^2 |B_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^4 B_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n|B_n| \geq 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

lo que implica que

$$n|A_n| + n|B_n| \leq \frac{1}{2} \left(n^4 A_n^2 + \frac{1}{n^2} \right) + \frac{1}{2} \left(n^4 B_n^2 + \frac{1}{n^2} \right),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$.

Así pues la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n|A_n| + n|B_n|)$$

es convergente. De aquí deducimos que las series (3.26) y (3.27) son uniformemente convergentes en $[-\pi,\pi]$ y deben serlo a f y f' respectivamente por el ejercicio 14.

Notas y comentarios.

1.- Las hipótesis del ejercicio 18 se satisfacen si $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y $f(-\pi) = f(\pi)$, $f'(-\pi+) = f'(\pi-)$. En particular, esto es así si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es de clase C^2 y 2π-periódica.

2.- Es claro que el ejercicio 18 se puede enunciar con más generalidad, si f es una función con "más regularidad". De hecho puede probarse el resultado siguiente:

"Sea $f : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ una función de clase C^k con $f^{k)}$ absolutamente continua y tal que $f^{k+1)} \in L^2(-\pi,\pi)$. Si además se cumple que

$$f^{i)}(-\pi+) = f^{i)}(\pi-),\ 0 \le i \le k,$$

entonces

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}_n(x) \\ f'(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}'_n(x) \\ &- - - - - - - \\ f^{k)}(x) &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{S}^{k)}_n(x) \end{aligned} \tag{3.29}$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$, donde $\{\mathrm{S}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de f".

En particular, si $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es una función de clase C^{k+1} y 2π-periódica, se cumple (3.29).

Creo que el lector, si no está muy cansado (en este caso déjese para otro día), debería probar el anterior resultado. La demostración sigue las mismas líneas que el ejercicio anterior:

Lo primero que hay que intentar es obtener la fórmula para la serie de Fourier de $f^{k+1)}$. Para esto es razonable (y muchas veces hasta necesario) hacer algunos casos particulares:

Si

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

es la serie de Fourier de f, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^2 \mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) - n^2 \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f'',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-n^3 \mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) + n^3 \mathrm{A}_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f''',$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^4 \mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + n^4 \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))) \text{ es la serie de Fourier de } f^{iv)},$$

y así sucesivamente. Llegados a este punto, afirmamos que la serie de Fourier de $f^{k+1)}$ es:

Si k es impar

$$\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{\frac{k+1}{2}} n^{k+1} \mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + (-1)^{\frac{k+1}{2}} n^{k+1} \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

Si k es par

$$\sum_{n=1}^{\infty}((-1)^{\frac{k}{2}} n^{k+1} \mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) + (-1)^{\frac{k+2}{2}} n^{k+1} \mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

Esta afirmación puede probarse (si queda ánimo) por inducción sobre k.

En cualquier caso, y por pertenecer $f^{k+1)}$ a $L^2(-\pi, \pi)$ se cumple la igualdad de Parseval

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f^{k+1)}(x)|^2 \, dx = \pi \left(\sum_{n=1}^{\infty}(n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2) \right)$$

lo que prueba que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2)$$

es convergente.

Como

$$\left(n^{k+1} |\mathrm{A}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^{2k+2} \mathrm{A}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n^k |\mathrm{A}_n| \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$\left(n^{k+1} |\mathrm{B}_n| - \frac{1}{n} \right)^2 = n^{2k+2} \mathrm{B}_n^2 + \frac{1}{n^2} - 2n^k |\mathrm{B}_n| \geq 0, \ \ \forall n \in \mathbb{N}$$

se tiene que

$$n^k|A_n| + n^k|B_n| \le \frac{1}{2}\left(n^{2k+2}A_n^2 + \frac{1}{n^2}\right) + \frac{1}{2}\left(n^{2k+2}B_n^2 + \frac{1}{n^2}\right),$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ lo que implica que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty}(n^k|A_n| + n^k|B_n|) \tag{3.30}$$

es convergente.

Lo que queda es muy fácil pues (3.30) implica que las sucesiones $S_n(x),\ S_n'(x),\ \cdots,\ S_n^{k)}(x)$ deben converger uniformemente a $f,\ f',\ \cdots,\ f^{k)}$ respectivamente (por el ejercicio 14).

En el ejercicio anterior se demuestra que si f es suficientemente regular entonces no sólo la serie de Fourier de f converge uniformemente a f sino que también la serie de Fourier de f' converge uniformemente a f'. En particular se ha demostrado que, con las hipótesis de dicho ejercicio, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n|A_n| + n|B_n|$ es convergente. Muchas veces interesa obtener un resultado recíproco, y esto es lo que hacemos a continuación.

EJERCICIO 19.

Sea $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ continua tal que si

$$\left\{\frac{A_0}{2},\ A_n,\ B_n,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

son sus coeficientes de Fourier, entonces la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\,(|A_n| + |B_n|) \tag{3.31}$$

es convergente. Pruébese que f es de clase C^1 en $[-\pi, \pi]$.

Solución: Las hipótesis del ejercicio implican que las series

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot)))$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}(nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot)))$$

son uniformemente convergentes en $[-\pi, \pi]$. Luego, por el ejercicio 14,

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$.

Ahora bien, si

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(nx) - nA_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, es conocido que $f'(x) = g(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$. Como g es continua en $[-\pi, \pi]$, se tiene que f es de clase C^1 en $[-\pi, \pi]$.

Notas y comentarios.

1.- Los ejercicios 18 y 19 ponen de manifiesto la relación existente entre la regularidad de una función f y el hecho de que la serie (3.31) converja. Pensemos que la regularidad de una función es una propiedad local mientras que el hecho de que la serie (3.31) converja es una propiedad global (pues los coeficientes A_n y B_n dependen del valor de f en todo el intervalo $[-\pi, \pi]$). También en el ejercicio 7 (sobre el Criterio de Dini para convergencia puntual de Series de Fourier) se vió que el "comportamiento local de f cerca de un punto x_0" puede determinar que la serie de Fourier de f (para calcular la cual se necesitan los valores de f en $[-\pi, \pi]$) converja en x_0 a $f(x_0)$. Esta relación entre propiedades locales y globales de f es una constante en la teoría de Series de Fourier.

2.- El ejercicio 19 se puede fácilmente generalizar de la manera siguiente:

"Si $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ es continua y si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^k \left(|A_n| + |B_n|\right)$ es convergente para algún k natural, entonces f es de clase C^k en $[-\pi, \pi]$".

Como mencionamos en la introducción hay problemas que conducen al desarrollo en serie de una función utilizando sólo funciones de tipo $sen(n(\cdot))$ ó $cos(n(\cdot))$. De este tema nos vamos a ocupar en los ejercicios que siguen.

EJERCICIO 20.

Demostrar que el conjunto $\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$ es una base de $L^2(0, \pi)$.

Sugerencia: Considérense extensiones impares a $[-\pi, \pi]$ de las funciones de $L^2(0, \pi)$.

Solución: El conjunto dado es ortogonal en $L^2(0, \pi)$ (véase el ejercicio 13, apartado 3.- del Cap. I). Como, además, la norma de cada elemento es 1, el conjunto dado es ortonormal en $L^2(0, \pi)$. Veamos que es una base. Para ello utilizaremos la caracterización dada en el apartado c) del ejercicio 16, cap. I.

Sea $f \in L^2(0,\pi)$ tal que

$$< \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)), f >= \int_0^{\pi} f(x) \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(nx)\, dx = 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Considérese la función $\tilde{f} \in L^2(-\pi,\pi)$, definida como

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0 < x < \pi \\ -f(-x), & -\pi < x < 0 \end{cases}$$

Entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) cos(nx)\, dx = 0,\ \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$$

y

$$\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) sen(nx)\, dx = 2\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $\tilde{f} = 0\ en\ L^2(-\pi,\pi)$, lo que implica que $f = 0$ en $L^2(0,\pi)$.

Notas y comentarios.

1.- Que el conjunto dado sea una base de $L^2(0,\pi)$ significa que para cualquier función $f \in L^2(0,\pi)$ se tiene

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)), f > \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)) =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n sen(n(\cdot))$$

donde $\mathrm{B}_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$

La convergencia de la serie anterior debe entenderse en el sentido de $L^2(0,\pi)$; es decir,

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\pi} \left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{B}_k sen(kx) \right|^2 dx = 0\ ,\ \forall f \in L^2(0,\pi)$$

y la igualdad de Parseval es ahora

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi}{2} \mathrm{B}_n^2 = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n^2$$

2.- Lo que hemos hecho en los ejercicios anteriores para funciones del espacio $L^2(-\pi,\pi)$ utilizando la base (3.1) puede hacerse para funciones del espacio $L^2(0,\pi)$ utilizando la base dada en el ejercicio anterior; por lo tanto se podría obtener un criterio análogo al de Dini, ver la relación entre Series de Fourier, derivación e integración, etc. A título de ejemplo, y para que se vea que no todo queda exactamente igual que para $L^2(-\pi,\pi)$ con la base (3.1), veamos el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 21.

Sea $f:[0,\pi]\to\mathbb{R}$ absolutamente continua, cumpliendo que $f(0)=f(\pi)=0$ y $f'\in L^2(0,\pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f respecto de la base del ejercicio 20 converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Solución: Sea $\tilde{f}:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x)=\begin{cases} f(x)\,, & 0\le x\le\pi\\ -f(-x)\,, & -\pi\le x\le 0\end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\tilde{f}$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, $\tilde{f}$ es 2π-periódica ($\tilde{f}(-\pi)=0=\tilde{f}(\pi)$) y además $\tilde{f}'\in L^2(-\pi,\pi)$. Por lo tanto, por el ejercicio 15, se tiene que

$$\tilde{f}(x)=\frac{\mathrm{A}_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n cos(nx)+\mathrm{B}_n sen(nx)) \tag{3.32}$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$,

donde

$$\mathrm{A}_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)\,dx=0$$

$$\mathrm{A}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)cos(nx)\,dx=0\,,\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ y$$

$$\mathrm{B}_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)sen(nx)\,dx=$$

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\tilde{f}(x)sen(nx)\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)sen(nx)\,dx$$

Luego

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_n sen(nx)\ \text{ uniformemente en } [0,\pi],$$

donde

$$\mathrm{C}_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)sen(nx)\,dx\,,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Nota:

Obsérvese que la condición $f(0)=f(\pi)=0$ es necesaria, si se quiere tener convergencia uniforme de la serie de Fourier de f, a f en $[0,\pi]$, con la base del ejercicio 20.

EJERCICIO 22.

Demuéstrese que

$$cosx = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n} \tag{3.33}$$

de manera uniforme en $[0, \pi]$.

Solución: Considérese la función $f : [0, \pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = cosx - 1 + \frac{2x}{\pi}\ ,\ \forall x \in [0, \pi]$$

Es evidente que f cumple las hipótesis del ejercicio anterior y por lo tanto

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{B}_n sen(nx) \ \text{ uniformemente en } [0, \pi]$$

donde $\mathrm{B}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$.

Entonces

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\ dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx - \int_0^{\pi} sen(nx)\ dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xsen(nx)\ dx\right]$$

Ahora bien,

$$\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(sen(nx+x) + sen(nx-x))\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}(sen(n+1)x + sen(n-1)x)\ dx$$

Luego,

Si $n = 1$, $\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} sen(2x)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{-cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{4}\left[-cos(2\pi) + 1\right] = 0$$

Si $n > 1$, $\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\ dx =$

$$= \frac{1}{2}\left[\left[\frac{-cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{n+1}\left(-cos(n+1)\pi + 1\right) + \frac{1}{n-1}\left(-cos(n-1)\pi + 1\right)\right] =$$

$$= \begin{cases} \text{Si n es par} & \frac{1}{2}\left[\frac{2}{n+1}+\frac{2}{n-1}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{2n-\cancel{2}+2n+\cancel{2}}{n^2-1}\right]=\frac{2n}{n^2-1} \\ \\ \text{Si n es impar} & \frac{1}{2}\left[\frac{0}{n+1}-\frac{0}{n-1}\right]=0 \end{cases}$$

Así pues,

$$\int_0^{\pi} cosxsen(nx)\,dx = \begin{cases} \frac{2n}{n^2-1} & \text{si n es par} \\ 0 & \text{si n es impar} \end{cases} \tag{3.34}$$

Por otra parte,

$$\int_0^{\pi} sen(nx)\,dx = \left[\frac{-cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{-cos(n\pi)}{n}+\frac{1}{n} =$$

$$= \begin{cases} 0 & \text{si n es par} \\ \frac{2}{n} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

y

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} xsen(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\left[\left[x\frac{-cos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{cos(nx)}{n}\,dx\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\left[\frac{-xcos(nx)}{n}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{sen(nx)}{n^2}\right]_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{2}{\pi}\frac{-\pi cos(n\pi)}{n} = \frac{-2cos(n\pi)}{n} =$$

$$= \begin{cases} \frac{-2}{n} & \text{si n es par} \\ \\ \frac{2}{n} & \text{si n es impar} \end{cases}$$

En definitiva tenemos que

$$B_n = \begin{cases} \frac{2}{\pi}\left[\frac{2n}{n^2-1}-0-\frac{2}{n}\right]=\frac{4}{\pi n(n^2-1)} & \text{si n es par} \\ \\ \frac{2}{\pi}\left[0-\frac{2}{n}+\frac{2}{n}\right]=0 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Luego

$$cosx - 1 + \frac{2x}{\pi} = \sum_{n=1, n\ par}^{\infty}\frac{4}{\pi n(n^2-1)}sen(nx) \;\; \text{uniformemente en } [0,\pi]$$

Es decir, que

$$cos x = 1 - \frac{2x}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n} \text{ uniformemente en } [0,\pi].$$

Los tres ejercicios siguientes se refieren a desarrollos en serie de cosenos. El lector no tendrá (o no deberá tener) ninguna dificultad en resolverlos:

EJERCICIO 23.

Demuéstrese que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

es una base de $L^2(0,\pi)$. Escríbase la igualdad de Parseval en este caso.

Solución: Es trivial que el conjunto dado es ortonormal (véase el ejercicio 13, apartado 4), cap. I).

Sea $f\in L^2(0,\pi)$ tal que

$$<\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ f>=<\sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),\ f>=0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

Entonces

$$\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx = 0,\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Notemos por $\tilde{f}$ la extensión par de f a $[-\pi,\pi]$. Es decir,

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & 0<x<\pi \\ f(-x), & -\pi<x<0 \end{cases}$$

Entonces $\tilde{f}\in L^2(-\pi,\pi)$ y

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)cos(nx)\,dx = 2\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx = 0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

También,

$$\int_{-\pi}^{\pi}\tilde{f}(x)sen(nx)\,dx = 0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Por lo tanto, $\tilde{f}=0$ en $L^2(-\pi,\pi)$, lo que implica que $f=0$ en $L^2(0,\pi)$.

Escribamos ahora la igualdad de Parseval. Por lo que hemos demostrado, se cumple que

$$f=<\frac{1}{\sqrt{\pi}},f>\frac{1}{\sqrt{\pi}}+\sum_{n=1}^{\infty}<\sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),f>\sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)),$$

$\forall f \in L^2(0,\pi)$

Luego

$$f = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\,dx + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx\right)cos(n(\cdot)) =$$

$$= \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n cos(n(\cdot))$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

La igualdad de Parseval es

$$\|f\|^2 = \int_0^{\pi} |f(x)|^2\,dx =$$

$$= \left(< \frac{1}{\sqrt{\pi}}, f >\right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(< \sqrt{\frac{2}{\pi}}cos(n(\cdot)), f >\right)^2 =$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{A_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^2\right)\ ,\ \forall f \in L^2(0,\pi).$$

EJERCICIO 24.

Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ absolutamente continua tal que $f' \in L^2(0,\pi)$. Demuéstrese que la serie de Fourier de f respecto de la base del ejercicio anterior converge uniformemente a f en $[0,\pi]$.

Solución: Sea $\tilde{f} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x) & 0 \le x \le \pi \\ f(-x) & -\pi \le x < 0 \end{cases}$$

Es fácil comprobar que $\tilde{f}$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, $\tilde{f}$ es 2π-periódica $\left(\tilde{f}(-\pi) = f(\pi) = \tilde{f}(\pi)\right)$ y $\tilde{f}' \in L^2(-\pi,\pi)$.

Por lo tanto, por el ejercicio 15, se tiene que

$$\tilde{f}(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(nx) + B_n sen(nx))$$

uniformemente en $[-\pi,\pi]$ donde

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x)cos(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx,$$

$\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

$$\mathrm{B}_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{f}(x) sen(nx)\, dx = 0\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Luego

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n cos(nx) \text{ uniformemente en } [0,\pi], \text{ donde}$$

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

EJERCICIO 25.

Demuéstrese que

$$senx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{1-4n^2} \text{ uniformemente en } [0,\pi].$$

Solución: La función $f(x) = senx$ satisface la hipótesis del ejercicio anterior. Por lo tanto

$$f(x) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n cos(nx) \text{ uniformemente en } [0,\pi]$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx.$$

Ahora bien,

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} senx\ cos(nx)\, dx =$$

$$= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{1}{2}\left[sen(x+nx) + sen(x-nx)\right]\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} (sen((n+1)x) + sen((1-n)x))\, dx$$

Así pues

$$\mathrm{A}_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} senx\, dx = \frac{2}{\pi}\left(-cosx]_0^{\pi}\right) = \frac{2}{\pi}\left(-cos(\pi)+1\right) = \frac{4}{\pi}$$

$$\mathrm{A}_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} sen(2x)\, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\left.\frac{-cos(2x)}{2}\right]_0^{\pi}\right) = \frac{1}{\pi}\left(\frac{-cos(2\pi)}{2} + \frac{1}{2}\right) = 0$$

y si $n > 1$,

$$A_n = \frac{1}{\pi}\left[\left[\frac{-cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{-cos(1-n)x}{1-n}\right]_0^{\pi}\right] =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[\frac{-cos(n+1)\pi}{n+1} + \frac{1}{n+1} - \frac{cos(1-n)\pi}{1-n} + \frac{1}{1-n}\right]$$

Luego, si $n > 1$,

$$A_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi}\left[\dfrac{2}{n+1} + \dfrac{2}{1-n}\right] = \dfrac{4}{\pi(1-n^2)} & \text{si n es par} \\ \\ \dfrac{1}{\pi}[0-0] = 0 & \text{si n es impar} \end{cases}$$

Por lo tanto

$$senx = \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1, n\ par}^{\infty} \frac{4}{\pi(1-n^2)} cos(nx) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4cos(2nx)}{\pi(1-4n^2)} \quad \text{uniformemente en } [0, \pi].$$

Una nota más antes de seguir (absolutamente necesaria)

En los ejercicios 20 y 23 se ha demostrado que los conjuntos

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

forman bases de $L^2(0, \pi)$. El lector encontrará más adelante, cuando apliquemos los resultados obtenidos para Series de Fourier al estudio de las Ecuaciones de la Física Matemática en los capítulos III y IV, que ambas bases son igual de necesarias y de útiles. Será el problema concreto que estemos estudiando el que decida qué tipo de base se ha de utilizar. Pero sobre lo que sí quiero llamar la atención, es sobre el hecho de que las hipótesis necesarias para poder obtener resultados sobre convergencia puntual, convergencia uniforme, etc, son diferentes dependiendo de la base que se utilice (véase, por ejemplo, los ejercicios 21 y 24).

Mi recomendación es que se tengan siempre de referencia los resultados obtenidos para funciones de $L^2(-\pi, \pi)$ con la base (3.1) y si queremos obtener algún resultado para funciones de $L^2(0, \pi)$, deben hacerse extensiones convenientes de dichas funciones a $L^2(-\pi,\pi)$.

El ejercicio que sigue se refiere a un espacio $L^2(a,b)$ general. En él se ponen de manifiesto claramente algunas afirmaciones de la nota precedente.

EJERCICIO 26.

1. Demuéstrese que los conjuntos siguientes son bases de $L^2(a,b)$:

   1.-

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}},\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a},\right. \tag{3.35}$$

$$\left.\sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a},\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

   2.-

$$\left\{\sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(x-a)}{b-a},\ n\in\mathbb{N}\right\} \tag{3.36}$$

   3.-

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}},\ \sqrt{\frac{2}{b-a}}cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a},\ n\in\mathbb{N}\right\} \tag{3.37}$$

2. Escríbase la igualdad de Parseval para cada una de las bases anteriores.

3. Descríbanse condiciones suficientes que garanticen la convergencia uniforme de la serie de Fourier de una función dada $f\in L^2(a,b)$, a f, respecto de cada una de las bases del apartado a).

Solución:

1. 1.- Es el ejercicio 19, cap. I.

   2.- La aplicación que lleva el intervalo $[a,b]$ en $[0,\pi]$ es $r:[a,b]\to[0,\pi]/r(x)=\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$. Luego mediante el cambio de variable $y=\dfrac{\pi(x-a)}{b-a}$, y utilizando el hecho de que el conjunto del ejercicio 20 es una base de $L^2(0,\pi)$, es inmediato comprobar que (3.36) es una base de $L^2(a,b)$.

   3.- Es idéntico al apartado anterior utilizando el hecho de que el conjunto del ejercicio 23 es una base de $L^2(0,\pi)$.

2. **Para la base 3.35:**

   $\forall f\in L^2(a,b)$ se tiene que

$$f=a_0\frac{1}{\sqrt{b-a}}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sqrt{\frac{2}{b-a}}cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right)+$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\left(b_n\sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right)$$

donde

$$a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{b-a}} >$$

$$a_n =< f, \sqrt{\frac{2}{b-a}}cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

$$b_n =< f, \sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

Luego

$$f = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{A}_n cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a} + \right. \\ \left. + \mathrm{B}_n sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\right) \tag{3.38}$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)cos\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx\ , \ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$$

$$\mathrm{B}_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)sen\frac{n\pi(2x-a-b)}{b-a}\,dx\ , \ \forall n \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\,dx = \\ = \frac{b-a}{2}\left[\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(\mathrm{A}_n^2 + \mathrm{B}_n^2)\right], \ \forall f \in L^2(a,b) \tag{3.39}$$

(compárese con (3.7)).

Para la base 3.36:

$\forall f \in L^2(a,b)$ se tiene que

$$f = \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right)$$

donde

$$a_n =< f, \sqrt{\frac{2}{b-a}}sen\frac{n\pi(x-a)}{b-a} >, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Además,

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$$

Luego

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{A}_n sen\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right),$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)sen\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

y

$$\begin{aligned}\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\, dx = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{b-a}{2}\mathrm{A}_n^2 = \\ = \frac{b-a}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n^2,\ \forall f \in L^2(a,b)\end{aligned} \tag{3.40}$$

(compárese con el ejercicio 20, nota 1).

Para la base 3.37

Realizando un proceso análogo a los dos casos anteriores se obtendría que

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2\, dx = \frac{b-a}{2}\left(\frac{\mathrm{A}_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{A}_n^2\right)$$

donde

$$\mathrm{A}_n = \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)cos\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\, dx\ ,\ \forall n \in \mathbb{N}\cup\{0\}.$$

(compárese con el ejercicio 23)

3. **Para la base 3.35**

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua,

$f(a) = f(b)$ y $f' \in L^2(a, b)$.

Para la base 3.36

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua,

$f(a) = f(b) = 0$ y $f' \in L^2(a, b)$.

Para la base 3.37

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es absolutamente continua y

$f' \in L^2(a, b)$.

Para terminar este capítulo vamos a ver algunas aplicaciones de las Series de Fourier. Constituyen una pequeñísima muestra de las posibilidades de aplicación de la teoría de tales series y de hecho, los dos capítulos que siguen estarán dedicados en su integridad al estudio de las Ecuaciones Clásicas de la Física Matemática utilizando series de Fourier.

Comenzamos con algunos resultados referentes a la aproximación uniforme de funciones continuas.

EJERCICIO 27.

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y 2π-periódica. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathrm{R}^+$ puede encontrarse un polinomio trigonométrico g_ε tal que

$$|f(x) - g_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon\ ,\ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Sugerencia: Demostrar que una función continua y 2π-periódica puede aproximarse de manera uniforme "tanto como se quiera" por funciones del tipo H (Nota 2, Ejercicio 15) y utilizar el resultado del ejercicio 15.

Solución: Recordemos en primer lugar que un polinomio
trigonométrico es una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma

$$g(x) = \sum_{k=0}^{n} (C_k cos(kx) + D_k sen(kx))$$

con $C_k,\ D_k$ números reales, $0 \leq k \leq n$.

Sea $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Veamos que existe una función $h_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ que pertenece al conjunto H (ver notas del ejercicio 15) y cumpliendo además que

$$|f(x) - h_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon/2,\ \forall x \in [-\pi, \pi] \tag{3.41}$$

(la idea para construir h_ε es construir una "poligonal a trozos" que aproxime a f como en (3.41) utilizando para ello la continuidad uniforme de f en $[-\pi, \pi]$)

En efecto, como f es continua en $[-\pi, \pi]$, f es uniformemente continua en $[-\pi, \pi]$ y por tanto dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ existe $\delta(\varepsilon) \in \mathrm{R}^+$ tal que si $x, y \in [-\pi, \pi]$ y $|x - y| \leq \delta$, entonces $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon/4$.

Tomemos una partición del intervalo

$[-\pi, \pi] : x_0 = -\pi < x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_{n-1} < x_n = \pi$ tal que $|x_i - x_{i-1}| \leq \delta,\ 1 \leq i \leq n$ y definamos la función $h_\varepsilon : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ como

$$h_\varepsilon(x) = f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1}),\ \forall x \in [x_{i-1}, x_i],$$

$1 \leq i \leq n$ (es decir, en cada intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, h_ε viene definida por la ecuación de la recta que une los puntos $(x_i,\ f(x_{i-1})), (x_i,\ f(x_i))$.

h_ε es una función del conjunto H (pues $h_\varepsilon \in$ C (Ejercicio 16)) y además, si $x \in [-\pi, \pi]$, entonces x debe pertenecer a algún intervalo

$[x_{i-1},\ x_i],\ 1 \leq i \leq n$. Por lo tanto

$$|f(x) - h_\varepsilon(x)| = |f(x) - f(x_{i-1}) - \frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}(x - x_{i-1})| \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \frac{|x - x_{i-1}|}{|x_i - x_{i-1}|} \leq$$

$$\leq |f(x) - f(x_{i-1})| + |f(x_i) - f(x_{i-1})| \leq \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Por otra parte como $h_\varepsilon \in$ H, la serie de Fourier de h_ε converge uniformemente a h_ε en $[-\pi, \pi]$, y por lo tanto, existe $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que

$$\left| h_\varepsilon(x) - \frac{\mathrm{A}_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon/2\ , \tag{3.42}$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$ donde $\left\{ \frac{\mathrm{A}_0}{2},\ \mathrm{A}_k,\ \mathrm{B}_k,\ k \in \mathbb{N} \right\}$ son los coeficientes de Fourier de h_ε.

Ahora (3.41) y (3.42) implican que si $n \geq n_0(\varepsilon)$,

$$\left| f(x) - \frac{\mathrm{A}_0}{2} - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \leq \varepsilon\ , \tag{3.43}$$

$\forall x \in [-\pi, \pi]$. Pero como f (por hipótesis) y cualquier polinómio trigonométrico son funciones 2π-periódicas, (3.43) se cumple $\forall x \in \mathbb{R}$.

EJERCICIO 28. (Teorema de aproximación de Weierstrass)

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ continua. Demostrar que para cada $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ puede encontrarse un polinómio p_ε tal que

$$|f(x) - p_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon,\ \forall x \in [a, b].$$

Sugerencia: Si $[a,b] \subset (-\pi,\pi)$, aplíquese el resultado del ejercicio anterior a una extensión conveniente (continua y 2π-periódica) de f. Esto proporciona un cierto polinomio trigonométrico al que se puede (y debe) aplicar ahora el desarrollo de Taylor de una función. Si $[a,b]$ es general, considérese $g : [-\pi/2,\ \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por

$$g(x) = f\left(\frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}\right).$$

Solución:

1. Sea $[a,b] \subset (-\pi,\ \pi)$. Definamos $h : [-\pi,\ \pi] \to \mathbb{R}$ como

$$h(x) = \begin{cases} f(a)\dfrac{x+\pi}{a+\pi}, & x \in [-\pi, a] \\ \\ f(x), & x \in [a,b] \\ \\ f(b)\dfrac{x-\pi}{b-\pi}, & x \in [b,\pi] \end{cases}$$

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, por el ejercicio anterior, existe un polinomio trigonométrico $\mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{n}(\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))$ tal que

$$\left| h(x) - \mathrm{A}_0 - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \le \varepsilon/2\ ,$$

$\forall x \in [-\pi,\pi]$. Luego, $\forall x \in [a,b]$ se cumple que

$$\left| f(x) - \mathrm{A}_0 - \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx)) \right| \le \varepsilon/2 \tag{3.44}$$

Consideremos la función $p : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ definida por

$$p(x) = \mathrm{A}_0 + \sum_{k=1}^{n} (\mathrm{A}_k cos(kx) + \mathrm{B}_k sen(kx))$$

Es fácil ver que existe una constante $c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$\left| p^{r)}(x) \right| \le c|n|^r\ ,\ \forall x \in [-\pi,\pi]\ y\ \forall r \in \mathbb{N}$$

y por lo tanto, utilizando el desarrollo de Taylor de p en $x = 0$, existe un polinomio $p_\varepsilon(x)$ tal que

$$|p(x) - p_\varepsilon(x)| \le \varepsilon/2\ ,\ \forall x \in [-\pi,\pi] \tag{3.45}$$

(*intente el lector probar* (3.45) *ya que es un ejercicio instructivo de Análisis elemental*)

(3.44) y (3.45) proporcionan el resultado deseado.

2. Sea $[a, b]$ un intervalo cualquiera. Consideramos la función $g : [-\pi/2, \pi/2] \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = f\left(\frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}\right)$. La función g está en las condiciones del apartado a) y por lo tanto existe un polinomio $q_\varepsilon(x)$ tal que

$$|g(x) - q_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon \,, \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Es decir, que

$$\left| f\left(\frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}\right) - q_\varepsilon(x) \right| \leq \varepsilon \,, \ \forall x \in [-\pi/2, \pi/2]$$

Si $y = \frac{b-a}{\pi}x + \frac{a+b}{2}$, entonces

$$\left| f(y) - q_\varepsilon\left(\frac{(2y-a-b)\pi}{2(b-a)}\right) \right| \leq \varepsilon \,, \ \forall y \in [a, b]$$

Como $q_\varepsilon\left(\frac{(2y-a-b)\pi}{2(b-a)}\right) \equiv p_\varepsilon(y)$ es un polinomio en y, hemos probado el resultado.

El siguiente ejercicio se refiere a desigualdades integrales que son muy útiles en la teoría de Ecuaciones Diferenciales.

EJERCICIO 29.

1. Sea f absolutamente continua en $[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$ y $f' \in L^2(-\pi, \pi)$. Demostrar que si $\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0$, entonces

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\,dx \ \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2\,dx \qquad (3.46)$$

con igualdad si y sólo si f es de la forma

$$asen(\cdot) + bcos(\cdot), \ a, b \in \mathbb{R}.$$

2. Sea f absolutamente continua en $[0, \pi]$ tal que $f(0) = f(\pi) = 0$ y $f' \in$

$L^2(0,\pi)$. Demostrar que

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \ \leq \int_0^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx \tag{3.47}$$

con igualdad si y sólo si f es de la forma

$$a sen(\cdot), \ a \in \mathbb{R}.$$

Solución:

1. Si

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(n(\cdot)) + B_n sen(n(\cdot)))$$

es la serie de Fourier de f, sabemos que la serie de Fourier de f' es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (nB_n cos(n(\cdot)) - nA_n sen(n(\cdot)))$$

Además, $A_0 = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \, dx = 0$; luego, por la igualdad de Parseval aplicada a f y f', tenemos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 \, dx =$$

$$= \pi \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(B_n^2 + A_n^2 \right) - \sum_{n=1}^{\infty} \left(B_n^2 + A_n^2 \right) \right] =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} ((n^2 - 1)B_n^2 + (n^2 - 1)A_n^2)$$

que prueba (3.46).

Ahora bien, si en (3.4) tenemos una igualdad, entonces $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} ((n^2 - 1)B_n^2 + (n^2 - 1)A_n^2) = 0$, lo que implica que $A_n = B_n = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$. Luego la serie de Fourier de f es

$$A_1 cos(\cdot) + B_1 sen(\cdot).$$

Como dicha serie de Fourier debe converger uniformemente a f, tenemos que

$$f(x) = A_1 cos(x) + B_1 sen(x), \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

2. Sea $\tilde{f} : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ la extensión impar a $[-\pi, \pi]$ de f; es decir

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in [0, \pi] \\ -f(-x), & x \in [-\pi, 0] \end{cases}$$

Si $\tilde{f}$ tiene por serie de Fourier

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\mathrm{A}_n cos(n(\cdot)) + \mathrm{B}_n sen(n(\cdot)))$$

entonces la serie de Fourier de $\tilde{f}'$ es

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n\mathrm{B}_n cos(n(\cdot)) - n\mathrm{A}_n sen(n(\cdot)))$$

Como $\tilde{f}$ es impar, $\mathrm{A}_n = 0, \ \forall n \in \mathrm{N} \cup \{0\}$, luego

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}'(x)|^2 \, dx - \int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{f}(x)|^2 \, dx =$$

$$= 2\left(\int_0^{\pi} |\tilde{f}'(x)|^2 \, dx - \int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, dx \right) =$$

$$= \pi \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)\mathrm{B}_n^2$$

Luego

$$\int_0^{\pi} |f'(x)|^2 \, dx - \int_0^{\pi} |f(x)|^2 \, dx = \frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)\mathrm{B}_n^2$$

que prueba (3.47).

Si (3.47) es una igualdad, entonces $\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 - 1)\mathrm{B}_n^2 = 0$, lo que obliga a que $\mathrm{B}_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$.

Luego $\tilde{f}(x) = \mathrm{B}_1 sen(x)$, $\forall x \in [-\pi, \pi]$, de donde se obtiene que $f(x) = \mathrm{B}_1 sen(x)$, $\forall x \in [0, \pi]$.

La última aplicación que vamos a ver surge de un problema muy conocido: Entre todas las curvas planas, cerradas y simples, de longitud dada L, ¿existe alguna de ellas cuyo interior tenga la máxima área?; si la respuesta es positiva, ¿qué curvas verifican tal propiedad?

Como vamos a ver mediante el uso de Series de Fourier, la anterior cuestión puede resolverse de manera elemental.

EJERCICIO 30.

Sea A el conjunto formado por todas las curvas planas, cerradas y simples, de longitud dada $L > 0$, cuyas ecuaciones paramétricas respecto del parámetro arco vienen dadas por funciones de clase C^1 en $[0, L]$.

1. Demostrar que si $\gamma \in$ A, entonces

$$\mathrm{S} \leq \frac{L^2}{4\pi} \tag{3.48}$$

   donde S es el área del dominio interior a γ.

2. Demostrar que la igualdad se da en (3.48) si y sólo si γ es cualquier circunferencia de longitud L.

Solución:

1. Sea $\gamma \in$ A, con ecuaciones paramétricas $x = x(s), y = y(s)$, donde $x, y : [0, L] \to \mathbb{R}$ son de clase C^1. Por ser γ cerrada, $x(0) = x(L),\ y(0) = y(L)$.

   Por el apartado a), 1) del ejercicio 26, una base de $L^2(0, L)$ es el conjunto

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{L}},\ \sqrt{\frac{2}{L}} cos \frac{n\pi(2x - L)}{L},\ \sqrt{\frac{2}{L}} sen \frac{n\pi(2x - L)}{L},\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

   de manera que, notando por

$$\frac{\mathrm{A}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{A}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} + \mathrm{B}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$

$$\frac{\mathrm{C}_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\mathrm{C}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} + \mathrm{D}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$

   las Series de Fourier respectivas de las funciones $x,\ y$, tendremos que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{B}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{A}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$

   y

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{D}_n cos \frac{n\pi(2x - L)}{L} - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{C}_n sen \frac{n\pi(2x - L)}{L} \right)$$

   serán las Series de Fourier respectivas de x' e y'.

   Ahora bien, si S es el área de γ_i (interior de γ), entonces

$$\mathrm{S} = \frac{1}{2} \int_0^L \left(x(s)y'(s) - y(s)x'(s) \right)\, ds =$$

$$= \frac{1}{2} < x, y' > - \frac{1}{2} < y, x' >$$

De manera que como

$$\frac{1}{2} < x, y' > =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{A}_n \mathrm{D}_n < cos \frac{n\pi(2x-L)}{L},\ cos \frac{n\pi(2x-L)}{L} > - \right.$$

$$\left. - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{B}_n \mathrm{C}_n < sen \frac{n\pi(2x-L)}{L},\ sen \frac{n\pi(2x-L)}{L} > \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{A}_n \mathrm{D}_n \frac{L}{2} - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{B}_n \mathrm{C}_n \frac{L}{2} \right) =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \left(\mathrm{A}_n \mathrm{D}_n - \mathrm{B}_n \mathrm{C}_n \right)$$

y análogamente

$$\frac{1}{2} < y, x' > = \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2n\pi}{L} \mathrm{C}_n \mathrm{B}_n \frac{L}{2} - \frac{2n\pi}{L} \mathrm{D}_n \mathrm{A}_n \frac{L}{2} \right) \right)$$

Se tendrá que

$$\mathrm{S} = \sum_{n=1}^{\infty} n\pi \left(\mathrm{A}_n \mathrm{D}_n - \mathrm{B}_n \mathrm{C}_n \right) \tag{3.49}$$

Por otra parte, al ser s el parámetro arco, sabemos que

$$\left(x'(s)\right)^2 + \left(y'(s)\right)^2 = 1\ ,\ \forall s \in [0, L]$$

y así

$$L = \int_0^L 1\ ds = \int_0^L \left(x'(s)\right)^2\ ds + \int_0^L \left(y'(s)\right)^2\ ds =$$

= (igualdad de Parseval) =

$$= \frac{L}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2\pi^2}{L^2} \mathrm{B}_n^2 + \frac{4n^2\pi^2}{L^2} \mathrm{A}_n^2 \right) \right) +$$

$$+ \frac{L}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4n^2\pi^2}{L^2} \mathrm{D}_n^2 + \frac{4n^2\pi^2}{L^2} \mathrm{C}_n^2 \right) \right) =$$

$$= \frac{L}{2} \frac{4\pi^2}{L^2} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(\mathrm{B}_n^2 + \mathrm{A}_n^2 + \mathrm{D}_n^2 + \mathrm{C}_n^2 \right) =$$

$$= \frac{2\pi^2}{L} \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(B_n^2 + A_n^2 + D_n^2 + C_n^2\right)$$

Así pues:

$$L^2 = 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(B_n^2 + A_n^2 + D_n^2 + C_n^2\right) \tag{3.50}$$

y por lo tanto

$$L^2 - 4\pi S =$$

$$= 2\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2\right) -$$

$$-4\pi^2 \sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n D_n - B_n C_n\right) =$$

$$= 2\pi^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} n^2 \left(A_n^2 + B_n^2 + C_n^2 + D_n^2\right) - 2\sum_{n=1}^{\infty} n \left(A_n D_n - B_n C_n\right)\right] =$$

$$= 2\pi^2 \left[\sum_{n=1}^{\infty} \left((nA_n - D_n)^2 + (nB_n + C_n)^2 + \right.\right.$$

$$\left.\left. +(n^2-1)C_n^2 + (n^2-1)D_n^2\right)\right]$$

Luego

$$L^2 - 4\pi S \geq 0, \ \forall \gamma \in A$$

que es (3.48).

2. Si $\gamma \in A$ es tal que $S = \dfrac{L^2}{4\pi}$, entonces

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left[(nA_n - D_n)^2 + (nB_n + C_n)^2 + (n^2-1)C_n^2 + (n^2-1)D_n^2\right] = 0$$

Luego $A_1 - D_1 = 0\,,\ B_1 + C_1 = 0$ y

$$nA_n - D_n = nB_n + C_n = C_n = D_n = 0, \ \forall n \in \mathbb{N}, \ n \geq 2$$

Por lo tanto

$$A_1 - D_1 = 0\,,\ B_1 + C_1 = 0 \ y \ A_n = B_n = C_n = D_n = 0$$

para todo natural $n \geq 2$.

Así pues

$$x(s) = \frac{\mathrm{A}_0}{2} + \mathrm{A}_1 cos\frac{n\pi(2x-L)}{L} + \mathrm{B}_1 sen\frac{n\pi(2x-L)}{L}$$
$$y(s) = \frac{\mathrm{C}_0}{2} - \mathrm{B}_1 cos\frac{n\pi(2x-L)}{L} + \mathrm{A}_1 sen\frac{n\pi(2x-L)}{L} \tag{3.51}$$

Con $\mathrm{A}_0,\ \mathrm{C}_0, \mathrm{A}_1, \mathrm{B}_1 \in \mathbb{R}$ arbitrarios, satisfaciendo (3.50)

$\left(L^2 = 2\pi^2\left(\mathrm{B}_1^2 + \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{D}_1^2 + \mathrm{C}_1^2\right) = 4\pi^2\left(\mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2\right)\right)$

Ahora bien, (3.51) son las ecuaciones paramétricas de una circunferencia centrada en $\left(\frac{\mathrm{A}_0}{2}, \frac{\mathrm{C}_0}{2}\right)$ y de radio $\frac{L}{2\pi}$, pues

$$\left(x(s) - \frac{\mathrm{A}_0}{2}\right)^2 + \left(y(s) - \frac{\mathrm{C}_0}{2}\right)^2 = \mathrm{A}_1^2 + \mathrm{B}_1^2 = \frac{L^2}{4\pi^2}\ ,$$

$\forall s \in [0, L]$.

Capítulo 4

La ecuación del calor

4.1. Algunas nociones previas necesarias para entender el capítulo.

4.1.1. Sobre problemas de valores propios para Ecuciones Diferenciales Ordinarias

Comenzamos recordando algunas nociones básicas sobre problemas de valores propios para ecuaciones diferenciales ordinarias lineales.

Sea μ un número real dado y consideremos la ecuación diferencial ordinaria

$$Z'(t) - \mu Z(t) = 0,\ t \in I,$$

donde I es cualquier intervalo no trivial de $\mathbb{R}$. Entonces el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación previa es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $Z(t) = \exp(\mu t)$, $\forall\ t \in I$.

En este capítulo se nos van a plantear los problemas de valores propios:

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0, \pi],\ X(0) = X(\pi) = 0, \qquad (PVP1)$$

y

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0, \pi],\ X'(0) = X'(\pi) = 0. \qquad (PVP2)$$

Una solución de (PVP1) (o (PVP2)) es cualquier función $X \in C^2[0, \pi]$, que satisface (PVP1) (o (PVP2)) puntualmente. Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) (o (PVP2)) tiene solución no trivial. Así, diremos que μ es valor propio de (PVP1) (o (PVP2)) si (PVP1) (o (PVP2)) admite alguna solución no trivial.

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes ([15]). Para ello, recordemos que, fijado μ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0$, $x \in [0, \pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:

- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1,\ X^2(x) = x,\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones
$X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x),\ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones
$X^1(x) = cos(\sqrt{-\mu}x),\ X^2(x) = sen(\sqrt{-\mu}x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

Centremos ahora nuestra atención en el problema (PVP1). Cualquier solución de éste es de la forma $X(x) = c_1X^1(x) + c_2X^2(x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

- Si $\mu = 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1 + c_2\pi = 0, \end{gathered}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$. Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).

- Si $\mu > 0$,

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 = 0, \\ c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$. Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).

- Si $\mu < 0$,

$$\begin{gathered} c_1 = 0, \\ c_1cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0. \end{gathered}$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto $\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

En lo que respecta al problema (PVP2), también cualquier solución es de la forma $X(x) = c_1X^1(x) + c_2X^2(x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$, con c_1 y c_2 números reales arbitrarios. Imponiendo las condiciones de contorno dadas en (PVP2), llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:

- Si $\mu = 0$,

$$c_2 = 0.$$

Por tanto, $\mu = 0$ es valor propio de (PVP2). En este caso, el conjunto de soluciones de (PVP2) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función constante $Y_0(x) = 1,\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

- Si $\mu > 0$,

$$c_1\sqrt{\mu} + c_2(-\sqrt{\mu}) = 0,$$
$$c_1\sqrt{\mu}\exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2(-\sqrt{\mu})\exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $-\mu(\exp(-\sqrt{\mu}\pi) + \mu\exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$, con lo que no existe ningún valor propio de (PVP2) positivo.

- Si $\mu < 0$,

$$c_2 = 0,$$
$$c_1(-sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0.$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$, o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP2) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $Y_n(x) = cos(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP2) es el conjunto $\{-n^2,\ n \in \mathbb{N}\ \cup \{0\}\}$. Si $\mu = -n^2$, para algún n natural o cero, el conjunto de soluciones de (PVP2) es un espacio vectorial real de dimensión uno cuya base está formada por la función $Y_n(x) = cos(nx),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

4.1.2. Sobre derivación parcial de funciones definidas por series de funciones de dos variables

Sea $\{w_n(x, t)\}$ una sucesión de funciones reales continuas definidas en $[a, b]\times[c, d]$, tales que existe alguna sucesión de números reales $\{a_n\}$, verificando

$$|w_n(x, t)| \leq a_n,\ \forall\ (x, t) \in [a, b] \times [c, d]$$

y

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

es convergente. Entonces se puede definir la función

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x,t),\ \forall\ (x,t) \in [a,b] \times [c,d],$$

y w es continua en $[a,b] \times [c,d]$.

Supongamos además que, para $t_0 \in [c,d]$ fijo, y para cada $n \in \mathbb{N}$, existen las derivadas parciales $\dfrac{\partial w_n(x,t_0)}{\partial x}$, $\forall x \in [a,b]$ (para $x = a$ o $x = b$ se entienden derivadas laterales) y alguna sucesión de números reales $\{b_n\}$, verificando

$$\left| \frac{\partial w_n(x,t_0)}{\partial x} \right| \leq b_n,\ \forall\ x \in [a,b],$$

tal que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

es convergente. Entonces existe $\dfrac{\partial w(x,t_0)}{\partial x}$, $\forall\ x \in [a,b]$ y

$$\frac{\partial w(x,t_0)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial w_n(x,t_0)}{\partial x},\ \forall\ x \in [a,b].$$

Obviamente, un resultado similar es válido para la variable t y para derivadas parciales de orden superior (véase [4]).

4.1.3. Sobre derivación bajo el signo integral

Sea $w : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$, $(x,t) \to w(x,t)$ una función continua. Entonces, la función $H : [c,d] \to \mathbb{R}$, definida por

$$H(t) = \int_a^b w(x,t)\, dx,\ \forall\ t \in [c,d],$$

es continua.

Si, además, la función $\dfrac{\partial w(x,t)}{\partial t}$ existe y es continua en $[a,b] \times (c,d)$, entonces

$$H'(t) = \int_a^b \frac{\partial w(x,t)}{\partial t}\, dx,\ \forall\ t \in (c,d).$$

(véase [4]).

4.2. Presentación del capítulo y resumen de resultados fundamentales.

En este capítulo aplicamos los conocimientos adquiridos en los anteriores al estudio de dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi, \end{array}\right. \qquad (C1)$$

y

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} & = & \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \leq x \leq \pi. \end{array}\right. \qquad (C2)$$

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.

Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, donde se sustituye el hecho de que la varilla se mantenga en sus extremos a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados (véase [39] para detalles).

La Ecuación en Derivadas Parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (C)$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto lo probamos con detalle en este capítulo. No obstante, también se puede intuir desde el principio alguna diferencia cualitativa importante en lo que se refiere al comportamiento asintótico (cuando el tiempo tiende a $+\infty$) de las soluciones de ambos problemas: mientras que para (C1) se tendrá $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0$, para (C2) se cumple $\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = b$, constante que, en general, no es cero.

Designemos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq \pi, 0 < t \leq T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ y que satisface (C1) puntualmente.

En una primera etapa, usando el método de separación de variables, calculamos la única solución de (C1) en casos sencillos. En una segunda etapa, usando tales casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} sen(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N}, \right\}$$

estudiada en el capítulo II, probamos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1): *Si $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ es continua y satisface $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces (C1) tiene una única solución dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) \exp(-n^2 t),\ si\ t > 0, \\ \\ f(x),\ si\ t = 0, \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx,\ \forall n \in \mathbb{N}.$$

A continuación mostramos algunas propiedades referentes al comportamiento cualitativo de la solución: dependencia continua de la única solución de (C1) respecto de la temperatura inicial f, regularidad C^{∞} de tal solución para cualquier tiempo positivo y el hecho de que, sea quién sea la temperatura inicial, la única solución de (C1) tiende a cero cuando el tiempo diverge a $+\infty$.

En lo que respecta al problema (C2), una solución es cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (C2) puntualmente.

Nuevamente, aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos, y usando estos, y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}},\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} cos(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

estudiada también en el capítulo II, mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2): *Si* $f \in C[0,\pi]$ *es* C^1 *a trozos en* $[0,\pi]$*, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx)\exp(-n^2 t), \; si\, t > 0, \\ f(x), \;\; si\, t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Probamos, además, algunas propiedades sobre la dependencia continua de la única solución de (C2), respecto de la temperatura inicial f. Asímismo, se cumple en este caso la regularidad C^∞ de las soluciones, para cualquier tiempo positivo. En cambio, el comportamiento asintótico de las soluciones es ahora distinto del mostrado para el problema (C1). Para (C2) demostramos que, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, las soluciones convergen a una constante, en general no nula. Esto se corresponde con el hecho de que, al estar en (C2) los extremos y la superficie lateral de la varilla aislada, entonces no puede entrar ni salir calor de la misma, con lo que éste no se pierde; lo que sí tiende es a difundirse el calor, de manera homogénea, por la varilla.

Además de los resultados mostrados sobre existencia y unicidad de soluciones para (C1) y (C2), hay otro muy importante que se expone en este capítulo, conocido con el nombre de **principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor**. Se corresponde con el hecho intuitivo siguiente: si la superficie lateral de la varilla está aislada (así que no puede ni entrar ni salir calor), las temperaturas máxima y mínima de la barra se alcanzan en el tiempo $t = 0$, o en los extremos de la misma. Esto no viene sino a confirmar el conocido hecho de que el calor fluye de las partes más calientes a las partes más frías, tendiendo a alcanzarse una temperatura de equilibrio (es decir, que no depende del tiempo futuro) cuando el tiempo crece lo suficiente.

De manera más precisa, si $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ es cualquier solución de la ecuación del calor en Ω, y

$$\partial_1\Omega = (\{0\} \times [0,T]) \cup (\{\pi\} \times [0,T]) \cup ([0,\pi] \times \{0\}),$$

(frontera parabólica de Ω), entonces, si

$$m = \min_{\partial_1\Omega} u, \; M = \max_{\partial_1\Omega} u,$$

se tiene $m = \min_{\overline{\Omega}} u, \; M = \max_{\overline{\Omega}} u$.

A lo largo del capítulo se estudian además, otros problemas similares a (C1) y (C2), con objeto de que el lector se familiarice con la aplicación del método de Fourier a problemas de la Física Matemática. El comentario final da alguna idea de la generalidad de este método.

4.3. Desarrollo del capítulo III

En este capítulo aplicaremos los conocimientos adquiridos en los anteriores para estudiar algunos problemas de tipo mixto para la llamada ecuación del calor. Tales problemas tienen la denominación de mixtos, porque en ellos aparecen, junto con la ecuación del calor, condiciones iniciales y condiciones de contorno. Más concretamente, dedicaremos en primer lugar nuestra atención al problema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{4.1}$$

cuya interpretación física precisa se puede ver en [20], [39]. En términos sencillos, y tal y como dijimos en la introducción, el anterior problema modela la siguiente situación: tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a 0° centígrados y cuya superficie lateral está aislada. Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla es constante en cada sección transversal de la misma), entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t. Es precisamente la interpretación física del problema (4.1) la que sugiere que la solución debe existir y ser única: es decir, con las condiciones mencionadas, la temperatura inicial debe determinar, de manera única, la temperatura para cualquier tiempo positivo. Matemáticamente, el problema es determinar la función u, a partir de la función f.

La Ecuación en Derivadas Parciales que aparece en (4.1) es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de ecuación del calor

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

Es una Ecuación en Derivadas Parciales, lineal, de orden dos.

Como en el caso de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias, el conjunto de soluciones de esta ecuación puede dotarse de una estructura algebraica conveniente. Por ejemplo, supongamos que D es un subconjunto abierto no vacío de $\mathbb{R}^2$ y consideremos el conjunto C de soluciones de la ecuación del calor, que son de clase $C^2(D)$. Trivialmente C es un espacio vectorial real, pues la suma de dos soluciones cualesquiera, así como el producto de cualquier número real por cualquier solución, también es solución de la ecuación del calor. Sin embargo, hay diferencias profundas entre las Ecuaciones Diferenciales Ordinarias y las Ecuaciones en Derivadas Parciales. Por ejemplo, la dimensión de C no es finita (*¿podría el lector describir algún subconjunto infinito de C linealmente independiente?*). Esta es una de las razones por las que la teoría de Ecuaciones en Derivadas Parciales gira en torno al estudio de problemas relativamente concretos y significativos, planteados básicamente por las aplicaciones, mas bien que por el estudio del conjunto de todas las soluciones de una ecuación dada.

La ecuación del calor aparece en los textos de una forma ligeramente más general que la considerada por nosotros:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = k\frac{\partial v(x,t)}{\partial t},$$

donde $k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Claramente esta ecuación puede reducirse a la nuestra mediante el cambio de variable $u(x,t) = v(x,kt)$.

Como ya hemos mencionado, la ecuación del calor es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica y aparece con generalidad en fenómenos de difusión.

Desde el punto de vista matemático, las cuestiones que podemos

plantearnos en torno a (4.1) son las siguientes:

1) ¿Cuál es el concepto apropiado de solución para (4.1) ? Esto dependerá evidentemente de la regularidad de la condición inicial f.

2) Supuesto que se ha respondido a la pregunta anterior, ¿existe solución? ¿es única? ¿cómo se calcula? ¿qué propiedades interesantes satisface? etc.

Para responder a las cuestiones previas, quizás lo más elemental sea suponer que la función f es continua en $[0,\pi]$. En este caso, teniendo en cuenta las derivadas que aparecen en (4.1) , un concepto lógico de solución parece ser el siguiente:

Designemos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 < t \le T\}.$$

Observemos que Ω no es ni abierto ni cerrado. De hecho,

$$\begin{aligned} \Omega^\circ \text{ (interior de } \Omega) &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}, \\ \overline{\Omega} \text{ (clausura de } \Omega) &= \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 \le t \le T\}. \end{aligned}$$

Una solución de (4.1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$ continua, que además cumple:

a) Fijado cualquier $x \in [0,\pi]$, la función $u(x,t)$, como función de la variable t, definida de $(0,T]$ en $\mathbb{R}$ es de clase C^1 (en $t = T$, se entiende derivada lateral por la izquierda).

b) Fijado cualquier $t \in (0,T]$, la función $u(x,t)$, como función de la variable x, definida de $[0,\pi]$ en $\mathbb{R}$ es de clase C^2 (en $x=0$ y $x=\pi$, se entienden, respectivamente, derivadas laterales por la derecha y por la izquierda).

El concepto de solución anterior lo expresaremos, de manera resumida de la forma siguiente:

Definición 1.

Una solución de (4.1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$.

Que la definición anterior es apropiada se confirmará en el desarrollo del capítulo, cuando veamos que, efectivamente, el problema (4.1) tiene solución y es única.

Comencemos por mostrar que el problema (4.1) puede tener, a lo más, una solución. Para ello, notemos que si u_1 y u_2 fuesen dos soluciones de (4.1) , entonces la función $u = u_1 - u_2$ verifica las propiedades de regularidad de la definición previa y el problema:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

EJERCICIO 1:

Sea $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$, satisfaciendo (4.2) . Demuéstrese que u es idénticamente cero en $\overline{\Omega}$.

Sugerencia: Observemos que es suficiente con obtener la conclusión de que u debe ser menor o igual que cero en $\overline{\Omega}$ (*¿por qué?*). Ahora bien, si esto no fuese cierto, entonces debe existir $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > 0$. Considérese entonces la función $v(x,t) = u(x,t) + k(t-t_0)$ con k negativo y pequeño y estúdiese con detalle el signo de $\dfrac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t}$, siendo $(x_1,t_1) \in \overline{\Omega}$ tal que $v(x_1,t_1) = \max_{\overline{\Omega}} v$.

Conviene recordar además, lo siguiente, sobre funciones reales de una variable real: Si una función $g : (a,b) \to \mathbb{R}$ es de clase $C^2(a,b)$ y tiene un máximo relativo en $c \in (a,b)$, entonces $g'(c) = 0,\ g''(c) \le 0$. También, si $h : [a,b] \to \mathbb{R}$ es de clase $C^1[a,b]$ y tiene un máximo absoluto en b, entonces $h'(b) \ge 0$.

Solución: Mostremos en primer lugar que $u(x,t) \le 0,\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. En efecto, si ello no fuese así, entonces debe existir algún $(x_0,t_0) \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_0,t_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > 0$. Definamos la función $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, como

$$v(x,t) = u(x,t) + k(t-t_0),$$

con $k \in (-\dfrac{u(x_0,t_0)}{2T}, 0)$. Como $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$, se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} \; v = v(x_1,t_1) \geq u(x_0,t_0),$$

para algún $(x_1,t_1) \in \overline{\Omega}$.

Observemos que $\overline{\Omega} = ((0,\pi)\times(0,T)) \cup \partial\Omega$, donde $\partial\Omega$ indica la frontera topológica de Ω. Además, $\partial\Omega$, se puede dividir en dos partes

$$\partial_1\Omega = (\{0\}\times[0,T]) \cup (\{\pi\}\times[0,T]) \cup ([0,\pi]\times\{0\}) \tag{4.3}$$

y

$$\partial_2\Omega = [0,\pi]\times\{T\}. \tag{4.4}$$

También, si $(x,t) \in \partial_1(\Omega)$, entonces $v(x,t) = u(x,t) + k(t-t_0) = k(t-t_0) \leq |k|2T = -k(2T) < u(x_0,t_0)$.

Así pues, $(x_1,t_1) \in \overline{\Omega} \setminus \partial_1\Omega$ y, por tanto, sólo tenemos dos posibilidades:

1) $0 < x_1 < \pi, 0 < t_1 < T$.

2) $t_1 = T, 0 < x_1 < \pi$.

En ambos casos, la función $v(.,t_1) : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $(x,t_1) \to v(x,t_1)$, tiene un máximo absoluto (y por tanto relativo) en x_1. Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} \leq 0. \tag{4.5}$$

Análogamente, la función $v(x_1,.) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $(x_1,t) \to v(x_1,t)$, tiene un máximo absoluto en t_1. Por lo tanto

$$\frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} \geq 0. \tag{4.6}$$

Así,

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} \leq 0.$$

Pero, de la definición de v se obtiene

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} = -k > 0,$$

que supone una contradicción. Ésta proviene del hecho de suponer que $\max_{\overline{\Omega}} \; u > 0$. Por tanto, $\max_{\overline{\Omega}} \; u \leq 0$.

Ahora bien, la función $-u$ también satisface las hipótesis del ejercicio; por tanto, $\max_{\overline{\Omega}} \; (-u) \leq 0$. Todo ello muestra que u es idénticamente cero en $\overline{\Omega}$, que es lo que queríamos demostrar.

Nota.

Haciendo un poco de esfuerzo (que siempre es necesario) por entender mejor la resolución del ejercicio anterior, se ve que, en realidad, la contradicción proviene de la existencia de una función $v \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$, que satisface las dos propiedades siguientes:

(P1) $max_{\overline{\Omega}}\, v$ se alcanza en $\overline{\Omega} \setminus \partial_1(\Omega)$.

(P2) $\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} - \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t} > 0$, en Ω.

En efecto, (P1) implica la existencia de $(x_1, t_1) \in \overline{\Omega} \setminus \partial_1(\Omega)$, tal que $\text{máx}_{\overline{\Omega}}\, v = v(x_1, t_1)$. Entonces, $\dfrac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2}$ debe ser menor o igual que cero, así como $\dfrac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t}$ debe ser mayor o igual que cero. Esto es incompatible con la propiedad (P2).

De acuerdo con la observación realizada, podríamos elegir otras funciones v para solucionar el ejercicio anterior. Por ejemplo, $v(x,t) = u(x,t) + m(x - x_0)^2, m > 0$, suficientemente pequeño.

Una vez demostrado que (4.1) puede tener, como mucho, una solución, habrá que ver que, al menos, hay una. Para tratar de intuir cuál puede ser la forma de la solución buscada, pensemos que u es una función de dos variables. También, las funciones de dos variables más sencillas que se pueden presentar son aquellas que vienen dadas mediante el producto de dos funciones de una variable. Entonces, podemos comenzar por la siguiente pregunta: ¿tendrá (4.1) soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)Z(t) \tag{4.7}$$

para funciones convenientes $X : [0, \pi] \to \mathbb{R}$, y $Z : [0, T] \to \mathbb{R}$?

De momento, procedamos de manera formal. Si la respuesta a la anterior pregunta fuese afirmativa, entonces necesariamente se ha de cumplir la relación

$$X''(x)Z(t) = X(x)Z'(t),\ \forall\ (x,t) \in [0, \pi] \times (0, T]. \tag{4.8}$$

Pero, suponiendo por un momento que $X(x)$ no se anula en $(0, \pi)$ y que $Z(t)$ no se anula en $(0, T]$, llegamos a la relación

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z'(t)}{Z(t)},\ \forall (x,t) \in (0, \pi) \times (0, T].$$

Como $x \in (0, \pi)$ y $t \in (0, T]$ son variables independientes, la única posibilidad para que esto sea así, es que ambos cocientes sean funciones constantes. Es decir, debe existir alguna constante $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Z'(t)}{Z(t)} = \lambda,\ \forall (x,t) \in (0, \pi) \times (0, T].$$

Esto origina las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ x \in (0, \pi), \tag{4.9}$$

$$Z'(t) - \lambda Z(t) = 0,\ t \in (0, T]. \tag{4.10}$$

Además, puesto que la solución buscada u debe ser continua en $\overline{\Omega}$, se ha de cumplir

$$u(0, t) = X(0)Z(t) = u(\pi, t) = X(\pi)Z(t) = 0, \forall\ t \in (0, T].$$

Esto nos conduce a la "condición natural" que ha de satisfacer la función X en los extremos del intervalo : $X(0) = X(\pi) = 0$. Todo ello origina el siguiente problema de contorno para $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ x \in [0, \pi],\ X(0) = X(\pi) = 0. \tag{4.11}$$

Ahora, es conocido (véase [15]) que (4.11) tiene solución no trivial $X \in C^2[0, \pi]$, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, el conjunto de soluciones de (4.11) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx)$.

Por otra parte, pensemos que la constante λ ha de ser la misma en (4.10) y (4.11) . Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de soluciones de (4.10) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $Z_n(t) = \exp(-n^2 t)$.

La relación de las funciones

$$u_n(x, t) = X_n(x)Z_n(t), \tag{4.12}$$

con nuestro problema original, (4.1) , se pone de manifiesto en el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 2:

Demostrar que, si para algún $n \in \mathbb{N}$, la función f de (4.1) es de la forma $f(x) = X_n(x)$, entonces, la función u_n definida en (4.12) , es la única solución del problema (4.1) .

Solución: Obviamente,

$$\frac{\partial^2 u_n(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u_n(x, t)}{\partial t} = -n^2 u_n(x, t),\ \forall\ (x, t) \in \Omega.$$

La comprobación de las demás condiciones de (4.1) es asímismo trivial.

Por ejemplo, si $f(x) = sen(5x)$, la única solución de (4.1) es la función $u_5(x, t) = sen(5x)\exp(-25t)$.

La linealidad de la ecuación del calor permite encontrar la solución de (4.1) también de manera sencilla, si f es combinación lineal finita de funciones del conjunto $\{X_n,\ n \in$

$\mathbb{N}\}$. Esto es el propósito del ejercicio que sigue, cuya resolución es absolutamente trivial.

EJERCICIO 3:

Demostrar que, si la función f de (4.1) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, .., n_m$, números naturales distintos, entonces la única solución de (4.1) es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i u_{n_i}(x,t), \ \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

EJEMPLOS. Si $f(x) = 3sen(2x) - 7sen(9x)$, entonces la única solución de (4.1) es $u(x,t) = 3sen(2x)\exp(-4t) - 7sen(9x)\exp(-36t)$. Si $f(x) = sen^3(x)$, entonces como $sen^3(x) = \frac{3}{4}sen(x) - \frac{1}{4}sen(3x)$, la única solución de (4.1) sería

$$u(x,t) = \frac{3}{4}sen(x)\exp(-t) - \frac{1}{4}sen(3x)\exp(-9t)$$

Hemos llegado a uno de los momentos más importantes del capítulo, ocasionado por la pregunta que surge de manera lógica, después de las disquisiciones anteriores: somos capaces de encontrar la única solución de (4.1) en muchos casos particulares (aquellos en los que la temperatura inicial f es una combinación lineal finita de funciones $X_n, n \in \mathbb{N}$). Pero, ¿cómo encontrarla, si es que podemos, en el caso general? Pensemos por un momento lo siguiente: si (4.1) tuviese solución, entonces f ha de satisfacer la condición

$$f \in C([0,\pi],\mathbb{R}), \ f(0) = f(\pi) = 0, \tag{4.13}$$

puesto que $f(x) = u(x,0), \ \forall \ x \in [0,\pi]$, y $u \in C(\overline{\Omega})$. Así, $f(0) = u(0,0) = 0$ y $f(\pi) = u(\pi,0) = 0$.

Entonces, la pregunta clave que podemos hacernos es:

¿será (4.13) suficiente para la existencia de solución de (4.1) ?

La experiencia física sugiere que la respuesta a la pregunta anterior debe ser afirmativa. Pero aquí es cuando suele comenzar el calvario para el matemático. La primera cuestión, obviamente, es: ¿qué camino puedo seguir para encontrar la solución? ¿podremos, quizás, aprovechar la solución obtenida en casos particulares para llegar a la solución en el caso general en que f satisface (4.13) ?

En este momento, a aquellos lectores que hayan trabajado y entendido con precisión el capítulo anterior, se les puede encender una pequeña luz y decir algo parecido a lo siguiente: sabemos que cuando f es combinación lineal finita de funciones $X_n, n \in \mathbb{N}$, entonces la única solución de (4.1) es, a su vez, una combinación lineal finita de funciones $u_n, n \in \mathbb{N}$. También recordamos que en en el ejercicio 21 del capítulo II, se probaba que si f satisface la hipótesis

$$f \in C[0,\pi],\ f \text{ es } C^1 \text{ a trozos en } [0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0, \tag{4.14}$$

entonces

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) \tag{4.15}$$

uniformemente en $[0,\pi]$, donde los coeficientes a_n vienen dados por la fórmula

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx,\ \forall n \in \mathbb{N}. \tag{4.16}$$

De hecho, en el ejercicio citado se probaba (4.15) bajo hipótesis más generales que (4.14) . Recordemos también que f es C^1 a trozos en $[0,\pi]$ si existe una partición de $[0,\pi]$: $t_0 = 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{m-1} < t_m = \pi$, tal que $f \in C^1[t_{i-1}, t_i],\ \forall i \in \{1, ..., m\}$.

Por el momento, no seamos ambiciosos, y pensemos que f satisface (4.14) . Entonces, debido a (4.15), ¿será la función

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\exp(-n^2 t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n X_n(x) Z_n(t) \end{gathered} \tag{4.17}$$

la única solución de (4.1) ?

La respuesta a la pregunta previa es afirmativa y es lo que vemos a continuación.

EJERCICIO 4:

Si f satisface (4.14) , demostrar que la única solución de (4.1) es la función u dada en (4.17) , donde los coeficientes están definidos en (4.16) .

(Sugerencia: (4.14) garantiza que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ es convergente).

Solución: Veamos en primer lugar que la serie definida en (4.17) define una función en $\overline{\Omega}$. En efecto, notemos que

$$|a_n u_n(x,t)| = |a_n sen(nx)\exp(-n^2 t)| \leq |a_n|, \forall\ n \in \mathbb{N},\ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Por lo tanto la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n u_n(x,t)| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n sen(nx)\exp(-n^2 t)|$$

está mayorada por la serie de números reales no negativos

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \tag{4.18}$$

Ahora bien, si repasamos los ejercicios 15 y 21 del capítulo II, vemos que de la hipótesis (4.14) , se deduce la convergencia de la serie (4.18) . Esto prueba la convergencia de la serie que aparece en (4.17) , para cualquier $(x,t) \in \overline{\Omega}$. Además, como cada sumando de la serie es continuo, la función u definida en (4.17) es continua en $\overline{\Omega}$. Claramente, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \forall t \in [0,T]$ y $u(x,0) = f(x),\ \forall x \in [0,\pi]$.

Mostremos seguidamente que $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$. Para ello, si $(x_0,t_0) \in \Omega$, vamos a demostrar que la serie (4.17) puede derivarse término a término las veces necesarias, es decir,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial x} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial u_n(x_0,t_0)}{\partial x}, \\
\frac{\partial^2 u(x_0,t_0)}{\partial x^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial^2 u_n(x_0,t_0)}{\partial x^2}, \\
\frac{\partial u(x_0,t_0)}{\partial t} &= \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial u_n(x_0,t_0)}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.19}$$

Para probar (4.19) , es suficiente con ver que existe algún número real positivo δ tal que las series

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty} a_n u_n(x,t), \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}, \\
\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{\partial u_n(x,t)}{\partial t},
\end{gathered} \tag{4.20}$$

convergen uniformemente en

$$B = ((x_0 - \delta, x_0 + \delta) \times (t_0 - \delta, t_0 + \delta)) \cap \Omega.$$

Elijamos δ tal que $t_1 = t_0 - \delta > 0$. Entonces, para cualquier $(x,t) \in B$, y para cualquier n natural, se tiene

$$
\begin{aligned}
&|a_n u_n(x,t)| \leq |a_n| \exp(-n^2 t_1), \\
&|a_n \tfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial x}| \leq n|a_n| \exp(-n^2 t_1), \\
&|a_n \tfrac{\partial^2 u_n(x,t)}{\partial x^2}| \leq n^2|a_n| \exp(-n^2 t_1), \\
&|a_n \tfrac{\partial u_n(x,t)}{\partial t}| \leq n^2|a_n| \exp(-n^2 t_1).
\end{aligned}
\tag{4.21}
$$

Además, las series numéricas

$$
\begin{aligned}
&\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(-n^2 t_1), \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n| \exp(-n^2 t_1), \\
&\sum_{n=1}^{\infty} n^2|a_n| \exp(-n^2 t_1),
\end{aligned}
\tag{4.22}
$$

son convergentes pues los coeficientes a_n están acotados, independientemente de $n \in \mathbb{N}$ y las funciones exponenciales que aparecen son suficientes para la convergencia, a pesar de la presencia de algunas potencias de n (*si este razonamiento no convence al lector, aplique el criterio del cociente para convergencia de series numéricas, que estudió en Análisis de una variable real*).

Los razonamientos anteriores concluyen (4.19) y además, que $u \in C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$. También, al ser cada u_n solución de la ecuación del calor en Ω, ello implica que u lo es.

Nota importante.

Aunque la mayoría de los lectores lo habrán observado ya, la discusión realizada permite probar, de manera sencilla, que si los coeficientes $a_n, n \in \mathbb{N}$, son acotados (independientemente de $n \in \mathbb{N}$), entonces la función u definida en (4.17) es de clase C^∞ en cualquier punto (x,t) de $\overline{\Omega}$ para el que $t > 0$. Volveremos sobre este aspecto un poco más tarde.

EJERCICIO 5:

Calcúlese la única solución de (4.1) si $f(x) = cos(x) - 1 + \dfrac{2x}{\pi}$.

Solución: La función $cos(x) - 1 + \dfrac{2x}{\pi}$, cumple la hipótesis (4.14) , por lo que es aplicable el ejercicio anterior. Además, en el ejercicio 22 del capítulo II se demostró que

$$cosx - 1 + \frac{2x}{\pi} = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n}$$

de manera uniforme en $[0,\pi]$. Por lo tanto, la única solución de (4.1) es

$$u(x,t) = -\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{sen(2nx)}{(1-4n^2)2n}\exp(-4n^2t).$$

En el ejercicio anterior, la función f es de clase C^1 en $[0,\pi]$. En los dos siguientes consideramos una función que no es de dicha clase, pero que satisface (4.14) . A pesar de que la temperatura inicial que vamos a considerar es sencilla, se va a poner de manifiesto que una cosa es probar la existencia de solución de (4.1) y otra bien distinta calcularla.

EJERCICIO 6:

Calcúlese la única solución de (4.1) si

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ si } 0 \le x \le a, \\ \dfrac{a}{a-\pi}(x-\pi), \text{ si } a \le x \le \pi, \end{cases}$$

donde a es una constante dada tal que $0 < a < \pi$.

Solución: La función f definida anteriormente satisface (4.14) , por tanto, la única solución de (4.1) viene dada por (4.17) , donde los coeficientes están definidos en (4.16). Así,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx =$$
$$\frac{2}{\pi}\int_0^{a} xsen(nx)\,dx + \frac{2}{\pi}\int_a^{\pi}\frac{a}{a-\pi}(x-\pi)sen(nx)\,dx.$$

Como $\int xsen(nx)\,dx = -\frac{xcos(nx)}{n} + \frac{sen(nx)}{n^2}$, se tiene (con un poco de paciencia), que

$$a_n = -\frac{2sen(na)}{n^2(a-\pi)}, \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Consecuentemente, la única solución de (4.1) está dada por la serie

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} -\frac{2sen(na)}{n^2(a-\pi)}sen(nx)\exp(-n^2t).$$

EJERCICIO 7:

Calcúlese la única solución de (4.1) si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ sen(2x), \text{ si } \frac{\pi}{2} \leq x \leq \pi, \end{cases}$$

Solución: Como en el ejercicio anterior, la función f definida

anteriormente satisface (4.14), por tanto, la única solución de (4.1) viene dada por (4.17), donde los coeficientes están definidos en (4.16). Así,

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)sen(nx)\,dx = \frac{2}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi sen(2x)sen(nx)\,dx =$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{\pi/2}^\pi [cos((2-n)x) - cos((2+n)x)]\,dx.$$

Realizando algunos cálculos elementales, obtenemos $a_2 = \frac{1}{2}$. Además, si $n \in \mathbb{N} \setminus \{2\}$, entonces $a_n = \frac{4}{\pi(n^2-4)}\, sen\frac{n\pi}{2}$, si n es impar y $a_n = 0$, si n es par (distinto de dos). Por tanto, la única solución de (4.1) está dada por la serie

$$u(x,t) = \frac{1}{2}sen(2x)\exp(-4t) +$$

$$\sum_{n=1, n \text{ impar}}^{\infty} (-1)^{\frac{n+1}{2}} \frac{4}{\pi(4-n^2)} sen(nx)\exp(-n^2 t) =$$

$$\frac{1}{2}sen(2x)\exp(-4t) +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{4}{\pi(4-(2k+1)^2)}sen((2k+1)x)\exp(-(2k+1)^2 t).$$

A continuación, nuestro objetivo es encontrar (si existe), la única solución de (4.1) cuando f satisface (4.13) . En este caso, por ser f continua en $[0,\pi]$, los coeficientes $a_n,\ n \in \mathbb{N}$, están acotados y por tanto, la fórmula (4.17) define una función de clase C^∞ en Ω que, además, es solución de la ecuación del calor en Ω. También, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \forall\ t \in [0,T]$. El problema es si, a partir de la fórmula (4.17) , existe o tiene sentido $u(x,0)$. Según (4.17), $u(x,0)$ debería ser

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx), \tag{4.23}$$

donde los coeficientes a_n están definidos en (4.16) .

Ahora bien, sabemos de la teoría de series de Fourier (capítulo II), que, usando exclusivamente la hipótesis (4.13) , no es posible probar la convergencia de la serie anterior a la función $f(x)$.

Llegados a este punto, podemos dejarlo y no intentar solucionar (4.1) bajo la hipótesis (4.13) , o darle más vueltas al asunto (que es lo que hacen aquellos que se proponen entender la naturaleza profunda de las cosas), y tratar de encontrar algún otro método que, aprovechando lo que ya sabemos, nos proporcione la única solución de (4.1) cuando f satisface (4.13) (¡ojo!, si es que existe, que aún no lo sabemos).

Entonces, usando lo que ya se conoce y el hecho de que la serie (4.23) no es necesariamente convergente, dejémosla en paz y vayamos por otro camino que pueda tener probabilidades de éxito. Para ello, y suponiendo que f satisface (4.13) , definamos la función

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n sen(nx)\exp(-n^2 t), \text{ si } t > 0, \\ \\ f(x), \text{ si } t = 0. \end{cases} \tag{4.24}$$

Pensemos la relación que tiene esta función recién definida con el problema (4.1) . Por lo que hemos comentado anteriormente, u es de clase C^∞ en cualquier punto $(x,t) \in \overline{\Omega}$ para el que $t > 0$. Además, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0, \ \forall\ t \in [0,T]$ y $u(x,0) = f(x), \ \forall\ x \in [0,\pi]$. Así (*¡en guardia!, que esto que vamos a afirmar es importante*), que lo único que queda, para asegurar que u es la única solución de (4.1), es comprobar que $u \in C(\overline{\Omega})$. Esto se va a conseguir usando dos ideas o hechos importantes:

1) Expresar de manera más sencilla (en forma integral), la función $u(x,t)$, definida para $t > 0$ en (4.24) .

2) Elegir una sucesión de funciones $\{f_p\}$ tal que:

2.1) Cada $f_p,\ p \in \mathbb{N}$, satisface (4.14) .

2.2) $f_p \to f$, uniformemente en $[0,\pi]$.

Si notamos por u_p a la única solución de 4.1, cuando como temperatura inicial se toma f_p, demostraremos que $u_p \to u$, uniformemente en $\overline{\Omega}$. Como cada u_p es continua en $\overline{\Omega}$, ello implicará que $u \in C(\overline{\Omega})$. ¡Manos a la obra!

La expresión de u, de manera más sencilla, cuando $t > 0$, es fácil, teniendo en cuenta que los coeficientes a_n vienen dados por una integral definida y que, cuando $t > 0$, la serie de (4.24) es "buenísima", desde el punto de vista de la convergencia . Esto es el objeto del siguiente ejercicio.

EJERCICIO 8:

Demuéstrese que la función definida en (4.24) se puede escribir de la forma

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi G(x,\psi,t) f(\psi)\, d\psi, \ \text{si } t > 0, \\ \\ f(x), \ \text{si } t = 0, \end{cases} \tag{4.25}$$

donde

$$G(x,\psi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} sen(nx) sen(n\psi) \exp(-n^2 t). \tag{4.26}$$

Solución: Observemos que si $t > 0$, entonces, por la fórmula (4.16) , tenemos

$$\begin{gathered} u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(\psi) sen(n\psi)\, d\psi \right) sen(nx) \exp(-n^2 t) = \\ \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \left(\frac{2}{\pi} f(\psi) sen(n\psi) sen(nx) \exp(-n^2 t) \right) d\psi. \end{gathered} \tag{4.27}$$

Ahora bien,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{2}{\pi} f(\psi) sen(n\psi) sen(nx) \exp(-n^2 t) \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} M \exp(-n^2 t),$$

(para alguna constante M, independiente de $n \in \mathbb{N}$), que es una serie convergente, puesto que $t > 0$. Por tanto, para $(x,t) \in \overline{\Omega}$, $t > 0$, fijo, la serie de funciones

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\pi} sen(nx) sen(n\psi) \exp(-n^2 t),$$

como función de $\psi \in [0,\pi]$, converge uniformemente. Así pues, está permitido intercambiar el orden de la suma infinita e integración en (4.27) , obteniéndose (4.25) .

Después de esto, el ejercicio siguiente es trivial, pero muy conveniente para fijar ideas (así pues, recomiendo al lector que lo piense con detalle):

EJERCICIO 9:

Si f satisface (4.14) , demuéstrese que la única solución de (4.1) es la función dada por (4.25) .

A continuación centramos nuestra atención en la sucesión $\{f_p\}$, mencionada con anterioridad. Es fácil intuir su existencia si tenemos en cuenta que, al ser f continua en $[0,\pi]$, entonces f es uniformemente continua en $[0,\pi]$. Ello permite construir f_p

como una función “lineal a trozos”.

EJERCICIO 10:

Sea f satisfaciendo (4.13) . Demuéstrese la existencia de alguna sucesión $\{f_p\}$, tal que cada $f_p,\ p \in \mathbb{N}$, satisface (4.14) y $f_p \to f$ uniformemente en $[0, \pi]$.

Solución: Es muy sencilla: mírese con detalle el ejercicio 27 del capítulo II. Allí se demuestra que para cualquier $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$, puede encontrarse alguna función g, satisfaciendo (4.14) tal que

$$|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x \in \mathbb{R}.$$

De acuerdo con el ejercicio previo, si f satisface (4.13) , es posible elegir alguna sucesión $\{f_p\}$ de funciones satisfaciendo (4.14), tal que $f_p \to f$, uniformemente en $[0, \pi]$. Notemos por u_p a la única solución de (4.1) cuando como temperatura inicial se toma f_p. El objetivo es ahora claro, si queremos demostrar que, cuando f satisface (4.13) , la función u definida en (4.25) es continua en $\overline{\Omega}$: probaremos que $u_p \to u$, uniformemente en $\overline{\Omega}$. Ello exige que tengamos algún resultado previo que nos permita afirmar que, cuando la diferencia entre f_p y f_q es pequeña, también lo es la diferencia entre u_p y u_q. Tal resultado se puede intuir, después del ejercicio 1, y se conoce con el nombre de principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor. En la mayoría de los libros de texto sobre el tema, se prueba al comenzar éste. Nosotros hemos preferido postergarlo un poco, con el objeto de que el alumno se encuentre más motivado al leerlo.

Como ya hemos mencionado, el principio del máximo-mínimo se

corresponde con el hecho intuitivo siguiente: si la temperatura de los extremos de la barra se mantiene a cero grados centígrados y la superficie lateral de la misma está aislada (así que no puede entrar ni salir calor), las temperaturas máxima y mínima de la barra se alcanzan en el tiempo $t = 0$. Esto no viene sino a confirmar el conocido hecho de que el calor fluye de las partes más calientes a las partes más frías, tendiendo a alcanzarse una temperatura de equilibrio (es decir, que no depende del tiempo futuro) cuando el tiempo crece lo suficiente.

EJERCICIO 11:

a) Sea u cualquier solución de la ecuación de calor en Ω, es decir $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ y

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t},\ 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T. \tag{4.28}$$

Notemos

$$m = \min_{\partial_1 \Omega}\ u,\ M = \max_{\partial_1 \Omega}\ u.$$

Entonces

$$m = \min_{\overline{\Omega}} u, \ M = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

(véase el Ejercicio 1 para la definición de $\partial_1 \Omega$).

b) Sea u cualquier solución de (4.1) y notemos

$$m = \min_{[0,\pi]} f, \ M = \max_{[0,\pi]} f.$$

Entonces

$$m = \min_{\overline{\Omega}} u, \ M = \max_{\overline{\Omega}} u.$$

Solución: Al ser $f(0) = f(\pi) = 0$, el apartado b) es un caso particular del a). Para realizar el a), procedemos como en el ejercicio 1: mostremos en primer lugar que $u(x,t) \leq M, \ \forall (x,t) \in \overline{\Omega}$. En efecto, si ello no fuese así, entonces debe existir algún $(x_0, t_0) \in \overline{\Omega}$ tal que $u(x_0, t_0) = \max_{\overline{\Omega}} u > M$. Definamos la función $v : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, como

$$v(x,t) = u(x,t) + k(t - t_0),$$

con $k \in (\dfrac{M - u(x_0,t_0)}{2T}, 0)$.

Como $v(x_0,t_0) = u(x_0,t_0)$, se tiene que

$$\max_{\overline{\Omega}} v = v(x_1,t_1) \geq u(x_0,t_0) > M,$$

para algún $(x_1,t_1) \in \overline{\Omega}$.

También, si $(x,t) \in \partial_1(\Omega)$, entonces $v(x,t) = u(x,t) + k(t - t_0) \leq M + k(t - t_0) < u(x_0,t_0)$.

Así pues, para (x_1,t_1) sólo tenemos dos posibilidades:

1) $0 < x_1 < \pi, 0 < t_1 < T$.

2) $t_1 = T, 0 < x_1 < \pi$.

En ambos casos, la función $v(.,t_1) : (0,\pi) \to \mathbb{R}$, $(x,t_1) \to v(x,t_1)$, tiene un máximo absoluto (y por tanto relativo) en x_1. Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} \leq 0. \tag{4.29}$$

Análogamente, la función $v(x_1,.) : [0,T] \to \mathbb{R}$, $(x_1,t) \to v(x_1,t)$, tiene un máximo absoluto en t_1. Por lo tanto

$$\frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} \geq 0. \tag{4.30}$$

Así,

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} \leq 0.$$

Pero, de la definición de v se obtiene

$$\frac{\partial^2 v(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial v(x_1,t_1)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x_1,t_1)}{\partial x^2} - \frac{\partial u(x_1,t_1)}{\partial t} - k > 0,$$

que supone una contradicción. Ésta proviene del hecho de suponer que $\max_{\overline{\Omega}} u > M$. Por tanto, $\max_{\overline{\Omega}} u \leq M$.

De manera análoga se prueba que u es mayor o igual que m en $\overline{\Omega}$.

Nota.

Obviamente, la conclusión del apartado a) del ejercicio previo puede aplicarse a problemas más generales que (4.1) . Se corresponde con el hecho intuitivo de que las temperaturas máxima y mínima en una barra aislada (cuyos extremos no se mantienen necesariamente a cero grados centígrados), se han de alcanzar o bien en el tiempo inicial o bien en los extremos de la barra para algún tiempo no necesariamente el inicial.

Estamos ya en condiciones de enunciar y realizar el ejercicio donde se pone de manifiesto el resultado más general que vamos a ver, en lo que concierne a la existencia de soluciones de (4.1).

EJERCICIO 12:

Demuéstrese que si f satisface (4.13) , entonces la fórmula (4.24) (o (4.25)), define la única solución de (4.1).

Solución: Como hemos comentado con anterioridad, sólo queda por demostrar que la función u, definida en (4.24) , es continua en $\overline{\Omega}$. Para ello, sea $\{f_p\}$ cualquier sucesión de funciones que satisfacen (4.14) y tal que $f_p \to f$, uniformemente en $[0,\pi]$. Para cada $p \in \mathbb{N}$, denotemos por u_p a la única solución de (4.1) , cuando como temperatura inicial se elige f_p. Entonces, por el ejercicio 9, tendríamos

$$u_p(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\pi G(x,\psi,t) f_p(\psi)\, d\psi, \text{ si } t > 0, \\ \\ f_p(x), \text{ si } t = 0. \end{cases} \tag{4.31}$$

Como f_p converge uniformemente a f en $[0,\pi]$, f_p es una sucesión de Cauchy uniforme en $[0,\pi]$. Así, dado cualquier número real y positivo ε, debe existir algún índice p_0 tal que $\forall\ p,q \geq p_0$ se debe cumplir

$$|f_p(x) - f_q(x)| \leq \varepsilon,\ \forall\ x \in [0,\pi]. \tag{4.32}$$

Además, la función $u_p - u_q$ es solución de (4.1) , cuando la temperatura inicial es $f_p - f_q$. De (4.32) se deduce que

$$-\varepsilon \leq f_p(x) - f_q(x) \leq \varepsilon,\ \forall\ x \in [0,\pi]. \tag{4.33}$$

Por lo tanto,

$$-\varepsilon \leq \min_{[0,\pi]} (f_p - f_q) \leq \max_{[0,\pi]} (f_p - f_q) \leq \varepsilon.$$

Por el apartado b) del ejercicio anterior deducimos,

$$-\varepsilon \leq \min_{\overline{\Omega}} (u_p - u_q) \leq \max_{\overline{\Omega}} (u_p - u_q) \leq \varepsilon,$$

O lo que es lo mismo,

$$|u_p(x,t) - u_q(x,t)| \leq \varepsilon, \ \forall \ (x,t) \in \overline{\Omega}, \ \forall \ p,q \geq p_0.$$

Esto implica que $\{u_p\}$ es de Cauchy uniforme en $\overline{\Omega}$, y por tanto debe existir $v \in C(\overline{\Omega})$ tal que $u_p \to v$, uniformemente en $\overline{\Omega}$.

Además, si $t > 0$, tomando límites en (4.31) cuando $p \to +\infty$, obtenemos (recordemos que como t es positivo, podemos intercambiar el límite con la integración),

$$v(x,t) = \int_0^\pi G(x,\psi,t) f(\psi)\, d\psi \tag{4.34}$$

También, si $t = 0$, entonces $v(x,0) = \lim_{p\to\infty} u_p(x,0) = \lim_{p\to\infty} f_p(x) = f(x)$.

En definitiva, la función v coincide con u (definida en (4.25)), en $\overline{\Omega}$. Como $v \in C(\overline{\Omega})$, también $u \in C(\overline{\Omega})$.

Comentario.

Si f satisface (4.13) , entonces hemos demostrado que (4.1) tiene una única solución. Además, hemos encontrado la fórmula que define tal solución, usando para ello la temperatura inicial f. De hecho, (4.13) es suficiente y necesaria para que el problema (4.1) tenga solución (recuérdese el concepto de solución de (4.1) dado en la definición 1). Sin embargo, hay muchas situaciones de la Física donde la temperatura inicial no satisface las condiciones (4.13) . Un ejemplo muy sencillo es aquel en el que se estudia el enfriamiento de una barra, calentada de manera uniforme en el tiempo inicial. Además se supone que la superficie lateral de la misma está aislada y que la temperatura en sus extremos se mantiene a cero grados centígrados. Esto se corresponde con el caso en que la función f es constante en (4.13) , y por tanto no satisface (salvo en el caso trivial), las condiciones $f(0) = f(\pi) = 0$.

El problema a considerar en este caso tiene por planteamiento:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 < x < \pi,\ 0 < t \leq T,\\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 < t \leq T,\\
u(x,0) &= c, \qquad\qquad 0 \leq x \leq \pi,
\end{aligned}$$

También es claro, desde el punto de vista físico, que tal problema debe tener solución única. Los matemáticos necesitan confirmarlo.

En el caso particular citado, si se quiere tener un teorema sobre existencia y unicidad de soluciones, es necesario ampliar el concepto de solución, pero no tanto como para perder la unicidad. Puede verse en [39] que el concepto apropiado de solución es, en este caso, el siguiente: cualquier función $u \in C(\overline{\Omega} \setminus \{(0,0), (\pi,0)\}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$, que sea, además, acotada en $\overline{\Omega}$.

En otras situaciones, la temperatura inicial no ha de ser ni continua. Por ejemplo, el problema mencionado con anterioridad de enfriamiento de una barra, donde sólo una parte de ésta se calienta uniformemente en el tiempo inicial. Este caso se corresponde con una temperatura inicial de la forma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x \leq x_0, \\ c, & x_0 < x < x_1, \\ 0, & x_1 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Para estudiar problemas como (4.1) , con temperaturas iniciales como la anterior y más generales, es necesario disponer de algunos conocimientos de espacios de funciones de Sobolev (que determinan el conjunto de las posibles soluciones) así como de Análisis Funcional (que proporciona teoremas abstractos generales sobre existencia y unicidad de soluciones de ecuaciones lineales abstractas). En cualquier caso, recordemos que basta la acotación de los coeficientes de Fourier de f, para demostrar que la función u, definida en (4.24) , es de clase C^∞ para cualquier tiempo positivo y además, u verifica la ecuación del calor. En este sentido se pueden consultar las referencias [6] y [13] para el caso en que $f \in L^2(0,\pi)$.

Nota resumen necesaria.

Hagamos un resumen de lo realizado, porque corremos el riesgo de perdernos con la consideración de tantos casos. De acuerdo con el concepto de solución del problema (4.1) , dado en la definición 1, una condición necesaria para que este problema tenga solución es que f satisfaga la condición (4.13) . Lo que hemos demostrado es que (4.13) es también suficiente para que (4.1) tenga solución.

Para ello, en primer lugar, mediante el método de separación de variables, se ha encontrado la solución explícita de (4.1) cuando f es combinación lineal finita de funciones de la forma $sen(nx),\ n \in \mathbb{N}$. En segundo lugar, usando la teoría de series de Fourier, desarrollada en el capítulo II, hemos encontrado una fórmula explícita para la solución de (4.1) cuando f satisface (4.14) . En este caso, f es una "combinación lineal infinita" (uniforme en $[0, \pi]$), de funciones de la forma $sen(nx),\ n \in \mathbb{N}$. A continuación se ha representado la solución de (4.1) de una manera más conveniente: en forma integral, usando la función G, definida en (4.26) . Por último, con la ayuda de esta representación integral y del principio del máximo-mínimo, hemos demostrado que si f satisface (4.13) , entonces (4.24) es la única solución de (4.1) . Más esquemáticamente aún, el procedimiento ha sido el siguiente:

1) Mediante el método de separación de variables se calculan las soluciones de (4.1) para funciones f sencillas.

2) Con la ayuda de la teoría de Series de Fourier, se encuentra la solución de (4.1) cuando f es superposición (combinación lineal, finita o infinita), de las anteriores funciones sencillas. Esto suele proporcionar la solución de (4.1) como una serie infinita.

3) Se obtiene, para el caso anterior, una representación integral de la solución de (4.1) .

4) Se obtiene la solución en el caso general.

Tendremos la oportunidad de familiarizarnos con estos procedimientos en otros problemas que se estudiarán en este texto.

En el siguiente ejercicio resolvemos un problema similar a (4.1) , pero donde la temperatura en los extremos de la varilla se supone constante y no necesariamente cero.

EJERCICIO 13:

Considérese el problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, && 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\
u(0,t) = c_1, \qquad u(\pi,t) &= c_2, && 0 \leq t \leq T, \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi,
\end{aligned}
\tag{4.35}
$$

Demuéstrese que si $f \in C([0,\pi])$ satisface $f(0) = c_1,\ f(\pi) = c_2$, entonces (4.35) tiene una única solución (obviamente entendemos por solución cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$, que satisface (4.35) puntualmente).

(Sugerencia: Considérese la función $v(x,t) = u(x,t) - c_1 - \dfrac{x}{\pi}(c_2 - c_1)$ y demuéstrese que v satisface un problema como (4.1)).

Solución: Realizando el cambio de variable

$$v(x,t) = u(x,t) - c_1 - \frac{x}{\pi}(c_2 - c_1),$$

es muy fácil demostrar que u satisface (4.35), si y solamente si v satisface el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ v(x,0) &= g(x), \qquad\quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{4.36}$$

donde $g(x) = f(x) - c_1 - \dfrac{x}{\pi}(c_2 - c_1)$. Como g satisface (4.13) , (4.36) tiene una única solución, lo que implica que también es así para (4.35).

Una vez que hemos demostrado la existencia y unicidad de soluciones de (4.1) , deberíamos estudiar con más detalle las propiedades cualitativas de la única solución. Comencemos con algo que ya hemos podido intuir: la dependencia continua de la solución respecto de la temperatura inicial f.

EJERCICIO 14:

Sean $f, g \in C[0,\pi]$ tales que $f(0) = f(\pi) = g(0) = g(\pi) = 0$. Denotemos por u_f y u_g las soluciones respectivas de (4.1) para temperaturas iniciales f y g. Demuéstrese que si para alguna constante $r \ge 0$, se tiene

$$|f(x) - g(x)| \le r, \ \forall\ x \in [0,\pi],$$

entonces

$$|u_f(x,t) - u_g(x,t)| \le r, \ \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}.$$

Solución: Si se piensa que es necesario resolver este ejercicio, es que se han olvidado demasiado pronto los ejercicios 11 y 12. Por favor, repásense estos.

EJERCICIO 15:

Sea u la única solución de (4.1) . Demuéstrese que $u \in C^\infty(\Omega)$.

Solución: Véase la nota posterior al ejercicio 4.

El ejercicio anterior pone de manifiesto lo que se conoce con el nombre de **"efecto regularizante de la ecuación del calor"**, debido a que, en general, $u(x,0)$ es sólo continua, pero $u(x,t)$ es de clase C^∞ si $t > 0$. Curiosamente esto viene a mostrar que el modelo matemático dado por (4.1) , para estudiar la evolución de la temperatura, no se corresponde exactamente con la realidad (*¿es que alguien había pensado lo contrario? Si es así, debe repasar con cuidado cuál es el proceso de modelización matemática y sus consiguientes limitaciones. Véanse [5], [7]*). Lo lógico es que el efecto regularizante de la temperatura se muestre pasado algún tiempo y no de manera instantánea.

Esta observación prueba también que, en general, el llamado problema con datos finales, es decir, el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial v(x,t)}{\partial t}, \quad 0 < x < \pi,\ 0 < t < T, \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\ v(x,T) &= g(x), \quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned}$$

no tiene solución. En efecto, si así fuese, entonces la función v tendría que satisfacer un problema como (4.1) con dato inicial $v(x,0),\ 0 \le x \le \pi$. Por tanto, deberíamos tener $g(x) = v(x,T) \in C^{\infty}[0,\pi]$.

Es más, la transformación de variables independientes $(x,t) \to (x,-t)$ no deja invariante la ecuación del calor, puesto que si $u(x,t)$ es solución de la misma, la función $w(x,t) = u(x,-t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\partial v(x,t)}{\partial t}.$$

Se suele decir por ello que **"los fenómenos descritos por la ecuación del calor tienen un carácter irreversible"**.

Otra propiedad cualitativa concerniente a la solución de (4.1), se refiere a su comportamiento asintótico cuando el tiempo crece. Maticemos en primer lugar esta afirmación, pues en (4.1) el tiempo es finito.

Observemos en primer lugar que la solución de (4.1) , dada por la fórmula (4.24) , existe para cualquier tiempo t positivo. De hecho, consideremos el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \quad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t, \\ u(x,0) &= f(x), \quad 0 \le x \le \pi, \end{aligned} \tag{4.37}$$

Designemos por Ω' al conjunto

$$\Omega' = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 \le x \le \pi, 0 < t\}.$$

Entonces podemos definir una solución de (4.37) como cualquier función $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C_x^2(\Omega') \cap C_t^1(\Omega')$, que satisface (4.37) puntualmente.

EJERCICIO 16:

Demuéstrese que si f satisface (4.13) , entonces (4.37) tiene una única solución.

Solución: Probemos primeramente la unicidad. Es fácil, por los conocimientos previos que tenemos. En efecto, si u y v son dos soluciones de (4.37) , la función $w = u - v$ satisface un problema como (4.37) , para $f \equiv 0$. Entonces, para cualquier $T > 0$, denotando por Ω_T al conjunto $\Omega_T = [0,\pi] \times (0,T]$, se tiene que $w \in C(\overline{\Omega_T}) \cap C_x^2(\Omega_T) \cap C_t^1(\Omega_T)$ y satisface un problema como (4.1) , con temperatura inicial cero. Por el ejercicio 1, w es idénticamente cero en Ω_T. Puesto que $T > 0$ es arbitrario, concluímos que $w \equiv 0$ en Ω'.

Por otra parte, la fórmula (4.24) proporciona una solución de (4.37), con lo que (4.37) tiene una única solución.

Nos concentramos ahora en el comportamiento asintótico, respecto del tiempo, de la única solución de (4.37) . En este problema, los extremos de la varilla se mantienen permanentemente a cero grados centígrados, mientras que la superficie lateral de la misma está aislada. Esto puede hacer pensar que la temperatura tienda a cero, cuando el tiempo diverge a $+\infty$, sea quien sea la temperatura inicial f. Efectivamente, esto lo confirmamos en el resultado siguiente.

EJERCICIO 17:

Sea f satisfaciendo (4.13) y $u(x,t)$ la única solución de (4.37) . Demuéstrese que

$$\lim_{t\to+\infty} u(x,t) = 0. \tag{4.38}$$

Solución: Sea $\bar{t} > 0$ fijo, y supongamos $t \geq \bar{t}$. Entonces

$$|u(x,t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| \exp(-n^2\bar{t}).$$

Puesto que f es continua en $[0,\pi]$, existe alguna constante $A \geq 0$, tal que $|a_n| \leq A,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$\begin{aligned} |u(x,t)| &\leq A \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2\bar{t}) \\ &\leq A \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n\bar{t}) = A\,\frac{\exp(-\bar{t})}{1-\exp(-\bar{t})} \end{aligned}$$

Como la expresión anterior tiende a cero cuando $\bar{t} \to +\infty$, el ejercicio está resuelto.

Observemos que la función $v \equiv 0$, a la que tienden todas las soluciones de (4.1) , es la única solución del problema

$$v''(x) = 0,\ x \in [0,\pi],\ v(0) = v(\pi) = 0.$$

Este problema describe las soluciones de equilibrio (es decir aquellas que no dependen del tiempo) de la ecuación del calor, que, además, verifican las condiciones de contorno dadas en (4.1). El comportamiento asintótico mostrado en el ejercicio anterior, por las soluciones dependientes del tiempo, es posible y deseable en muchas ecuaciones de tipo parabólico. Aclaremos esta afirmación un poco. Se puede considerar por ejemplo el problema de la difusión del calor en un cuerpo Ω de $\mathbb{R}^3$, acotado, con presencia de fuentes de calor externas y manteniendo su frontera a cero grados centígrados. Esto origina un problema del tipo

$$\begin{gathered} \Delta_x u(x,t) = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + h(x),\ \forall\ (x,t) \in \Omega \times (0,T], \\ u(x,t) = 0,\ \forall\ (x,t) \in \partial\Omega \times [0,T], \end{gathered}$$

donde Δ_x indica el operador Laplaciano respecto de la variable $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, es decir,

$$\Delta_x u(x,t) = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_3^2},$$

y la función $h(x)$ describe la fuente externa de calor.

Las soluciones de equilibrio de este problema satisfacen

$$\begin{gathered} \Delta_x v(x) = h(x),\ x \in \Omega, \\ v(x) = 0,\ x \in \partial\Omega. \end{gathered}$$

En la actualidad, es un tema de gran interés el estudio de aquellos problemas, para los que el límite asintótico (cuando el tiempo diverge a $+\infty$) de las soluciones $u(x,t)$ del problema de evolución considerado, convergen a soluciones $v(x)$ de equilibrio (véase [37]).

¿Qué ocurrirá con el comportamiento asintótico de la temperatura, si los extremos de la varilla no se mantienen necesariamente a cero grados centígrados? La intuición física viene también en nuestra ayuda en este caso: si, por ejemplo, la temperatura en los extremos de la varilla se mantiene constante (puede ser una constante distinta en cada extremo), entonces la experimentación sugiere que la temperatura debe tender a una temperatura de equilibrio (independiente del tiempo) que sólo dependa, a su vez, de la temperatura en los extremos de la varilla. Efectivamente, este es el objetivo del ejercicio siguiente.

EJERCICIO 18:

Considérese el problema

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\[2ex]
u(0,t) = c_1, & & u(\pi,t) = c_2, & 0 \le t, \\[2ex]
u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi.
\end{array} \tag{4.39}
$$

Demuéstrese que si $f \in C([0,\pi])$ satisface $f(0) = c_1,\ f(\pi) = c_2$, entonces (4.39) tiene una única solución, entendiendo por solución cualquier función $u \in C(\overline{\Omega'}) \cap C_x^2(\Omega') \cap C_t^1(\Omega')$ que satisface (4.39) puntualmente.

Demuéstrese que si u es dicha solución, entonces

$$
\lim_{t \to +\infty} u(x,t) = c_1 + (c_2 - c_1)\frac{x}{\pi},\ \forall\ x \in [0,\pi]. \tag{4.40}
$$

Solución: Realizando el cambio de variable

$$
v(x,t) = u(x,t) - c_1 - \frac{x}{\pi}(c_2 - c_1),
$$

es muy fácil demostrar que u satisface (4.39), si y solamente si v satisface el problema

$$
\begin{array}{rcll}
\dfrac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial v(x,t)}{\partial t}, & 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\[2ex]
v(0,t) & = & v(\pi,t) = 0, & 0 \le t, \\[2ex]
v(x,0) & = & g(x), & 0 \le x \le \pi,
\end{array} \tag{4.41}
$$

donde $g(x) = f(x) - c_1 - \dfrac{x}{\pi}(c_2 - c_1)$. Como g satisface (4.13) , (4.41) tiene una única solución (ejercicio 16), lo que implica que también es así para (4.39).

Finalmente, por el ejercicio 17, $\lim_{t \to +\infty} v(x,t) = 0$, de donde se deduce (4.40).

El método de separación de variables se puede aplicar a otros problemas diferentes de (4.1). Cuesta un poco de tiempo llegar a entender adecuadamente cuáles son los tipos de problemas a los que dicho método se puede aplicar y cuáles no (consúltense [2], [16], [20], [35], [39]). Seguidamente dedicamos nuestra atención a otro problema al que sí se le puede aplicar tal método. Algunas ideas van a ser similares a las usadas en el estudio de (4.1). Otras no. Por eso, creo que merece la pena dedicarle un poco de tiempo.

En términos sencillos, el problema que vamos a estudiar modela la siguiente situación: tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos y superficie lateral se mantienen aislados. Si la distribución inicial de temperatura está dada por una función $f(x)$ (se supone que la temperatura de la varilla es la misma en cada sección transversal de la misma), estamos interesados en conocer la temperatura $u(x,t)$ de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo $t > 0$. La interpretación física del problema sugiere que la solución debe existir y ser única. No obstante, se puede intuir desde el principio que el comportamiento cualitativo de la solución va a ser diferente del que se ha mostrado para (4.1). Por ejemplo, no es lógico pensar ahora que (4.38) se cumpla.

El problema que acabamos de mencionar se corresponde con el siguiente modelo matemático ([39]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & & 0 \leq x \leq \pi,\ 0 < t \leq T, \\ \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} &= \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & & 0 < t \leq T, \\ u(x,0) &= f(x), & & 0 \leq x \leq \pi, \end{aligned} \tag{4.42}$$

donde $f \in C[0,\pi]$.

Igual que para (4.1) , desde el punto de vista matemático, las cuestiones que podemos plantearnos son las siguientes:

1) ¿Cuál es el concepto apropiado de solución para (4.42) ?

2) Supuesto que se ha respondido a la pregunta anterior, ¿existe solución? ¿es única? ¿cómo se calcula? ¿qué propiedades interesantes satisface? etc.

Teniendo en cuenta las derivadas que aparecen en (4.42) , un concepto lógico de solución parece ser el siguiente:

Una solución de (4.42) es cualquier función $u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$ que satisface (4.42) puntualmente. Que la definición anterior es apropiada se confirmará en lo que sigue, cuando veamos que, efectivamente, el problema (4.42) tiene solución y es única.

Comencemos por mostrar que, el problema (4.42) , puede tener a lo más, una solución. Para ello, observemos que el principio del máximo-mínimo (ejercicio 11), no parece ahora directamente aplicable, puesto que las condiciones de contorno, para $x = 0$ y $x = \pi$, son distintas de las consideradas en (4.1) (no obstante, conviene que se lea la nota posterior al ejercicio que sigue).

La idea básica para demostrar la unicidad de soluciones de (4.42) va a ser considerar una cierta integral de energía, definida a continuación. Al mismo tiempo, probamos dos principios de conservación de la energía para las soluciones de (4.1) y (4.42). En el primero de ellos se ven implicadas las funciones u y $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, mientras que en el segundo aparecen las dos derivadas parciales de primer orden de u.

EJERCICIO 19:

Sea f satisfaciendo (4.13) y u cualquier solución de (4.1) (ó de (4.42)).

a) Demuéstrese que la función $E : [0, T] \to \mathbb{R}$, definida como

$$E(t) = \frac{1}{2}\int_0^\pi u^2(x,t)\,dx + \int_0^t \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\right)^2 dx\right] ds$$

es constante. Como aplicación, demuéstrese que (4.42) puede tener, a lo más, una solución.

b) Sea f satisfaciendo (4.14) y u cualquier solución de (4.1) (ó de (4.42)). Demuéstrese que la función $I : [0, T] \to \mathbb{R}$, definida como

$$I(t) = \int_0^t \left[\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial t}\right)^2 dx\right] ds + \frac{1}{2}\int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx,$$

es constante.

Solución: Usando el Teorema de derivación bajo el signo integral y el Teorema fundamental del Cálculo, es claro que

$$E'(t) = \int_0^\pi u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\,dx + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx.$$

Teniendo en cuenta que u verifica la ecuación del calor, deducimos

$$E'(t) = \int_0^\pi u(x,t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx,$$

que, realizando una integración por partes, proporciona

$$E'(t) = u(x,t)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx + \int_0^\pi \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx =$$

$$u(\pi,t)\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} - u(0,t)\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}.$$

Ahora, de las condiciones de contorno satisfechas por u, tanto en (4.1) como en (4.42) , deducimos $E'(t) = 0,\ \forall\ t \in (0, T]$. Así pues, E es constante. De hecho,

$$E(0) = \int_0^\pi f^2(x)\,dx,$$

por tanto

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} u^2(x,t)\,dx + \int_0^t \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial x}\right)^2 dx\right] ds = \int_0^{\pi} f^2(x)\,dx,$$

para cualquier $t \in [0,T]$.

En particular, si u_1 y u_2 son dos soluciones de (4.42) , la función $u = u_1 - u_2$, verifica un problema como (4.42) con $f \equiv 0$. Por tanto,

$$\int_0^{\pi} u^2(x,t)\,dx = 0, \;\; \forall\, t \in (0,T],$$

de donde se obtiene $u \equiv 0$, en $\overline{\Omega}$.

b) Nuevamente, por el Teorema fundamental del Cálculo y el Teorema de derivación bajo el signo integral, tenemos

$$I'(t) = \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \int_0^{\pi} \frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t}\,dx,$$

que realizando una integración por partes proporciona

$$I'(t) = \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right]_0^{\pi} -$$

$$-\int_0^{\pi} \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\,dx.$$

Teniendo en cuenta que u es solución de la ecuación del calor y las condiciones de contorno, obtenemos:

$$I'(t) = \int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx + \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial t} - \frac{\partial u(0,t)}{\partial x}\frac{\partial u(0,t)}{\partial t} -$$

$$-\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right)^2 dx = 0.$$

Luego, I es constante. Por tanto,

$$\int_0^t \left[\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,s)}{\partial t}\right)^2 dx\right] ds + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right)^2 dx =$$

$$\frac{1}{2}\int_0^{\pi} (f'(x))^2\,dx, \;\; \forall\, t \in [0,T].$$

Nota.

El razonamiento del ejercicio previo es aplicable para demostrar que (4.1) tiene solución única (inténtese y compárense las ventajas e inconvenientes de este método respecto del usado en el ejercicio 1).

Es posible probar un principio del máximo-mínimo (llamado principio del máximo-mínimo fuerte), para las soluciones de la ecuación del calor, donde se ven implicadas las derivadas $\frac{\partial u(0,t)}{\partial x}$ y $\frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x}$. Con su ayuda, puede probarse también la unicidad de soluciones de (4.42) . El lector interesado en ello debería consultar el estupendo libro [36], un clásico en principios del máximo-mínimo para ecuaciones diferenciales.

Una vez demostrado que (4.42) puede tener como mucho una solución, habrá que ver que, al menos, hay una. Como en el problema (4.1) , podemos hacernos nuevamente la siguiente pregunta: ¿Tendrá (4.42) soluciones de la forma

$$u(x,t) = Y(x)Z(t), \tag{4.43}$$

para funciones convenientes $Y : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, y $Z : [0,T] \to \mathbb{R}$?

Procediendo de manera formal llegamos nuevamente a las dos ecuaciones diferenciales ordinarias (4.9) , (4.10) . Además, se ha de cumplir

$$\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = Y'(0)Z(t) = \frac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = Y'(\pi)Z(t) = 0, \forall\ t \in (0,T].$$

Esto nos conduce a la “condición natural” que ha de satisfacer la función Y en los extremos del intervalo : $Y'(0) = Y'(\pi) = 0$. Todo ello origina el siguiente problema de contorno para $Y(x)$:

$$Y''(x) - \lambda Y(x) = 0,\ x \in [0,\pi],\ Y'(0) = Y'(\pi) = 0. \tag{4.44}$$

Ahora, es conocido (véase [15]) que (4.44) tiene solución no trivial $Y \in C^2[0,\pi]$, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En este caso, el conjunto de soluciones de (4.44) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $Y_n(x) = cos(nx)$.

Como para el problema (4.1) , la constante λ ha de ser la misma en (4.10) y (4.44) . Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de soluciones de (4.10) es un espacio vectorial real de dimensión uno engendrado por la función $Z_n(t) = \exp(-n^2 t)$.

La relación de las funciones

$$v_n(x,t) = Y_n(x)Z_n(t), \tag{4.45}$$

con nuestro problema original, (4.42) , se pone de manifiesto en el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 20:

Demostrar que, si para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función f de (4.42) es de la forma

$f(x) = Y_n(x)$, entonces, la función v_n definida en (4.45) , es la única solución del problema (4.42) .

Solución:

Obviamente,

$$\frac{\partial^2 v_n(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial v_n(x,t)}{\partial t} = -n^2 v_n(x,t), \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

La comprobación de las demás condiciones de (4.42) es asímismo trivial.

Por ejemplo, si $f(x) = cos(5x)$, la única solución de (4.42) es la función $v_5(x,t) = cos(5x)\exp(-25t)$.

La linealidad de la ecuación del calor permite encontrar la solución de (4.42), también de manera sencilla, si f es combinación lineal finita de funciones del conjunto $\{Y_n,\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Esto es el propósito del ejercicio que sigue, cuya resolución es absolutamente trivial.

EJERCICIO 21:

Demostrar que si la función f de (4.42) es de la forma $f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i Y_{n_i}(x)$, siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, ..., n_m$, números naturales distintos o cero, entonces la única solución de (4.42) es la función

$$v(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i v_{n_i}(x,t),\ \ \forall\ (x,t) \in \Omega.$$

EJEMPLOS. Si $f(x) = 6cos(2x) - 4cos(9x)$, entonces la única solución de (4.42) es $v(x,t) = 6cos(2x)\exp(-4t) - 4cos(9x)\exp(-81t)$.

La pregunta que podemos hacernos, llegados a este punto, es la siguiente: ¿Cómo encontrar la solución de (4.42) en el caso general? *En este momento (da la impresión de que hemos vivido otro parecido, ¿verdad?), a aquellos lectores que hayan trabajado y entendido con precisión el capítulo anterior, así como lo previo del presente, se les puede encender nuevamente una pequeña luz y decir algo parecido a lo siguiente*: sabemos que cuando f es combinación lineal finita de funciones $Y_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, entonces la única solución de (4.42) es, a su vez, una combinación lineal finita de funciones $v_n, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. También recordamos que en en el ejercicio 24 del capítulo II, se probaba que si f satisface la hipótesis

$$f \in C[0,\pi], f \ \text{ es } C^1 \text{ a trozos en } [0,\pi], \tag{4.46}$$

entonces

$$f(x) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx), \tag{4.47}$$

uniformemente en $[0, \pi]$, donde los coeficientes b_n vienen dados por la fórmula

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) cos(nx)\, dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{4.48}$$

De hecho, en el ejercicio citado se probaba (4.47) bajo hipótesis más generales que (4.46) .

Entonces, si f satisface (4.46) , ¿será la función

$$v(x,t) = \frac{b_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} b_n cos(nx) \exp(-n^2 t) \tag{4.49}$$

la única solución de (4.42) ?

La respuesta a la pregunta previa es afirmativa y es lo que vemos a continuación.

EJERCICIO 22:

Si f satisface (4.46) , demostrar que la única solución de (4.42) es la función v dada en (4.49) , donde los coeficientes están definidos en (4.48) .

(Sugerencia: (4.46) garantiza que la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ es convergente).

Solución: Es similar a la dada en el ejercicio 5.

EJERCICIO 23:

Calcúlese la única solución de (4.42) si $f(x) = sen(x)$.

Solución: En el ejercicio 25 del capítulo II, vimos que

$$senx = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{1 - 4n^2} \ \text{ uniformemente en } \ [0, \pi].$$

Por tanto, la única solución de (4.42) es

$$u(x,t) = \frac{2}{\pi} + \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{cos(2nx)}{1 - 4n^2} \exp(-4n^2 t).$$

EJERCICIO 24:

Encuéntrese la única solución de (4.42) cuando $f(x) = ax + b$, $\forall x \in [0, \pi]$, siendo a y b números reales dados.

Solución: La función $f(x) = ax + b$, $\forall\ x \in [0, \pi]$, satisface (4.46) . Por tanto, admite un desarrollo como (4.47) . Un cálculo elemental muestra que, en este caso, $b_0 = a\pi + b$, y que para $n \in \mathbb{N}$, se tiene $b_n = 0$, si n es par y $b_n = \dfrac{-4a}{n^2 \pi}$, si n es impar. Así pues,

$$ax + b = \frac{a\pi}{2} + b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4a}{(2n-1)^2 \pi} cos((2n-1)(x)),$$

uniformemente en $[0, \pi]$. Por tanto, la única solución de (4.42) es

$$u(x,t) = \frac{a\pi}{2} + b + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{-4a}{(2n-1)^2\pi} cos((2n-1)(x)) \exp(-(2n-1)^2 t).$$

A continuación, centramos nuestra atención en las propiedades

cualitativas de la única solución de (4.42) . Por ejemplo, en los dos ejercicios que siguen se ponen de manifiesto algunas propiedades relacionadas con la dependencia continua respecto de la temperatura inicial f.

EJERCICIO 25:

Sean f y g dos funciones satisfaciendo (4.46) tales que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \ \forall \ x \in [0, \pi]$. Denótense por u_f y u_g, a las únicas soluciones de (4.42) cuando se eligen, respectivamente, como temperaturas iniciales f y g. Demuéstrese que si $t > 0$, entonces,

$$|u_f(x,t) - u_g(x,t)| \leq 2\varepsilon \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 t) \right) \tag{4.50}$$

Solución: La función $u_f - u_g$ satisface un problema como (4.42) , con temperatura inicial $f - g$. Por tanto, $u_f - u_g$ viene dada por la fórmula (4.49) , siendo los coeficientes b_n, los coeficientes de Fourier de la función $f - g$. Es claro entonces que para cualquier $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, se tiene

$$|b_n| \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} |f(x) - g(x)||cos(nx)| \, dx \leq 2\varepsilon.$$

Por tanto, de (4.49) deducimos (4.50) .

EJERCICIO 26:

Sean f y g dos funciones satisfaciendo (4.46) tales que $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon, \ \forall \ x \in [0, \pi]$. Denótense por u_f y u_g, a las únicas soluciones de (4.42) cuando se eligen, respectivamente, como temperaturas iniciales f y g. Demuéstrese que si $t > 0$, entonces,

$$\int_0^{\pi} |u_f(x,t) - u_g(x,t)|^2 \, dx \leq \pi \varepsilon^2. \tag{4.51}$$

.

Solución: La función $u = u_f - u_g$ satisface un problema como (4.42) , con temperatura inicial $f - g$. Por otra parte, usando ideas similares a las del ejercicio 19, podemos definir la función $E(t) = \displaystyle\int_0^{\pi} u^2(x,t) \, dx$, para cualquier $t \geq 0$, y análogamente a lo realizado allí, se prueba que la función E es decreciente. Por tanto, $E(t) \leq E(0) \leq \pi\varepsilon^2, \ \forall \ t \geq 0$. Esto proporciona (4.51) .

Nota.

Usando el principio del máximo fuerte, ya mencionado (véase [36]), puede probarse una propiedad idéntica de dependencia continua de la única solución de (4.42) , con respecto a f, a la demostrada en el ejercicio 14 para (4.1) . También se puede hacer un desarrollo similar al del ejercicio 12, donde estudiamos (4.1) , para probar la existencia y unicidad de soluciones de (4.42) cuando f es sólo continua en $[0, \pi]$.

En el problema (4.42) , tanto los extremos de la varilla, como la superficie lateral de la misma están aislados. Esto significa que no puede haber pérdida de calor. La intuición sugiere que la temperatura en la varilla tenderá, cuando el tiempo crece, a alguna temperatura de equilibrio (independiente del tiempo). Efectivamente, esto se confirma en el ejercicio siguiente.

EJERCICIO 27:

Sea f satisfaciendo (4.46) y $u(x, t)$ la única solución de (4.42) . Demuéstrese que

$$\lim_{t \to +\infty} u(x, t) = \frac{1}{2} b_0. \tag{4.52}$$

Solución: Sea $\overline{t} > 0$, fijo y supongamos $t \geq \overline{t}$. Entonces

$$|u(x, t) - \frac{1}{2} b_0| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| \exp(-n^2 \overline{t}).$$

Puesto que f es continua en $[0, \pi]$, existe alguna constante $B \geq 0$, tal que $|b_n| \leq B, \ \forall n \in \mathbb{N}$. Por tanto,

$$|u(x, t) - \frac{1}{2} b_0| \leq B \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n^2 \overline{t})$$
$$\leq B \sum_{n=1}^{\infty} \exp(-n \overline{t}) = B \, \frac{\exp(-\overline{t})}{1 - \exp(-\overline{t})}$$

Como la expresión anterior tiende a cero cuando $\overline{t} \to +\infty$, el ejercicio está resuelto.

Nota.

Observemos el comportamiento cualitativo tan diferente (en lo que se refiere al comportamiento asintótico respecto del tiempo), que tienen las soluciones del problema (4.1) (ejercicio 17) y (4.42) (ejercicio anterior).

Comentario final.

En este capítulo hemos estudiado dos problemas de tipo mixto, donde aparecían, junto con la ecuación del calor, condiciones iniciales y condiciones de contorno. En ambos se daba como dato inicial una determinada temperatura f. Además, en el primero de ellos se suponía conocida la temperatura en los extremos de $[0, \pi]$, mientras que en el segundo se daba como dato el flujo de calor a través de tales extremos. La clave para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se ha encontrado en el hecho de que, en ambos casos, la temperatura inicial admitía un desarrollo en serie, usando precisamente como sumandos de tal desarrollo las funciones propias de los problemas de valores propios (4.11) y (4.44) .

Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, en un extremo de la varilla puede darse como dato la temperatura en cualquier tiempo y en el otro el flujo de calor, o incluso una combinación de ambos. Además, se puede suponer que la superficie lateral de la varilla no está aislada, de tal forma que puede entrar o salir calor. La intuición física sugiere que tales problemas han de tener solución única. Otra cosa es demostrarlo rigurosamente.

Desde el punto de vista matemático, los problemas citados se pueden plantear de la forma

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + g(x,t),\ 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\[1em]
\alpha_1 u(0,t) + \alpha_2 u_x(0,t) = a(t),\ 0 < t \le T, \\
\beta_1 u(\pi,t) + \beta_2 u_x(\pi,t) = b(t),\ 0 < t \le T, \\
u(x,0) = f(x),\ 0 \le x \le \pi,
\end{gathered}
\tag{4.53}
$$

donde f representa la temperatura inicial y la presencia de g significa que hay una fuente externa de calor, mientras que las otras dos condiciones en (4.53) son condiciones de contorno que combinan la temperatura y el flujo de calor en los extremos de la varilla (u_x indica la función derivada parcial de u, respecto de la variable x).

Bajo ciertas restricciones de regularidad sobre las funciones f, g, a y b, y sobre el signo de los coeficientes $\alpha_i, \beta_i,\ 1 \le i \le 2$, puede demostrarse, bien usando el método de la energía (usado en este capítulo), bien usando el principio del máximo fuerte ([36]), que (4.53) tiene, a lo más, una solución. Ya sabemos que a continuación viene la siguiente pregunta: ¿también a lo menos? Esto es harina de otro costal. No todos los problemas de la forma (4.53) pueden resolverse por el método de separación de variables; pero combinando éste con otros métodos (como aquellos que buscan la solución como suma de dos más elementales, una de ellas estacionaria), puede resolverse un buen número de problemas similares a (4.53) . Véanse [2], [16], [35], [39].

En general, la aplicación del método de separación de variables a aquellos problemas como (4.53) que sean adecuados, conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h, definida en $[0,\pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno de la forma:

$$
\begin{gathered}
Z''(x) - \lambda Z(x) = 0,\ x \in [0,\pi], \\
\gamma_1 Z(0) + \gamma_2 Z'(0) = 0, \\
\delta_1 Z(\pi) + \delta_2 Z'(\pi) = 0,
\end{gathered}
\tag{4.54}
$$

donde $\gamma_i, \delta_i,\ 1 \le i \le n$, son constantes dadas (véase [2]).

Observemos que (4.11) y (4.44) son casos particulares de (4.54) .

Los problemas de contorno como (4.54) , donde las condiciones de contorno aparecen por separado, en los dos puntos extremos de $[0, \pi]$, se llaman problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville. Sorprendentemente, el conjunto de funciones propias de (4.54) , convenientemente ortonormalizado, forma siempre (con ciertas restricciones sobre los coeficientes $\gamma_i\,, \delta_i\,,\ 1 \le i\ \le n$), una base del espacio $L^2[0, \pi]$. Esto permite el uso de métodos similares a los que ya se han tratado en este capítulo para estudiar (4.53) .

Las anteriores ideas serán desarrolladas con detalle en otro volumen.

Por último, aquellos que estén interesados en otros aspectos de la ecuación del calor, pueden consultar las referencias [10] y [42], como tratados generales, amplios y actuales sobre la misma. También, [16] es un clásico digno de consultar y de tener.

Capítulo 5

La ecuación de ondas

5.1. Algunas nociones previas necesarias para entender el capítulo.

Las mismas que para el capítulo anterior. Además, se debe hacer un énfasis especial en el repaso de los ejercicio 15 y 18 del Capítulo II.

5.2. Presentación del capítulo y resumen de resultados fundamentales.

En este capítulo se estudian, de manera detallada, dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación de ondas (unidimensional)

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

El primero de ellos responde a la formulación

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \leq x \leq \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0,
\end{aligned} \tag{$O1$}$$

y modela las vibraciones pequeñas de una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas, cuando la posición inicial de la misma está dada por la función f y la velocidad inicial por g.

Si $\Omega = (0, \pi) \times (0, +\infty)$, una solución de (O1) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (O1) puntualmente.

Demostramos en primer lugar que (O1) puede tener, a lo más, una solución, usando para ello lo que se conoce con el nombre de método de la energía. A continuación, mediante la técnica de separación de variables probamos que si f y g son adecuadas, entonces (O1) tiene efectivamente una solución. El resultado, concretamente, es el siguiente: *Si f y g satisfacen las condiciones*

$$\begin{gathered} f \in C^3[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^2[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{gathered}$$

entonces (O1) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nt) + B_n sen(nt))\, sen(nx),$$

donde

$$A_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx,\ B_n = \frac{2}{n\pi}\int_0^{\pi} g(x) sen(nx)\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Seguidamente, expresamos esta solución de una manera más conveniente, motivando el método de propagación de las ondas. Usando este hecho probamos a continuación que se pueden rebajar las condiciones de regularidad sobre f y g. Más concretamente, *si f y g satisfacen las condiciones*

$$\begin{gathered} f \in C^2[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^1[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{gathered}$$

mostramos que la única solución u de (O1) está dada por la fórmula (llamada fórmula de d'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G_1(z)\, dz,$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y $2\pi-$periódicas de f y g, a $\mathbb{R}$. Interpretamos, además, de manera física la anterior expresión.

Después dedicamos nuestra atención al estudio de algunas propiedades cualitativas de las soluciones de (O1), tales como el principio de invariabilidad de la energía, la posibilidad o no de tener principios del máximo-mínimo similares a los que verifican las soluciones de la ecuación del calor, dependencia continua respecto de los datos iniciales, mantenimiento de la regularidad de la condiciones iniciales para tiempos positivos, etc.

Un objetivo básico del anterior estudio es poner de manifiesto las similitudes y diferencias básicas con la ecuación del calor, estudiada en el capítulo anterior.

El otro problema que estudiamos responde a la formulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), \qquad 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0, \end{aligned} \tag{$O2$}$$

que se corresponde con el caso en que los extremos de la cuerda están libres. Estudiamos, la existencia (método de separación de variables) y unicidad (método de la energía) de las soluciones de (O2). Mencionamos también algunas diferencias cualitativas respecto de (O1), como por ejemplo el hecho de que las soluciones pueden dejar de ser acotadas.

5.3. Desarrollo del capítulo IV

El primer problema que vamos a considerar en este capítulo responde a la formulación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, \qquad 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), \qquad 0 \le x \le \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad t \ge 0. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Como dijimos en la introducción, este problema modela la siguiente situación: supongamos una cuerda flexible, con extremos fijos en los puntos $(0,0)$ y $(\pi,0)$ del eje de abscisas. Se tira de la cuerda hasta que ésta adopte la forma de una curva dada por la ecuación $y = f(x)$ y, en el instante inicial, se le imprime, en cada punto de abscisa $x \in [0,\pi]$, una velocidad inicial, dada por la función g. Entonces la cuerda comienza a vibrar, representando $u(x,t)$ el desplazamiento vertical de la cuerda, en la coordenada x ($0 \le x \le \pi$) y el tiempo t ($t \ge 0$). El problema que nos planteamos es obtener

$u(x,t)$ a partir de f y g. Como en el caso de la ecuación del calor, la experiencia física sugiere que la función u debe existir y ser única. Otra cosa bien distinta es probar esta afirmación rigurosamente. Pues bien, este es nuestro primer objetivo.

La primera condición en (5.1) es una ecuación en derivadas parciales de segundo orden, conocida con el nombre de **ecuación de ondas** :

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Es el modelo más sencillo de ecuación de tipo hiperbólico y representa una relación entre dos derivadas parciales de segundo orden, modelando las vibraciones de la cuerda si éstas son pequeñas. Si tales vibraciones no fuesen pequeñas, tendríamos en general, una ecuación no lineal bastante más complicada ([16], [39], [41]).

A veces, la ecuación de ondas aparece en los textos de una forma ligeramente más general:

$$\frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = k^2 \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2},$$

donde k es alguna constante no nula. Esta ecuación puede reducirse a la anterior mediante el cambio de variable $u(x,t) = v(x,kt)$.

La segunda condición en (5.1) representa la posición inicial de la cuerda, mientras que la tercera significa que la velocidad inicial de la misma está dada por la función g. La última relación expresa el hecho de que, para cualquier tiempo, la cuerda se mantiene fija en sus extremos.

Observemos, que como en los problemas estudiados en el capítulo III, las condiciones que aparecen asociadas, en este caso a la ecuación de ondas, son de dos tipos: condiciones sobre el tiempo inicial y condiciones de contorno. De ahí que (5.1) sea un problema de tipo mixto.

Como en el caso de la ecuación de calor (capítulo III), probaremos primeramente que (5.1) tiene, a lo más, una solución. Ello exige, por supuesto, definir previamente este concepto. A continuación demostraremos que si f y g son "buenas", entonces existe efectivamente una solución.

Lo anterior marca las directrices generales que se siguen en el estudio de (5.1) . Son idénticas a las que aparecían en el capítulo anterior. No obstante, conviene desde el principio llamar la atención sobre el hecho de que no cabe esperar que las soluciones de (5.1) se comporten de manera análoga a las de la ecuación del calor. Esta afirmación, que se justifica ya por el origen físico diferente de los problemas citados, se confirmará en este capítulo. Pero no me resisto a comenzar con una observación elemental que muestra cuáles pueden ser algunas de las principales diferencias: recordemos que cuando estudiábamos el problema de la distribución de temperatura en una varilla delgada, con superficie lateral aislada, entonces las temperaturas máximas y mínimas necesariamente se alcanzaban o en el tiempo inicial o en los extremos de la varilla. En lenguaje matemático, los valores máximo y mínimo de la función solución de tal problema, se alcanzan con seguridad en una parte de la frontera topológica del dominio de definición de la función solución (*si esto comienza a complicarse, sugiero que se lea el resumen de resultados fundamentales del capítulo anterior*). Si ahora pensamos sobre el significado físico del problema (5.1) , se puede intuir que las vibraciones máximas y mínimas de la cuerda no se han de alcanzar necesariamente ni en el tiempo inicial, ni en los extremos de la misma. Aquellos que tienen una formación física adecuada dirán inmediatamente: la causa de tal hecho es la velocidad inicial g considerada. Efectivamente, esto también se confirmará en este capítulo.

Algún matemático puede pensar que ya está bien de historias y que necesita un ejemplo concreto que confirme las afirmaciones anteriores. Pues aquí lo tiene: considérense las funciones

$$u_1(x,t) = sen(x)\exp(-t),$$
$$u_2(x,t) = sen(x)sen(t).$$

La función u_1 es solución de la ecuación del calor en $[0,\pi]\times[0,\pi]$, mientras que u_2 es solución de la ecuación de ondas en el mismo dominio que u_1. Notemos que el máximo de u_1 en $[0,\pi]\times[0,\pi]$ se alcanza en $(\frac{\pi}{2},0)$, que se corresponde con un tiempo inicial $t=0$, perteneciente a la frontera topológica de $[0,\pi]\times[0,\pi]$. Sin embargo, el máximo de u_2 en $[0,\pi]\times[0,\pi]$, se alcanza en $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$. Es decir, en el interior de $[0,\pi]\times[0,\pi]$ y no sobre su frontera topológica.

Otra diferencia notable respecto de la ecuación del calor es que la ecuación de ondas es invariante mediante los cambios de variable $v(x,t)=u(x,-t)$ ó $v(x,t)=u(-x,t)$ (*por favor, compruébese esta afirmación*).

Damos a continuación el concepto de solución de (5.1) . A la vista de las derivadas que aparecen en el planteamiento, parece lógica la siguiente definición.

Definición 1.

Sea $\Omega=(0,\pi)\times(0,+\infty)$. Una solución de (5.1) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (5.1) puntualmente.

Inmediatamente demostramos que (5.1) puede tener, a lo más, una solución. El ejemplo mostrado con anterioridad, sugiere que la demostración de este hecho no puede estar basada, como ocurrió en el capítulo previo, en principios del máximo-mínimo. No obstante, usaremos lo que se conoce con el nombre de **método de la energía**, que también se utilizó en el capítulo anterior. Este método es uno de los básicos en la teoría moderna de Ecuaciones en Derivadas Parciales (véase [37]).

EJERCICIO 1:

Demuéstrese que (5.1) puede tener, a lo más, una solución.

(Sugerencia: Si u es la diferencia entre dos soluciones de (5.1), entonces u satisface un problema como (5.1) , con $f = g = 0$. Estúdiese entonces la función de energía $I(t) = \int_0^{\pi} \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2\right)\, dx$, donde u_x y u_t indican, respectivamente, las derivadas parciales de la función u, respecto de las variables x y t.)

Solución: Sean u_1, u_2 dos soluciones de (5.1). Entonces, la función $u = u_1 - u_2$ verifica $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y el problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \le x \le \pi, t > 0 \\
u(x,0) &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
\frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \le x \le \pi \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \ge 0.
\end{aligned}
\tag{5.2}
$$

Definamos la función (energía de la onda u en el tiempo t) $I : [0, +\infty) \to \mathbb{R}$, como

$$
I(t) = \int_0^{\pi} \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2\right)\, dx. \tag{5.3}
$$

Como $u(x,0) = 0,\ \forall\ x \in [0,\pi]$, deducimos $u_x(x,0) = 0,\ \forall\ x \in [0,\pi]$. También, de las condiciones iniciales satisfechas por u, se tiene $u_t(x,0) = 0,\ \forall\ x \in [0,\pi]$. Esto muestra que $I(0) = 0$. Además, derivando bajo el signo integral y teniendo en cuenta que u es solución de la ecuación de ondas, obtenemos:

$$
I'(t) = \int_0^{\pi} (2u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + 2u_t(x,t)u_{tt}(x,t))\ dx =
$$

$$
= \int_0^{\pi} (2u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + 2u_t(x,t)u_{xx}(x,t))\ dx =
$$

$$
2\int_0^{\pi} \frac{\partial}{\partial x}(u_x(x,t)u_t(x,t))\, dx =
$$

$$
= 2\ u_x(x,t)u_t(x,t)]_0^{\pi} =
$$

$$
2u_x(\pi,t)u_t(\pi,t) - 2u_x(0,t)u_t(0,t).
$$

Como $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \forall\ t > 0$, entonces $u_t(\pi,t) = u_t(0,t) = 0, \forall t > 0$.

En conclusión, $I'(t) = 0,\ \forall\ t > 0$. O lo que es lo mismo, la función I es constante en $[0, +\infty)$. Como $I(0) = 0$, se obtiene $I(t) = 0,\ \forall\ t \ge 0$. Ello obliga a que $u_x(x,t) = u_t(x,t) = 0, \forall\ (x,t) \in \overline{\Omega}$. Así pues, u debe ser constante en $\overline{\Omega}$. Como

$u(x,0) = 0,\ \forall\ x \in [0,\pi]$, se obtiene $u \equiv 0$, en $\overline{\Omega}$.

Una vez que hemos demostrado que (5.1) puede tener como mucho una solución, habrá que ver que, por lo menos, hay una. Como en el capítulo anterior, para tratar de intuir cuál puede ser la forma de la solución buscada, pensemos que u es una función de dos variables y que las funciones de dos variables más sencillas que se pueden presentar son las que vienen dadas por el producto de dos funciones de una variable. Entonces, podemos hacernos la siguiente pregunta: ¿Tendrá (5.1) soluciones de la forma

$$u(x,t) = X(x)T(t), \tag{5.4}$$

para funciones convenientes $X : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, y $T : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$?

Procedamos de manera formal. Si la respuesta a la anterior pregunta fuese afirmativa, entonces necesariamente se ha de cumplir la relación

$$X''(x)T(t) = X(x)T''(t),\ \forall\ (x,t) \in [0,\pi] \times [0,+\infty) \tag{5.5}$$

Suponiendo, por un momento, que $X(x)$ no se anula en $(0,\pi)$ y que $T(t)$ no se anula en $(0,+\infty)$, obtenemos las relaciones

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)},\ \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty).$$

Como $x \in (0,\pi)$ y $t \in (0,+\infty)$ son variables independientes, la única posibilidad para que esto sea así, es que ambos cocientes sean funciones constantes. Es decir, debe existir algún $\lambda \in \mathbb{R}$, tal que

$$\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = \lambda,\ \forall (x,t) \in (0,\pi) \times (0,+\infty).$$

Esto origina las dos ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0,\ x \in [0,\pi], \tag{5.6}$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0,\ t \in [0,+\infty). \tag{5.7}$$

Además, puesto que la solución buscada u debe ser continua en $\overline{\Omega}$, se ha de cumplir

$$u(0,t) = X(0)T(t) = u(\pi,t) = X(\pi)T(t) = 0, \forall\ t \in [0,+\infty).$$

Esto nos conduce a la "condición natural" que ha de satisfacer la función X en los extremos del intervalo : $X(0) = X(\pi) = 0$. Todo ello origina el siguiente problema de contorno para $X(x)$:

$$X''(x) - \lambda X(x) = 0, \; x \in [0, \pi], \; X(0) = X(\pi) = 0. \tag{5.8}$$

Ahora, es conocido (véase [15]) que (5.8) tiene solución no trivial $X \in C^2[0, \pi]$, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, el conjunto de soluciones de (5.8) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx)$.

Por otra parte, la constante λ ha de ser la misma en (5.6) y (5.7) . Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de soluciones reales de (5.7) es un espacio vectorial real de dimensión dos engendrado por las funciones $T_n^1(t) = cos(nt), T_n^2(t) = sen(nt)$.

Por tanto, cuando $\lambda = -n^2, \; n \in \mathbb{N}$, cualquier solución de (5.7) es de la forma $Z_n(t) = A_n cos(nt) + B_n sen(nt)$, con A_n, B_n números reales arbitrarios.

Veamos que el procedimiento anterior permite calcular la única solución de (5.1) en casos sencillos.

EJERCICIO 2:

Supongamos que en (5.1), las funciones f y g son de la forma $f(x) = asen(nx), \; g(x) = bsen(nx)$, para algún $n \in \mathbb{N}$, con a y b números reales dados. Demuéstrese que (5.1) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: Repasemos el procedimiento anterior, sobre el método de separación de variables. Si se ha entendido adecuadamente, es trivial comprobar que la función $u(x, t) = (acos(nt) + \frac{b}{n} sen(nt)) sen(nx)$, es la solución pedida. En caso contrario, puede comprobarse directamente.

EJERCICIO 3:

Supongamos que en (5.1), las funciones f y g son de la forma $f(x) = asen(nx), \; g(x) = bsen(mx)$, siendo n y m números naturales distintos y a y b números reales dados. Demuéstrese que (5.1) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: Es trivial que la función

$$u(x, t) = acos(nt) sen(nx) + \frac{b}{m} sen(mt) sen(mx)$$

es la solución pedida.

Teniendo en cuenta que la ecuación de ondas es lineal (y por tanto la superposición de un números finito de soluciones de la misma, es también una solución de ella), y también lo son las condiciones de contorno en (5.1), los dos ejercicios anteriores permiten fácilmente resolver el siguiente, donde las funciones f y g son combinación lineal finita de funciones de la forma $sen(nx), \; n \in \mathbb{N}$.

EJERCICIO 4:

Supongamos que en (5.1), las funciones f y g son de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{p} a_i sen(n_i x),$$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{q} b_j sen(m_j x),$$

siendo a_i, $1 \leq i \leq p$, b_j, $1 \leq j \leq q$, números reales dados y n_i, $1 \leq i \leq p$, m_j, $1 \leq j \leq q$, números naturales distintos.

Demuéstrese (5.1) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: De nuevo es trivial (atención a las trivialidades, pues ayudan a entender casos más difíciles) comprobar que la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{p} a_i cos(n_i t) sen(n_i x) + \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{m_j} sen(m_j t) sen(m_j x)$$

es la solución buscada.

¿Qué hemos conseguido hasta ahora? No está nada mal, puesto que hemos calculado, de manera explícita, la única solución de (5.1) en muchos casos particulares: todos aquellos en los que las funciones f y g son combinación lineal finita de funciones de la forma $sen(nx)$, $n \in \mathbb{N}$. Pero, ¿es esto suficiente para estar satisfechos? Pensemos por un momento en el concepto de solución de (5.1) , dado en la definición 1. Si (5.1) tuviese solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$, entonces necesariamente la función $f \in C^2[0,\pi]$ y $g \in C^1[0,\pi]$. Además,

$$f(0) = u(0,0) = \lim_{t \to 0^+} u(0,t) = 0,$$

$$f(\pi) = u(\pi,0) = \lim_{t \to 0^+} u(\pi,t) = 0,$$

$$g(0) = u_t(0,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = 0,$$

$$g(\pi) = u_t(\pi,0) = \lim_{h \to 0^+} \frac{u(\pi,h) - u(\pi,0)}{h} = 0.$$

$$f''(0^+) = \frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(0,0)}{\partial t^2} = 0,$$

$$f''(\pi^-) = \frac{\partial^2 u(\pi,0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(\pi,0)}{\partial t^2} = 0.$$

(*El lector debería deducir con detalle, las relaciones* $f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0$, *usando para ello las igualdades* $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \forall\, t \geq 0$).

Lo que nos interesa destacar de esto es lo siguiente: si (5.1) tiene solución, f y g han de ser funciones con una adecuada regularidad y, además, han de satisfacer las llamadas condiciones de compatibilidad (de existencia de soluciones)

$$\begin{gathered} f(0) = f(\pi) = 0,\ g(0) = g(\pi) = 0, \\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0. \end{gathered} \tag{5.9}$$

La mayoría de los lectores (al menos esa es mi ilusión), habrán tenido la intuición de lo que tratamos hacer. En efecto, teniendo en cuenta los resultados del capítulo II, sabemos que cualquier par de funciones f y g con las características anteriores, admiten unos desarrollos en serie de Fourier, $S(f)$ y $S(g)$, respectivamente, de la forma

$$\begin{gathered} S(f) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(n(.)),\ f_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}, \\ \\ S(g) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n sen(n(.)),\ g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} g(x)sen(nx)\,dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{gathered} \tag{5.10}$$

Luego, teniendo en cuenta los ejercicios anteriores, es lógico preguntarse: ¿será la función

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n cos(nt) + \frac{g_n}{n} sen(nt) \right) sen(nx),$$

la única solución de (5.1) ?

Es justo mencionar que, para formular la pregunta anterior, hemos sido valientes, pero jugamos con ventaja: en el capítulo anterior se ha aplicado un procedimiento parecido y dio resultado. Aquí va a ocurrir lo mismo. Pero, previo al intento de dar una respuesta positiva a la pregunta anterior, es bueno y conveniente, hacer algunos ejercicios elementales sobre regularidad de extensiones impares de funciones definidas en $[0,\pi]$ y sobre la convergencia de ciertas series construidas a partir de los coeficientes de Fourier de la función dada.

EJERCICIO 5:

Sea $h : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ y $\tilde{h} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, la extensión impar de h. Es decir,

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} -h(-x), & \text{si } x \in [-\pi, 0), \\ h(x), & \text{si } x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{5.11}$$

a) Demuéstrese que si $h \in C[0,\pi]$, verifica $h(0) = h(\pi) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C[-\pi,\pi]$

y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi)$.

b) Demuéstrese que si $h \in C^1[0,\pi]$, verifica $h(0) = h(\pi) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^1[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi)$, $\tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ es convergente, donde $h_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} h(x)sen(nx)\,dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Demuéstrese que si $h \in C^2[0,\pi]$, verifica $h(0) = h(\pi) = h''(0^+) = h''(\pi^-) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^2[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$, $\tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n|h_n|$ es convergente.

d) Demuéstrese que si $h \in C^3[0,\pi]$, verifica $h(0) = h(\pi) = h''(0^+) = h''(\pi^-) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^3[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$,

$\tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-), \tilde{h}'''(-\pi^+) = \tilde{h}'''(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|h_n|$ es convergente.

e) Propóngase el lector dar el enunciado general, a partir de los anteriores.

(Sugerencia: lo de las propiedades de regularidad de las extensiones impares de la función h considerada, es un ejercicio elemental de Análisis Matemático de una variable real. Para la demostración de la convergencia de las series citadas, úsense los resultados del capítulo II que relacionan la regularidad de una función con la convergencia de su serie de Fourier: ejercicios 15 y 18 del capítulo II y las notas y comentarios posteriores).

Solución: a) Lo único que se necesita demostrar es la continuidad de $\tilde{h}$ en el punto $x = 0$. Ahora bien, observemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \tilde{h}(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0) = 0,$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \tilde{h}(x) = \lim_{x\to 0^-} -h(-x) = -h(0) = 0.$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \tilde{h}(x) = \tilde{h}(0)$. Además, $\tilde{h}(-\pi) = -h(\pi) = 0 = h(\pi) = \tilde{h}(\pi)$.

b) Nuevamente, el único punto digno de estudiar es $x = 0$. Aquí se tiene

$$\tilde{h}'(0^+) = \lim_{k\to 0^+} \frac{\tilde{h}(k) - \tilde{h}(0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{h(k) - h(0)}{k} = h'(0^+).$$

y

$$\tilde{h}'(0^-) = \lim_{k\to 0^-} \frac{\tilde{h}(k) - \tilde{h}(0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{-h(-k) - h(0)}{k} =$$

$$= \lim_{k\to 0^-} \frac{h(-k) - h(0)}{-k} = h'(0^+).$$

En conclusión,

$$\tilde{h}'(x) = \begin{cases} h'(-x), \text{ si } -\pi \le x < 0, \\ h'(0^+), \text{ si } x = 0, \\ h'(x), \text{ si } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Por tanto $\tilde{h} \in C^1[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$.

Si ahora aplicamos los resultados del ejercicio 15, del capítulo II, a la función $\tilde{h}$, deducimos que

$$\tilde{h}(x) = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[C_n cos(nx) + D_n sen(nx)],$$

uniformemente en $[-\pi, \pi]$, donde

$$C_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(x) cos(nx)\, dx, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\},$$

$$D_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \tilde{h}(x) sen(nx)\, dx, \ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

Además, allí se probaba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(|C_n| + |D_n|)$ es convergente.

Trivialmente $C_n = 0, \ \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ (pues la función $\tilde{h}(x)cos(nx)$ es impar) y $D_n = h_n, \ \forall\, n \in \mathbb{N}$ (puesto que la función $\tilde{h}(x)cos(nx)$ es par). Así, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ es convergente.

Para los apartados c) y d), se usan las mismas ideas, respectivamente, que para a) y b).

Respecto de la convergencia de las series indicadas, si por ejemplo estamos en el apartado c), entonces, en el ejercicio 18 del capítulo II se probaba que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(n|C_n| + n|D_n|)$ es convergente. Esto prueba entonces que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|h_n|$ es convergente.

e) Sea $h \in C^k[0, \pi], \ k \in \mathbb{N}$. Entonces si:

e.1) k es par y $h(0) = h^{j)}(0^+) = h(\pi) = h^{j)}(\pi^-) = 0, \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, tal que $j \le k$, j par, se tiene que $\tilde{h} \in C^k[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \ \tilde{h}^{m)}(-\pi^+) = \tilde{h}^{m)}(\pi^-), \ \forall\, m \in \mathbb{N}$, tal que $m \le k$.

e.2) k es impar y $h(0) = h^{j)}(0^+) = h(\pi) = h^{j)}(\pi^-) = 0, \ \forall\, j \in \mathbb{N}$, tal que $j \le k - 1$, j par, se tiene que $\tilde{h} \in C^k[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \ \tilde{h}^{m)}(-\pi^+) = \tilde{h}^{m)}(\pi^-), \ \forall\, m \in \mathbb{N}$, tal que $m \le k$.

En ambos casos, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|h_n|$ es convergente.

La demostración, si es que se estima necesaria a estas alturas, se puede hacer por inducción sobre k.

Nota importante.

En el ejercicio previo se han dado condiciones suficientes para que la extensión $\tilde{h}$ (impar y 2π-periódica) de una función h, definida en $[0,\pi]$, sea de clase $C^k[-\pi,\pi]$ y que tanto $\tilde{h}$, como sus derivadas hasta el orden k, sean, además, funciones 2π-periódicas. Estas condiciones suficientes no son, en absoluto, las mejores. Por ejemplo, imaginemos que h cumple:

c') $h \in C^2[0,\pi],\ h(0) = h(\pi) = 0$. Entonces, por el apartado b), tendríamos $\tilde{h} \in C^1[-\pi,\pi],\ \tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi),\ \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$. Además, como

$$\tilde{h}'(x) = \begin{cases} h'(-x),\ x \in [-\pi, 0], \\ h'(x),\ x \in [0,\pi], \end{cases}$$

se tiene

$$\tilde{h}''(x) = \begin{cases} -h''(-x),\ x \in [-\pi, 0), \\ h''(x),\ x \in (0,\pi]. \end{cases}$$

Luego es trivial (cuidado con las trivialidades), que $\tilde{h}'$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}'' \in L^2(-\pi,\pi)$. Por tanto (véanse las notas y comentarios del ejercicio 18, capítulo II), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|h_n|$ es convergente, a pesar de que $\tilde{h}$ no sea, necesariamente, de clase $C^2[-\pi,\pi]$. Este resultado se usará en el ejercicio que sigue.

EJERCICIO 6:

Demuéstrese que si f y g satisfacen las condiciones

$$\begin{gathered} f \in C^3[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^2[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{5.12}$$

entonces (5.1) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nt) + B_n sen(nt))\, sen(nx), \tag{5.13}$$

donde

$$\begin{aligned} A_n &= f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) sen(nx)\, dx, \\ B_n &= \frac{g_n}{n} = \frac{2}{n\pi} \int_0^{\pi} g(x) sen(nx)\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{5.14}$$

(Sugerencia: Derivando (formalmente) término a término la serie que define u hasta el orden dos, se ve que, en realidad, el ejercicio lo tendríamos resuelto si la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2|A_n|+n^2|B_n|\right) =$

$\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2|f_n|+n|g_n|\right)$ es convergente. Ahora bien esto no es difícil de probar usando (5.12) y el ejercicio anterior).

Solución: Conviene dividirla en las siguientes etapas:

1) La función u definida en (5.13) es de clase $C^2(\overline{\Omega})$.

2) La función u verifica (5.1).

Respecto de la primera etapa, es suficiente demostrar que las series

$$
\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(nt)+B_n sen(nt))\, sen(nx),\\
\sum_{n=1}^{\infty}(-nA_n sen(nt)+nB_n cos(nt))\, sen(nx),\\
\sum_{n=1}^{\infty}(nA_n cos(nt)+nB_n sen(nt))\, cos(nx),\\
\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2A_n cos(nt)+n^2B_n sen(nt)\right)(-sen(nx)),\\
\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2A_n sen(nt)+n^2B_n cos(nt)\right) cos(nx),\\
\sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2A_n cos(nt)-n^2B_n sen(nt)\right) sen(nx),
\end{gathered}
\tag{5.15}
$$

convergen uniformemente en $\overline{\Omega}$. En efecto, si ello fuese así, entonces

$$
\begin{aligned}
u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(A_n cos(nt)+B_n sen(nt))\, sen(nx),\\
u_t(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(-nA_n sen(nt)+nB_n cos(nt))\, sen(nx),\\
u_x(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}(nA_n cos(nt)+nB_n sen(nt))\, cos(nx),\\
u_{xx}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2A_n cos(nt)+n^2B_n sen(nt)\right)(-sen(nx)),\\
u_{xt}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2A_n sen(nt)+n^2B_n cos(nt)\right) cos(nx),\\
u_{tt}(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-n^2A_n cos(nt)-n^2B_n sen(nt)\right) sen(nx),
\end{aligned}
\tag{5.16}
$$

uniformemente en $\overline{\Omega}$. Luego u sería de clase $C^2(\overline{\Omega})$.

Para probar que las series de funciones definidas en (5.15) son uniformemente convergentes, lo más sencillo es acotar la correspondiente serie de los valores absolutos de las funciones, por series numéricas convergentes. A este respecto, observemos que las series de funciones

$$\begin{gathered}
\sum_{n=1}^{\infty} |\,(A_n cos(nt) + B_n sen(nt))\, sen(nx)|, \\
\sum_{n=1}^{\infty} |\,(-nA_n sen(nt) + nB_n cos(nt))\, sen(nx)|, \\
\sum_{n=1}^{\infty} |\,(nA_n cos(nt) + nB_n sen(nt))\, cos(nx)|, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(n^2 A_n cos(nt) + n^2 B_n sen(nt)\right)(-sen(nx))\right|, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(-n^2 A_n sen(nt) + n^2 B_n cos(nt)\right) cos(nx)\right|, \\
\sum_{n=1}^{\infty} \left|\left(-n^2 A_n cos(nt) - n^2 B_n sen(nt)\right) sen(nx)\right|,
\end{gathered} \tag{5.17}$$

están acotadas, todas, por la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|), \tag{5.18}$$

que, teniendo en cuenta la relación (5.14) es la misma que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2|f_n| + n|g_n|\right). \tag{5.19}$$

Resumiendo, tendremos demostrada la primera etapa, es decir,

$u \in C^2(\overline{\Omega})$, si conseguimos demostrar que la serie (5.19) es convergente. Ahora bien, que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|f_n|$ es convergente, es una consecuencia del apartado d) del ejercicio anterior. Por otra parte, si definimos la función $\tilde{g}$, como la extensión impar a $[-\pi,\pi]$ de g, es fácil comprobar que, a partir de la hipótesis (5.12) se tiene, $\tilde{g} \in C^1[-\pi,\pi]$, $\tilde{g}(-\pi) = \tilde{g}(\pi)$, $\tilde{g}'(-\pi^+) = \tilde{g}'(\pi^-)$. Además, $\tilde{g}'$ es una función absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$, con $\tilde{g}'' \in L^2(-\pi,\pi)$. Así, teniendo en cuenta la nota (importante) anterior, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|g_n|$ es convergente.

b) Este apartado ya es muy fácil de hacer. No obstante, a pesar de que las ideas que se usan son sencillas, prefiero exponerlas: por ejemplo, ¿por qué la función u es solución de la ecuación de ondas? Pensemos que $u = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$, donde, para cada n natural, u_n viene dada por

$$u_n(x,t) = (A_n cos(nt) + B_n sen(nt))sen(nx).$$

Ahora bien, cada función $u_n,\ n \in \mathbb{N}$, es solución de la ecuación de ondas en $\overline{\Omega}$, y el apartado a) muestra que "se puede intercambiar la suma de la serie que define la función u, con la derivación, hasta las derivadas parciales de orden dos". Por tanto,

$$u_{xx} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_{xx},$$
$$u_{tt} = \sum_{n=1}^{\infty} (u_n)_{tt},\ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

lo que prueba que u es solución de la ecuación de ondas en $\overline{\Omega}$.

Además, $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n sen(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n sen(nx) = f(x)$, uniformemente en $[0,\pi]$, debido a las propiedades de regularidad (5.12) de f (ejercicio 21, capítulo II). Análogamente, $u_t(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n sen(nx) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n sen(nx) = g(x)$, uniformemente en $[0,\pi]$, debido a las propiedades de regularidad (5.12) de g (otra vez, ejercicio 21, capítulo II). Por último, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ \forall\, t \geq 0$.

Estudiemos un caso concreto del problema (5.1), para ver cuáles son las principales dificultades a la hora de la aplicabilidad del teorema anterior.

EJERCICIO 7:

Calcúlese la única solución de (5.1) cuando $f(x) = sen^3(x), g(x) = x(\pi - x),\ \forall\, x \in [0,\pi]$.

Solución: Calculemos los desarrollos en serie de Fourier (5.10) de las funciones f y g. Como

$$sen^3(x) = \frac{3}{4}sen(x) - \frac{1}{4}sen(3x),\ \forall\, x \in [0,\pi],$$

lo anterior es el desarrollo que andamos buscando para f (*¿alguien lo duda?*).

Respecto del desarrollo de g, tenemos

$$g_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x)sen(nx)\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}.$$

La primitiva de la función $(-x^2 + \pi x)sen(nx)$ se puede calcular realizando, dos veces, una integración por partes. Resulta así

$$\int_0^{\pi} (-x^2 + \pi x)sen(nx)\, dx =$$

$$\frac{x^2cos(nx)}{n} - \frac{2xsen(nx)}{n^2} - \frac{2cos(nx)}{n^3} - \frac{\pi x cos(nx)}{n} + \frac{\pi sen(nx)}{n^2}\Bigg]_0^{\pi},$$

que, después de algunos cálculos elementales, da

$$g_n = \begin{cases} 0, \ \text{si } n \text{ es par }, \\ \dfrac{8}{\pi n^3}, \ \text{si } n \text{ es impar }. \end{cases}$$

Teniendo en cuenta la fórmula (5.13) , la única solución de (5.1) es, en este caso,

$$u(x,t) = \frac{3}{4}cos(t)sen(x) - \frac{1}{4}cos(3t)sen(3x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{\pi(2n-1)^4} sen((2n-1)t)sen((2n-1)x).$$

Pensemos por un momento si el resultado del ejercicio 6 es del todo satisfactorio (*una de las mejores cualidades que puede cultivar el lector, es el espíritu crítico. Ello le debe llevar a analizar las ventajas e inconvenientes de todo resultado científico que encuentre. De hecho, ningún resultado científico es del todo bueno ni del todo malo; todos tienen aspectos positivos y negativos*). Quizás su gran cualidad sea que permite calcular explícitamente la solución de (5.1) (en forma de serie), si los desarrollos en serie de Fourier de los datos iniciales f y g son conocidos. El gran inconveniente es que, además de los problemas que podamos tener para calcular la solución en casos concretos (piénsese en el ejercicio previo, donde los datos son muy simples y a pesar de eso, el cálculo de la solución ya admite una cierta complejidad), las condiciones que se exigen sobre las condiciones iniciales f y g parecen ser demasiado restrictivas, de acuerdo con el concepto de solución expresado en la definición 1. En efecto, de acuerdo con tal definición, si el problema (5.1) tuviese solución, entonces necesariamente $f \in C^2[0,\pi]$, y $g \in C^1[0,\pi]$ y, además, han de satisfacer las condiciones de compatibilidad (5.9) (condiciones necesarias para la existencia de solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$ de (5.1) . Podemos por tanto pensar en rebajar las hipótesis de regularidad dadas en (5.12) y demostrar que, a pesar de ello, (5.1) tiene solución única. Este es nuestro objetivo en lo que sigue. Como en el caso de la ecuación del calor, el procedimiento constará de los pasos siguientes:

1) Expresar la única solución de (5.1), cuando f y g verifican (5.12) , de una manera más conveniente para nuestro propósito.

2) Demostrar que esta última manera permite rebajar las hipótesis de regularidad sobre los datos iniciales.

Esto lo hacemos con detalle en la página siguiente.

Nuestro punto de partida es la fórmula (5.13) . Teniendo en cuenta las fórmulas elementales de la Trigonometría que transforman productos en sumas (véase el ejercicio 13 del capítulo I), se tiene

$$\begin{gathered}u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}[A_n cos(nt)+B_n sen(nt)]sen(nx)=\\ \sum_{n=1}^{\infty}A_n\left[\frac{1}{2}sen(n(x+t))+\frac{1}{2}sen(n(x-t))\right]+\\ \sum_{n=1}^{\infty}B_n\left[\frac{1}{2}cos(n(x-t))-\frac{1}{2}cos(n(x+t))\right]=\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{1}{2}sen(n(x+t))-B_n\frac{1}{2}cos(n(x+t))\right]+\\ \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n\frac{1}{2}sen(n(x-t))+B_n\frac{1}{2}cos(n(x-t))\right]=\\ =\frac{1}{2}[F_1(x+t)+F_2(x+t)]+\frac{1}{2}[F_1(x-t)-F_2(x-t)],\end{gathered} \tag{5.20}$$

donde

$$\begin{gathered}F_1:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_1(z)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n sen(nz),\ \forall\ z\in\mathbb{R},\\ F_2:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ F_2(z)=-\sum_{n=1}^{\infty}B_n cos(nz),\ \forall\ z\in\mathbb{R}.\end{gathered} \tag{5.21}$$

Pensemos que la hipótesis (5.12) garantiza que la serie $\sum_{n=1}^{\infty}\left(n^2|A_n|+n^2|B_n|\right)$ es convergente, con lo que F_1 y F_2 están bien definidas.

Ahora viene una pregunta clave: ¿qué relación tienen las funciones F_1 y F_2 con los datos iniciales f y g? La respuesta la tenemos en el ejercicio que sigue.

EJERCICIO 8:

Bajo la hipótesis (5.12) , demuéstrese:

a) F_1 es la extensión impar y $2\pi-$periódica de la función f a $\mathbb{R}$ (es decir, F_1 es una función impar, $2\pi-$periódica y $F_1(z) = f(z),\ \forall\ z \in [0,\pi]$).

b) F_2' es la extensión impar y $2\pi-$periódica de la función g a $\mathbb{R}$ (es decir, F_2' es una función impar, $2\pi-$periódica y $F_2'(z) = g(z),\ \forall\ z \in [0,\pi]$).

Solución: a) Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |A_n|$ es convergente (ejercicio 6) , la función F_1, definida en (5.21) , es claramente impar y $2\pi-$ periódica. Además, si $z \in [0,\pi]$, debido a las propiedades de regularidad de f, se tiene $F_1(z) = f(z)$ (ejercicio 21, capítulo II).

b) Como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n|B_n|$ es convergente (ejercicio 6) , la función F_2, definida en (5.21) , es de clase C^1, y su derivada se puede calcular derivando término a término, es decir, $F_2'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} nB_n sen(nz) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n sen(nz)$. Esta función es claramente impar y $2\pi-$ periódica. Además, si $z \in [0,\pi]$, debido a las propiedades de regularidad de g, se tiene $F_2'(z) = g(z)$ (ejercicio 21, capítulo II).

Volvamos a la fórmula (5.20) . Tenemos,

$$\begin{gathered} u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_2(x+t)] + \frac{1}{2}[F_1(x-t) - F_2(x-t)] = \\ \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}[F_2(x+t) - F_2(x-t)] = \\ \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} F_2'(z)\, dz. \end{gathered} \tag{5.22}$$

Estamos ya en condiciones de probar que las restricciones $f \in C^2[0,\pi]$, $g \in C^1[0,\pi]$ y (5.9), son necesarias y suficientes para que (5.1) tenga solución $u \in C^2(\overline{\Omega})$.

EJERCICIO 9:

Demuéstrese que si f y g satisfacen las condiciones

$$\begin{gathered} f \in C^2[0,\pi],\ f(0) = f(\pi) = 0,\ f''(0^+) = f''(\pi^-) = 0, \\ g \in C^1[0,\pi],\ g(0) = g(\pi) = 0, \end{gathered} \tag{5.23}$$

entonces (5.1) tiene una única solución u dada por la fórmula (llamada fórmula de d'Alembert)

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[F_1(x+t) + F_1(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} G_1(z)\, dz, \tag{5.24}$$

donde F_1 y G_1 son, respectivamente, las extensiones impares y $2\pi-$periódicas de f y g a $\mathbb{R}$.

Solución: Los apartados b) y c) del ejercicio 5 garantizan, respectivamente, que la función G_1 es de clase $C^1(\mathbb{R},\mathbb{R})$ y que la función F_1 es de clase $C^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$ (intente el lector comprobar esta afirmación con detalle). Por tanto, la función u definida en (5.24) es de clase $C^2(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$. También, es trivial que (*esto es estupendo para repasar el Teorema fundamental del Cálculo*):

$$u_x(x,t) = \frac{1}{2}[F_1'(x+t) + F_1'(x-t)] + \frac{1}{2}[G_1(x+t) - G_1(x-t)],$$

$$u_t(x,t) = \frac{1}{2}[F_1'(x+t) - F_1'(x-t)] + \frac{1}{2}[G_1(x+t) + G_1(x-t)],$$

$$u_{xx}(x,t) = \frac{1}{2}[F_1''(x+t) + F_1''(x-t)] + \frac{1}{2}[G_1'(x+t) - G_1'(x-t)],$$

$$u_{tt}(x,t) = \frac{1}{2}[F_1''(x+t) + F_1''(x-t)] + \frac{1}{2}[G_1'(x+t) - G_1'(x-t)],$$

con lo que u es solución de la ecuación de ondas en Ω.

Además,

$$u(x,0) = \frac{1}{2}[F_1(x) + F_1(x)] = f(x), \ \forall\, x \in [0,\pi],$$

$$u_t(x,0) = \frac{1}{2}[F_1'(x) - F_1'(x)] + \frac{1}{2}[G_1(x) + G_1(x)] = g(x), \ \forall\, x \in [0,\pi].$$

También, si $t \geq 0$, entonces

$$u(0,t) = \frac{1}{2}[F_1(t) + F_1(-t)] + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} G_1(z)\, dz = 0,$$

por ser las funciones F_1 y G_1 impares.

Además, por ser F_1 y G_1 impares y $2\pi-$periódicas, se tiene

$$u(\pi,t) = \frac{1}{2}[F_1(\pi+t) + F_1(\pi-t)] + \frac{1}{2}\int_{\pi-t}^{\pi+t} G_1(z)\, dz =$$
$$\frac{1}{2}[F_1(-\pi+t) + F_1(\pi-t)] + \frac{1}{2}\int_{-t}^{t} G_1(z+\pi)\, dz = 0,$$

puesto que la función $G_1(z+\pi)$ es impar $(G_1(-z+\pi) = G_1(-z-\pi) = -G_1(z+\pi), \ \forall\, z \in \mathbb{R})$.

Nota.

La interpretación física de la solución de (5.1), dada por (5.24), es muy interesante. La función solución u se puede descomponer como suma de dos funciones u_1 y u_2, dadas, respectivamente, por las fórmulas:

$$u_1(x,t) = \frac{1}{2}F_1(x+t) + \frac{1}{2}\int_0^{x+t} G_1(z)\,dz,$$

$$u_2(x,t) = \frac{1}{2}F_1(x-t) + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{0} G_1(z)\,dz.$$

Es trivial comprobar (*vamos, compruébese*), que tanto u_1 como u_2 son soluciones de la ecuación de ondas. Por lo tanto, la única solución de (5.1) es suma (o superposición) de dos ondas, u_1 y u_2.

Pensemos un poco más sobre la naturaleza de la onda u_1. Para cada tiempo t, positivo, la gráfica de la función u_1, como función de la variable $x \in [0,\pi]$, describe la forma que una cuerda vibrante adoptaría, si su vibración viniese dada por la función u_1. Así pues, si pudiésemos representar la función u_1, como función de la variable $x \in [0,\pi]$, para valores distintos del tiempo t, tendríamos una visualización aproximada de la vibración de la cuerda dada por la función u_1. Además, daría la impresión de que la gráfica inicial $u_1(x,0),\ x \in [0,\pi]$ se va desplazando hacia la izquierda (se conviene, basados en que el coeficiente de t, en la expresión $x+t$, es uno, en que tal desplazamiento tiene velocidad uno). Es muy fácil entender esto si representamos una situación concreta, para diferentes valores del tiempo (véase la introducción histórica).

Análogamente, la función u_2 representaría una onda, que se desplaza hacia la derecha, con velocidad uno.

En conclusión, la única solución de (5.1) viene dada como superposición de dos ondas: una que se desplaza hacia la izquierda, con velocidad uno, y otra que se desplaza hacia la derecha, también con velocidad uno. De ahí que al método empleado para llegar a la fórmula (5.24) se le conozca con el nombre de **método de propagación de las ondas**. Insistamos en que la primera onda es una función de la variable $x+t$ mientras que la segunda lo es de $x-t$.

Hoy en día, un tema muy interesante de investigación es el estudio de ecuaciones de ondas no lineales de la forma

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = h(u(x,t)).$$

Para esta clase de problemas (y también para problemas parabólicos no lineales), la determinación de ondas que sean función de $x+t$ o de $x-t$ (“travelling waves”), es un apasionante y difícil tema (véase [37]).

Una vez concluido el problema sobre la existencia y unicidad de soluciones de (5.1), hemos de dedicar algún tiempo al examen de las propiedades cualitativas de la solución. Esto es importante, pues nos permite evaluar si nuestro modelo se ajusta o no a la realidad, y por otra parte, permite comparar las soluciones de la ecuación de ondas con las soluciones de otras ecuaciones en derivadas parciales, algunas de ellas ya estudiadas, como la ecuación del calor. Comenzamos con una propiedad referente a la invariabilidad de la energía de la onda solución. Esta propiedad es lógica, puesto que en la ecuación de ondas que estamos considerando en este capítulo, no existe fuerza externa que actúe sobre la onda solución.

EJERCICIO 10:

Bajo las hipótesis (5.23) , denotemos por u a la única solución de (5.1). Definamos la energía de la onda u, en el tiempo t, como

$$I(t) = \int_0^\pi \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2\right) \, dx, \ \forall \, t \geq 0. \tag{5.25}$$

Demuéstrese que I es una función constante.

Solución: Si I es la función definida anteriormente, entonces

$$I'(t) = \int_0^\pi (2u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + 2u_t(x,t)u_{tt}(x,t)) \, dx =$$

$$= \int_0^\pi (2u_x(x,t)u_{xt}(x,t) + 2u_t(x,t)u_{xx}(x,t)) \, dx =$$

$$2\int_0^\pi \frac{\partial}{\partial x}(u_x(x,t)u_t(x,t)) \, dx =$$

$$= 2 \, u_x(x,t)u_t(x,t)]_0^\pi =$$

$$2u_x(\pi,t)u_t(\pi,t) - 2u_x(0,t)u_t(0,t).$$

Como $u(\pi,t) = u(0,t) = 0, \ \forall \, t > 0$, entonces $u_t(\pi,t) = u_t(0,t) = 0$, $\forall t > 0$.

En conclusión, $I'(t) = 0, \ \forall \, t > 0$. O lo que es lo mismo, la función I es constante en $[0, +\infty)$.

Como $I(0) = \displaystyle\int_0^\pi \left(u_x^2(x,0) + u_t^2(x,0)\right) \, dx = \int_0^\pi \left(f'(x)^2 + g(x)^2\right) \, dx$, tenemos

$$I(t) = \int_0^\pi \left(f'(x)^2 + g(x)^2\right) \, dx, \ \forall \, t \geq 0.$$

Nota.

Si en (5.1) hubiésemos considerado la ecuación de ondas no homogénea, es decir, la ecuación

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = h(x,t), 0 \leq x \leq \pi, t > 0, \tag{5.26}$$

donde h es una función continua no nula, entonces el principio de conservación de la energía no se mantiene necesariamente. Desde el punto de vista físico, la ecuación anterior modela las vibraciones de una cuerda en presencia de alguna fuerza externa h que depende del punto de abscisa x de la cuerda considerada y del tiempo t. Es claro que esta fuerza externa puede variar la energía I de la onda solución, aún en el caso en que la función h no dependa del tiempo. Para ver que esto es efectivamente así, tenemos el ejercicio que sigue:

EJERCICIO 11:

Demuéstrese que el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - sen(x), && 0 \leq x \leq \pi,\ t > 0 \\ u(x,0) &= 2sen(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\ u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, && t \geq 0 \end{aligned} \tag{5.27}$$

tiene una única solución u. Defínase la energía de la onda u, en el tiempo t, como en el ejercicio anterior. Demuéstrese que dicha energía no es constante.

(Sugerencia: búsquese la única solución del problema previo de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$).

Solución: Para aquellos que están obsesionados con el rigor, diremos que el concepto de solución de (5.27) , es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (5.27) puntualmente. Del ejercicio 1 se deduce que (5.27) puede tener, a lo más, una solución ¿Existirá alguna solución? Para pensar sobre esto, elaboremos alguna estrategia, tratando de aprovechar lo que ya sabemos. Para ello, siempre hay que intuir el camino a seguir y luego ponerse manos a la obra. En este caso, al ser la función h una función sólo de la variable x, podemos intentar buscar la única solución de (5.27) de la forma $u(x,t) = v(x,t) + s(x)$. Derivando y sustituyendo, llegamos al problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} + s''(x) &= \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} - sen(x), && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ v(x,0) + s(x) &= 2sen(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\ v(0,t) + s(0) &= v(\pi,t) + s(\pi) = 0, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.28}$$

Entonces, podemos pensar en elegir s tal que se verifique

$$s''(x) = -sen(x), \ 0 \leq x \leq \pi, \ s(0) = s(\pi) = 0, \tag{5.29}$$

y después calcular v.

La única solución de (5.29) es $s(x) = sen(x)$. Entonces, v ha de satisfacer el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ v(x,0) &= sen(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial v(x,0)}{\partial t} &= 0, && 0 \leq x \leq \pi \\ v(0,t) &= v(\pi,t) = 0, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.30}$$

Este problema es del tipo (5.1), ya estudiado. Su única solución es $v(x,t) = sen(x)cos(t)$ (ejercicio 2). En conclusión, la única solución de (5.27) es la función $u(x,t) = senxcost + senx$.

La función de energía de tal solución, $I(t)$, definida en (5.25) es

$$I(t) = \int_0^\pi \left((cosx \ cost + cosx)^2 + (senx \ sent)^2\right) \, dx.$$

Un cálculo elemental muestra que $I(t) = \pi(1 + cost), \ \forall \ t \geq 0$.

Como mencionamos al comenzar el capítulo, una propiedad que no cumplen, en general, las soluciones de la ecuación de ondas, es la referente a principios del máximo-mínimo. Esto marca una diferencia profunda con respecto a las soluciones de la ecuación del calor. A este respecto, veamos el ejercicio que sigue. En el primer apartado se muestra que, tanto si la velocidad inicial g es cero, como si no, la oscilación de la cuerda puede superar, en algún tiempo positivo, el valor máximo de la situación inicial. En el segundo se muestra que, cuando la velocidad inicial g es cero, entonces los valores máximo y mínimo del valor absoluto de la oscilación de la solución, deben coincidir con aquellos del valor absoluto de la situación inicial.

EJERCICIO 12:

Bajo las hipótesis (5.23) , sea u la única solución de (5.1) .

a) Demostrar que, tanto en el caso en que $g \equiv 0$, como en el que no, es posible la desigualdad

$$\max_{\overline{\Omega}} u > \max_{[0,\pi]} f. \tag{5.31}$$

b) Demostrar que si $g \equiv 0$, entonces

$$\max_{\overline{\Omega}} |u| = \max_{[0,\pi]} |f| \tag{5.32}$$

(Sugerencia: Para el apartado a) búsquense ejemplos sencillos, como los del ejercicio 2. Para el apartado b), úsese la fórmula de d'Alembert ((5.24)).

Solución:

a) Consideremos el problema (5.1) , con $f(x) = -sen(x), \ \forall\, x \in [0,\pi]$ y $g \equiv 0$. La única solución de (5.1) es (ejercicio 2) $u(x,t) = -cost\ senx$. Entonces, $\max_{\overline{\Omega}} u = 1$, mientras que $\max_{[0,\pi]} f = 0$.

Por otra parte, consideremos el problema (5.1) , con $f \equiv 0$ y $g(x) = senx, \ \forall\, x \in [0,\pi]$. La única solución de (5.1) es (ejercicio 2) $u(x,t) = sent\ senx$. Entonces, $\max_{\overline{\Omega}} u = 1$, mientras que $\max_{[0,\pi]} f = 0$.

b) Si $g \equiv 0$, es obvio de la fórmula de d'Alembert (5.24) que

$$\max_{[0,\pi]} |f| = \max_{x\in[0,\pi]} |u(x,0)| \le \max_{\overline{\Omega}} |u| \le \max_{[0,\pi]} |F_1| = \max_{[0,\pi]} |f|,$$

lo que prueba (5.32).

La próxima propiedad se refiere a la dependencia continua de la única solución u de (5.1), con respecto a las condiciones iniciales f y g.

EJERCICIO 13:

Sean f_1, g_1 y f_2, g_2 funciones cumpliendo (5.23) y notemos por u_1, u_2 las soluciones respectivas de (5.1). Demuéstrese que existe alguna

constante k positiva ($k \le 2\pi$) tal que

$$\max_{\overline{\Omega}} |u_1 - u_2| \le k(\max_{[0,\pi]} |f_1 - f_2| + \max_{[0,\pi]} |g_1 - g_2|) \tag{5.33}$$

Solución: La función $u = u_1 - u_2$ satisface un problema como (5.1), con condiciones iniciales $f = f_1 - f_2, g = g_1 - g_2$. Aplicando la fórmula (5.24) , para $t \in [0,2\pi]$, se tiene

$$|u(x,t)| \le \max_{[0,\pi]} |f| + t \max_{[0,\pi]} |g| \le$$
$$2\pi(\max_{[0,\pi]} |f_1 - f_2| + \max_{[0,\pi]} |g_1 - g_2|).$$

Como la función $u(x,t)$ es $2\pi-$periódica, con respecto a la variable t, (¿por qué?), el resultado está probado.

CUESTIÓN. ¿Podría ponerse una constante k más pequeña en (5.33) ?

Recordemos que la ecuación del calor tenía un efecto regularizante instantáneo sobre los datos iniciales (véase el ejercicio 15 del capítulo III). Esto no ocurre así con la ecuación de ondas. En ésta, la onda mantiene la regularidad inicial para tiempos arbitrariamente grandes.

EJERCICIO 14:

Sea f satisfaciendo (5.23) pero $f \notin C^3[0,\pi]$, y $g \equiv 0$. Notemos por u la única solución de (5.1) . Demostrar que existen valores de t tan grandes como queramos tal que la función $u(x,t)$ considerada como función de $x \in [0,\pi]$ no es de clase $C^3[0,\pi]$.

Solución: Sea n cualquier número natural. Entonces, de la fórmula (5.24) , tenemos

$$u(x, 2n\pi) = f(x), \ \forall\, x \in [0,\pi].$$

Esto acaba el ejercicio.

Nota.

- Recordemos que las soluciones de la ecuación del calor, estudiada en el capítulo previo, tendían a cero cuando el tiempo divergía a $+\infty$. En el ejercicio que acabamos de hacer se pone claramente de manifiesto que esto no es así para las soluciones de la ecuación de ondas. De hecho, las soluciones de (5.1) son $2\pi-$periódicas respecto del tiempo. ¿Ha observado ya el lector esta afirmación? Si no lo ha hecho, tiene la oportunidad de verlo ahora. En efecto, de la fórmula (5.24) , obtenemos

$$u(x,t+2\pi) = \frac{1}{2}[F_1(x+t+2\pi) + F_1(x-t-2\pi)] + \frac{1}{2}\int_{x-t-2\pi}^{x+t+2\pi} G_1(z)\,dz.$$

Como F_1 es 2π-periódica, $F_1(x+t+2\pi) = F_1(x+t), \ F_1(x-t-2\pi) = F_1(x-t)$. Además,

$$\int_{x-t-2\pi}^{x+t+2\pi} G_1(z)dz =$$

$$\int_{x-t-2\pi}^{x-t} G_1(z)dz + \int_{x-t}^{x+t} G_1(z)dz + \int_{x+t}^{x+t+2\pi} G_1(z)dz.$$

Pero, al ser G_1 impar y 2π-periódica, se tiene

$$\int_{a}^{a+2\pi} G_1(z)dz = 0, \ \forall\, a \in \mathbb{R}.$$

(*Intente el lector probar la afirmación anterior, que constituye un ejercicio muy recomendable de funciones de una variable real*).

Por tanto,

$$\int_{x-t-2\pi}^{x-t} G_1(z)dz = \int_{x+t}^{x+t+2\pi} G_1(z)dz = 0.$$

Luego, $u(x,t) = u(x,t+2\pi), \ \forall\, t \geq 0$. Esta última relación es desde luego inmediata si las condiciones iniciales f y g satisfacen (5.12) (¿por qué?).

- Hay situaciones sencillas cuyas condiciones no se corresponden con las hipótesis del ejercicio 9 sobre las funciones f y g. Por ejemplo, supongamos que, en el tiempo inicial $t = 0$, se tira de la cuerda en un punto de abscisa $x_0 \in (0, \pi)$ hasta una altura $h > 0$ y luego se suelta la cuerda. Esto se corresponde con un problema como (5.1) donde $g \equiv 0$ y la posición inicial f tiene por fórmula

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{h}{x_0} x, & \text{si } 0 \leq x \leq x_0, \\ \dfrac{h}{x_0 - \pi}(x - \pi), & \text{si } x_0 \leq x \leq \pi. \end{cases}$$

En este caso, $f \in C[0, \pi]$ pero $f \notin C^1[0, \pi]$. No obstante podemos hacer la reflexión siguiente: miremos la función u definida por la fórmula de d'Alembert (5.24) . Las funciones F_1 y $G_1 \equiv 0$, tienen perfecto sentido. La única diferencia con lo anterior es que F_1 no es ahora de clase $C^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. De hecho, la derivabilidad de esta función falla en todos aquellos puntos pertenecientes al conjunto $S = \{x_0 + 2k\pi, -x_0 + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$. No obstante $F_1 \in C^2(\mathbb{R} \setminus S, \mathbb{R})$. En conclusión, la función u definida por (5.24) es de clase C^2 (y verifica la ecuación de ondas), en todos aquellos puntos $(x, t) \in [0, \pi] \times [0, +\infty)$ tales que ni $x + t$ ni $x - t$ pertenezcan a S.

Los anteriores razonamientos permiten llamar a u, en este caso, una **solución generalizada** del problema (5.1) .

Igual que en el caso del problema de la conducción del calor, estudiado en el capítulo anterior, los métodos modernos del Análisis Funcional y de los espacios de funciones de Sobolev, permiten definir con rigor el concepto de solución generalizada y probar que, bajo condiciones muy amplias sobre las funciones f y g, el problema (5.1) tiene una única solución generalizada (véanse [6], [13]).

En el problema (5.1), hemos supuesto que la cuerda mantiene fijos sus extremos (en el eje de abscisas), para cualquier tiempo t. Desde el punto de vista físico, es claro que se pueden considerar otros tipos de problemas; por ejemplo, aquellos donde la cuerda tiene libres sus extremos. La formulación matemática de esta clase de situaciones origina el modelo (véase [39]):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, && 0 \leq x \leq \pi, t > 0 \\ u(x,0) &= f(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} &= g(x), && 0 \leq x \leq \pi \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(\pi,t) = 0, && t \geq 0. \end{aligned} \tag{5.34}$$

El concepto de solución para (5.34) es similar al de (5.1). Más concretamente, una solución de (5.34) es cualquier función $u \in C^2(\overline{\Omega})$ que satisface (5.34) puntualmente (recordemos que $\Omega = (0,\pi) \times (0,+\infty)$). Inmediatamente probamos que (5.34) puede tener, a lo más, una solución. Para ello, usaremos el mismo método que para el problema (5.1) .

EJERCICIO 15:

Demuéstrese que (5.34) puede tener, a lo más, una solución.

(Sugerencia: Repásese el ejercicio 1).

Solución: Sean u_1, u_2 dos soluciones de (5.34) . Entonces, la función $u = u_1 - u_2$ verifica $u \in C^2(\overline{\Omega})$ y el problema

$$\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &=& \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}, & 0 \le x \le \pi, t > 0 \\ u(x,0) &=& 0, & 0 \le x \le \pi \\ \dfrac{\partial u(x,0)}{\partial t} &=& 0, & 0 \le x \le \pi \\ u_x(0,t) &=& u_x(\pi,t) = 0, & t \ge 0. \end{array} \tag{5.35}$$

Definamos la función (energía de la onda en el tiempo t) $I : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$, como

$$I(t) = \int_0^\pi \left((u_x(x,t))^2 + (u_t(x,t))^2 \right) \, dx. \tag{5.36}$$

Análogamente al ejercicio 1, se tiene $I'(t) = 0, \ \forall\, t > 0$, $I(0) = 0$. lo que obliga a que $u_x(x,t) = u_t(x,t) = 0, \forall\, (x,t) \in \overline{\Omega}$. Así pues, u debe ser constante en $\overline{\Omega}$. Como $u(x,0) = 0, \ \forall\, x \in [0,\pi]$, se obtiene $u \equiv 0$ en $\overline{\Omega}$.

Una vez que hemos demostrado que (5.34) puede tener como

mucho una solución, habrá que ver que, efectivamente hay una. Podemos hacernos nuevamente la siguiente pregunta: ¿tendrá (5.34) soluciones de la forma

$$u(x,t) = Y(x)T(t), \tag{5.37}$$

para funciones convenientes $Y : [0,\pi] \to \mathbb{R}$, y $Z : [0,+\infty) \to \mathbb{R}$?

Procediendo como anteriormente, llegamos a los dos problemas de ecuaciones diferenciales ordinarias siguientes:

$$Y''(x) - \lambda Y(x) = 0, \ x \in [0,\pi], \ Y'(0) = Y'(\pi) = 0. \tag{5.38}$$

$$T''(t) - \lambda T(t) = 0, \ t \in [0,+\infty). \tag{5.39}$$

Ahora, es conocido (véase [15]) que (5.38) tiene solución $Y \in C^2[0,\pi]$ no trivial, si y solamente si $\lambda = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. En este caso, el conjunto de soluciones de (5.38) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $Y_n(x) = cos(nx)$.

Por otra parte, la constante λ ha de ser la misma en (5.38) y (5.39) . Para $\lambda = -n^2, n \in \mathbb{N}$, el conjunto de soluciones reales de (5.39) es un espacio vectorial real de dimensión dos engendrado por las funciones $T_n^1(t) = cos(nt), T_n^2(t) = sen(nt)$.

Cuando $\lambda = 0$, el conjunto de soluciones reales de (5.39) es un espacio vectorial real de dimensión dos engendrado por las funciones $T_0^1(t) = 1, T_0^2(t) = t$.

Veamos que al procedimiento anterior permite calcular la única solución de (5.34) , en casos sencillos.

EJERCICIO 16:

Supongamos que en (5.34) , las funciones f y g son de la forma $f(x) = acos(nx),\ g(x) = bcos(nx)$, para algún $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, con a y b números reales dados. Demuéstrese que (5.34) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: Si $n = 0$, la única solución de (5.34) es $u(x,t) = a + bt$. Si $n \in \mathbb{N}$, la función $u(x,t) = (acos(nt) + \frac{b}{n} sen(nt))cos(nx)$, es la solución buscada.

EJERCICIO 17:

Supongamos que en (5.34) , las funciones f y g son de la forma $f(x) = acos(nx),\ g(x) = bcos(mx)$, siendo n y m números naturales o cero, distintos, y y a y b números reales dados. Demuéstrese que (5.34) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: Si $n = 0$, la única solución de (5.34) es $u(x,t) = a + \frac{b}{m} sen(mt)cos(mx)$. Si $m = 0$, la única solución de (5.34) es $u(x,t) = acos(nt)cos(nx) + bt$. Por último, si ni n ni m son cero, la única solución de (5.34) es $u(x,t) = acos(nt)cos(nx) + \frac{b}{m} sen(mt)cos(mx)$.

Teniendo en cuenta que la ecuación de ondas es lineal así como las condiciones de contorno en (5.34) , los dos ejercicios anteriores permiten fácilmente resolver aquellas situaciones donde las funciones f y g son combinación lineal finita de funciones de la forma $cos(nx),\ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. De todas formas, véase el ejercicio que sigue.

EJERCICIO 18:

Supongamos que en (5.34) , las funciones f y g son de la forma $f(x) = a_0 + \sum_{i=1}^{p} a_i cos(n_i x),\ g(x) = b_0 + \sum_{j=1}^{q} b_j cos(m_j x)$, siendo $a_i,\ 0 \le i \le p,\ b_j,\ 0 \le j \le q$, números reales dados, $n_i,\ 1 \le i \le p$, números naturales distintos y $m_j,\ 1 \le j \le q$, también números naturales distintos. Demuéstrese que (5.34) tiene una única solución. Encuéntrese la fórmula explícita de ésta.

Solución: Es trivial comprobar que la función

$$u(x,t) = a_0 + b_0 t + \sum_{i=1}^{p} a_i cos(n_i t) cos(n_i x) + \sum_{j=1}^{q} \frac{b_j}{m_j} sen(m_j t) cos(m_j x)$$

es la solución buscada.

De nuevo, la pregunta que podemos hacernos, llegados a este punto, es la siguiente: ¿cómo encontrar la solución de (5.34) en el caso general? (*en este momento nos da la impresión de que nos hemos sentido en la misma situación varias veces, a lo largo del texto*).

Recordemos que bajo determinadas hipótesis sobre f y g, (véase el ejercicio 24 del capítulo II), entonces

$$f(x) = \frac{f_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} f_n cos(nx), \tag{5.40}$$

uniformemente en $[0, \pi]$, donde los coeficientes f_n vienen dados por la fórmula

$$f_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{5.41}$$

Análogamente,

$$g(x) = \frac{g_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} g_n cos(nx), \tag{5.42}$$

uniformemente en $[0, \pi]$, donde los coeficientes g_n vienen dados por la fórmula

$$g_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} g(x) cos(nx)\, dx, \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{5.43}$$

Entonces, ¿qué condiciones podemos imponer a f y g para que la función

$$u(x,t) = \frac{f_0}{2} + \frac{g_0}{2} t + \sum_{n=1}^{\infty} \left(f_n cos(nt) + \frac{g_n}{n} sen(nt) \right) cos(nx),$$

sea la única solución de (5.34) ?

Como para el problema (5.1) , la clave para tener la respuesta a la pregunta anterior, va a ser que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} (n^2 |f_n| + n |g_n|) \tag{5.44}$$

sea convergente. Para saber las condiciones que podemos imponer sobre f y g para que esto sea así, es necesario tener ciertos conocimientos sobre la posible regularidad de las extensiones pares a $[-\pi, \pi]$ de las funciones f y g, definidas en $[0, \pi]$. Esto es lo que hacemos a continuación.

EJERCICIO 19:

Sea $h : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ y $\tilde{h} : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, la extensión par de h; es decir,

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} h(-x), \text{ si } x \in [-\pi, 0), \\ h(x), \text{ si } x \in [0,\pi]. \end{cases} \tag{5.45}$$

a) Demuéstrese que si $h \in C[0,\pi]$, entonces $\tilde{h} \in C[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi)$.

b) Demuéstrese que si $h \in C^1[0,\pi]$, verifica $h'(0^+) = h'(\pi^-) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^1[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ es convergente, donde $h_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} h(x) sen(nx)\, dx$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

c) Demuéstrese que si $h \in C^2[0,\pi]$, verifica $h'(0^+) = h'(\pi^-) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^2[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-), \tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n|h_n|$ es convergente

d) Demuéstrese que si $h \in C^3[0,\pi]$, verifica $h'(0^+) = h'(\pi^-) = h'''(0^+) = h'''(\pi^-) = 0$, entonces $\tilde{h} \in C^3[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi), \tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$,

$\tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-), \tilde{h}'''(-\pi^+) = \tilde{h}'''(\pi^-)$. En este caso, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|h_n|$ es convergente

e) Propóngase el lector dar el enunciado general.

(Sugerencia: lo de las propiedades de regularidad de las extensiones pares de la función h considerada es un ejercicio elemental de Análisis Matemático de una variable real. Para la demostración de la convergencia de las series citadas, úsense los resultados del capítulo II que relacionan la regularidad de una función con la convergencia de su serie de Fourier: ejercicios 15 y 18 del capítulo II y las notas y comentarios posteriores).

Solución: a) Lo único que se necesita demostrar es la continuidad de $\tilde{h}$ en el punto $x = 0$. Ahora bien, observemos que

$$\lim_{x\to 0^+} \tilde{h}(x) = \lim_{x\to 0^+} h(x) = h(0),$$

y

$$\lim_{x\to 0^-} \tilde{h}(x) = \lim_{x\to 0^-} h(-x) = h(0).$$

Por tanto $\lim_{x\to 0} \tilde{h}(x) = \tilde{h}(0)$. Además, $\tilde{h}(-\pi) = h(\pi) = \tilde{h}(\pi)$.

b) Nuevamente, el único punto digno de estudiar es $x = 0$. Aquí se tiene

$$\tilde{h}'(0^+) = \lim_{k\to 0^+} \frac{\tilde{h}(k) - \tilde{h}(0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{h(k) - h(0)}{k} = h'(0^+) = 0.$$

y

$$\tilde{h}'(0^-) = \text{lím}_{k\to 0^-} \frac{\tilde{h}(k) - \tilde{h}(0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{h(-k) - h(0)}{k} =$$

$$-\,\text{lím}_{k\to 0^-} \frac{h(-k) - h(0)}{-k} = -h'(0^+) = 0.$$

En conclusión,

$$\tilde{h}'(x) = \begin{cases} -h'(-x), \text{ si } -\pi \le x < 0, \\ h'(0^+) = 0, \text{ si } x = 0, \\ h'(x), \text{ si } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Por tanto $\tilde{h} \in C^1[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-) = h'(\pi^-) = 0$. Si ahora razonamos como en el ejercicio 5, deducimos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} |h_n|$ es convergente.

c) A partir de la expresión anterior para $\tilde{h}'$, deducimos

$$\tilde{h}''(0^+) = \lim_{k\to 0^+} \frac{\tilde{h}'(k) - \tilde{h}'(0)}{k} = \lim_{k\to 0^+} \frac{h'(k) - 0}{k} = h''(0^+).$$

$$\tilde{h}''(0^-) = \lim_{k\to 0^-} \frac{\tilde{h}'(k) - \tilde{h}'(0)}{k} = \lim_{k\to 0^-} \frac{-h'(-k) - 0}{k} =$$

$$\lim_{k\to 0^-} \frac{h'(-k)}{-k} = h''(0^+).$$

Así pues, $\tilde{h}''(0) = h''(0^+)$. Por tanto,

$$\tilde{h}''(x) = \begin{cases} h''(-x), \text{ si } -\pi \le x < 0, \\ h''(0^+), \text{ si } x = 0, \\ h''(x), \text{ si } 0 < x \le \pi. \end{cases}$$

Esto implica que $\tilde{h} \in C^2[-\pi, \pi]$ y que $\tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-) = h''(\pi^-)$.

d) Es análogo al b) y al c). *No obstante, es muy instructivo que el lector compruebe por sí mismo estas analogías*.

e) Sea $h \in C^k[0, \pi]$. Entonces:

e.1) Si k es par y $h^{j)}(0^+) = h^{j)}(\pi^-) = 0,\ \forall\ j \le k-1,\ j$ impar, se tiene que $\tilde{h} \in C^k[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}^{m)}(-\pi^+) = \tilde{h}^{m)}(\pi^-),\ \forall\ m \le k$.

e.2) Si k es impar y $h^{j)}(0^+) = h^{j)}(\pi^-) = 0,\ \forall\ j \le k,\ j$ impar, se tiene que $\tilde{h} \in C^k[-\pi, \pi]$ y $\tilde{h}^{m)}(-\pi^+) = \tilde{h}^{m)}(\pi^-),\ \forall\ m \le k$.

En ambos casos, la serie numérica $\sum_{n=1}^{\infty} n^{k-1}|h_n|$ es convergente. La prueba puede hacerse, si se estima necesaria, por inducción sobre k.

Nota importante.

Si $h \in C^3[0,\pi]$ verifica $h'(0^+) = h'(\pi^-) = 0$, entonces, por el apartado c), deducimos $\tilde{h} \in C^2[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}(-\pi) = \tilde{h}(\pi)$, $\tilde{h}'(-\pi^+) = \tilde{h}'(\pi^-)$,

$\tilde{h}''(-\pi^+) = \tilde{h}''(\pi^-)$. Además, de la expresión de $\tilde{h}''$ en $[-\pi,\pi]$, y del hecho $h \in C^3[0,\pi]$, deducimos fácilmente que $\tilde{h}''$ es absolutamente continua en $[-\pi,\pi]$ y $\tilde{h}''' \in L^2(-\pi,\pi)$. De hecho,

$$\tilde{h}'''(x) = \begin{cases} -h'''(-x), \text{ si } -\pi \leq x < 0, \\ h'''(x), \text{ si } 0 < x \leq \pi. \end{cases}$$

Por tanto, (véanse las notas y comentarios del ejercicio 18, capítulo II), la serie $\sum_{n=1}^{\infty} n^2|h_n|$ es convergente.

EJERCICIO 20:

Demuéstrese que si f y g satisfacen las condiciones

$$\begin{array}{c} f \in C^3[0,\pi],\ f'(0^+) = f'(\pi^-) = 0, \\ g \in C^2[0,\pi],\ g'(0^+) = g'(\pi^-) = 0, \end{array} \tag{5.46}$$

entonces (5.34) tiene una única solución u dada por la fórmula

$$u(x,t) = \frac{A_0}{2} + \frac{B_0}{2}t + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n cos(nt) + B_n sen(nt))\, cos(nx) \tag{5.47}$$

donde

$$\begin{array}{c} A_n = f_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x) cos(nx)\, dx, \forall\, n \in \mathbb{N} \cup \{0\}, \\ B_0 = g_0,\ B_n = \dfrac{g_n}{n} = \dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} g(x) cos(nx)\, dx,\ \forall\, n \in \mathbb{N}. \end{array} \tag{5.48}$$

(Sugerencia: *Es posible que a estas alturas sobren las sugerencias, al menos para aquellos que hayan asimilado lo anterior. No obstante, repásese el ejercicio 6*).

Solución: Si se ha repasado el ejercicio 6, se ve que todo va de maravillas si la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2(|A_n| + |B_n|) \tag{5.49}$$

es convergente. Ahora bien, esto es lo mismo que decir que la serie numérica

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(n^2|f_n| + n|g_n|\right) \tag{5.50}$$

es convergente, lo que se deduce fácilmente de las propiedades de regularidad de f y g

(5.46) y del ejercicio y nota anteriores.

EJERCICIO 21:

Calcúlese la única solución de (5.34) cuando $f(x) = cos^2 x,\ g(x) = 2x - sen(2x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$.

Solución: Teniendo en cuenta que $cos^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} cos(2x),\ \forall\ x \in [0, \pi]$, este es el desarrollo en serie de Fourier que necesitamos, para la función f. En consecuencia,

$$A_0 = 1,\ A_n = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq 2, \\ -1, & \text{si } n = 2. \end{cases}$$

Además, un cálculo elemental muestra que

$$\begin{aligned} B_0 &= -2\pi, \\ B_n &= 0, \quad \text{si } n \text{ es par}, \\ B_n &= \frac{16n^2 - 32}{\pi n^3 (4 - n^2)}, \quad \text{si } n \text{ es impar} . \end{aligned}$$

Por tanto, la única solución de (5.34) es

$$u(x,t) = \frac{1}{2} - \pi t - \frac{1}{2} cos(2t) cos(2x) +$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{16(2n-1)^2 - 32}{\pi (2n-1)^4 (4 - (2n-1)^2)} sen(2n-1)t \right) cos(2n-1)x.$$

Se pueden estudiar a continuación las propiedades cualitativas que satisfacen las soluciones del problema (5.34) . Algunas son similares a las de (5.1), como la de la constancia de la energía de la onda solución (ejercicio 10), o la referente a la regularidad de tal onda (ejercicio 14). Sin embargo, otras pueden cambiar radicalmente. Por ejemplo, aunque f y g sean tan regulares como queramos (por ejemplo, C^∞), la solución puede dejar de ser acotada (véase el ejercicio 16). Recomiendo al lector que estudie detalladamente estas propiedades cualitativas de las soluciones de (5.34) , así como otras que se le ocurran. Por ejemplo, ¿podría obtenerse en este caso una fórmula análoga a la de d'Alembert (fórmula (5.24) para el problema (5.34) ?

Comentario final.

En este capítulo hemos estudiado dos problemas de tipo mixto, donde aparecían, junto con la ecuación de ondas, condiciones iniciales y condiciones de contorno. En ambos se daban como datos iniciales la posición y la velocidad de la cuerda en el tiempo $t = 0$. Por otra parte, en el primero de ellos se suponía la cuerda fija en sus extremos, mientras que en el segundo, estos podían ser libres. La idea básica para poderlos resolver, usando la teoría de Series de Fourier, se encuentra en el hecho de que, en ambos casos, las condiciones iniciales admitían un desarrollo en serie, usando como sumandos de tales desarrollos las funciones propias de los problemas de valores propios (5.8) y (5.38) . Es claro que, desde el punto de vista físico, pueden plantearse otros tipos de problemas. Por ejemplo, un extremo de la cuerda puede estar fijo y el otro no, e incluso puede darse, en cada extremo, una combinación lineal conveniente de las condiciones de contorno consideradas en (5.1) y (5.34) .

Como en el caso de la ecuación del calor, la aplicación del método de separación de variables a estos problemas conduce a la posibilidad del desarrollo en serie de una cierta función h, definida en $[0, \pi]$, usando como sumandos de tal desarrollo las funciones propias (soluciones no triviales) de problemas de contorno del tipo Sturm-Liouville, mencionados en el capítulo anterior.

Las anteriores ideas serán desarrolladas con detalle en otro volumen.

Por último, aquellos que estén interesados en otros aspectos clásicos de la ecuación de ondas, pueden consultar las referencias [2], [16], [20], [27], [32], [33], [35] y [36].

Bibliografía

[1] Aleksandrov, A. D. y otros (1980): *La matemática: su contenido, métodos y significado,* Madrid: Alianza Universidad. 2.3

[2] Andrews, L. C. (1986): *Elementary partial differential equations,* New York: Academic Press. 4.3, 4.3, 4.3, 5.3

[3] Aparicio, C. y Pérez, J. (1991): *Integral de Lebesgue,* Granada: Copistería la Gioconda. 1, 2.1.3, 3.3

[4] Apostol, T. M. (1960): *Análisis Matemático,* Barcelona: Reverté. 1, 1, 2.1.3, 2.3, 3.1.1, 3.1.4, 3.3, 4.1.2, 4.1.3

[5] Braun, M. (1983): *Differential equations and their applications,* New York: Springer-Verlag. 4.3

[6] Brezis, H. (1984): *Análisis Funcional,* Madrid: Alianza Universidad Textos. 1, 1, 1, 1, 1, 2.1.4, 2.3, 2.3, 3.1.3, 3.3, 4.3, 5.3

[7] Burghes, D. N. y Borrie, M. S. (1981): *Modelling with differential equations,* New York: John Wiley and Sons. 4.3

[8] Cañada, A. (1994):*Series y transformada de Fourier y aplicaciones, Vol. I,* Granada: Servicio de publicaciones de la Universidad de Granada. (document)

[9] Cañada, A. (2000):*Una perspectiva histórica de las series de Fourier: de las ecuaciones de ondas y del calor a los operadores compactos y autoadjuntos,* Relime, Revista Latinoamericana de investigación en Matemática educativa, 3, 293-320. 1

[10] Cannon, J. R. (1984): *The one-dimensional heat equation,* Reading: Addison-Wesley. 4.3

[11] Carleson,L. (1968): *Convergence and summability of Fourier series,* Proc. Int. Cong. Math., Moscow, 1.966; Izdat. Mir, 83-88. 1, 2.3

[12] Carleson, L. (1966): *On convergence and growth of partial sums of Fourier series* Acta Math., 116, 135-157. 1, 2.3

[13] Casas, E. (1992): *Introducción a las Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Santander: Servicio de Publicaciones de la Universidad de Cantabria. 4.3, 5.3

[14] Coddington, E. A. (1961): *An introduction to ordinary differential equations,* Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall. 1

[15] Coddington, E. A. y Levinson, N. (1984): *Theory of ordinary differential equations,* Malabar: Robert E. Krieger Publishing Company. 1, 4.1.1, 4.3, 4.3, 5.3, 5.3

[16] Courant, R. D. y Hilbert, D. (1962): *Methods of Mathematical Physics, Vol I y II,* New York: Interscience. 1, 1, 2.3, 4.3, 4.3, 4.3, 5.3, 5.3

[17] Dieudonné,J. (1981): *History of Functional Analysis,* Amsterdam: North-Holland. 1, 1

[18] Fatou, P. (1906): *Séries trigonométriques et séries de Taylor,* Acta Math., 30, 335-400. 1

[19] González-Velasco, E. A. (1992): *Connections in Mathematical Analysis: the case of Fourier series,* Amer. Math. Monthly, 427-441. 1

[20] González-Velasco, E. A. (1995): *Fourier Analysis and Boundary value problems,* San Diego: Academic Press. 1, 4.3, 4.3, 5.3

[21] Grandes matemáticos, (1995): *Investigación y Ciencia. Temas 1,* Barcelona: Prensa científica, S.A. 1

[22] Guzmán, M. de (1996): *El rincón de la Pizarra,* Madrid: Ediciones Pirámide. (document)

[23] Halmos, P. R. (1967): *A Hilbert space problem book.* Princeton: Van Nostrand. 1, 2.3

[24] Hobson, E. W. (1957): *The theory of functions of a real variable,* New York: Dover(reprint). 1

[25] Hochstadt, H. (1973): *Integral equations,* New York: John Wiley and Sons. 1

[26] Hutson, V. y Pym, J. S. (1980): *Applications of functional analysis and operator theory,* London: Academic Press Inc. 1, 2.3

[27] John, F. (1980): *Partial Differential Equations,* Berlin: Springer-Verlag. 5.3

[28] Kahane, J. P. y Katznelson, Y. (1966): *Sur les ensembles de divergence des series trigonometriques,* Studia Math., 26, 305-306. 1

[29] Katznelson, Y. (1968): *An introduction to Harmonic Analysis,* New York: Wiley. 1, 1, 3.3

[30] Kline, M. (1972): *Mathematical thought from ancient to modern times,* Oxford University Press. Versión española en Alianza Editorial, S.A., Madrid, 1.992. 1, 1, 1, 1, 1, 2.3

[31] Körner, T. W. (1988): *Fourier Analysis.* Cambridge: Cambridge University Press. 1, 1, 3.3

[32] Mijailov, V. P. (1978): *Ecuaciones en Derivadas Parciales,* Moscú: Mir. 5.3

[33] Mikhlin, S. G. (1970): *Mathematical Physics, an advanced course,* Amsterdam: North-Holland. 5.3

[34] Orden y caos, (1990): *Libros de Investigación y Ciencia,* Barcelona: Prensa Científica, S.A. 1

[35] Peral, I. (1995):*Primer curso de ecuaciones en derivadas parciales,* Wilmington, Delaware: Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. 4.3, 4.3, 5.3

[36] Protter, M. H. y Weinberger, H. F. (1984): *Maximum principles in differential equations,* New York: Springer-Verlag. 4.3, 4.3, 4.3, 5.3

[37] Smoller, J. (1994): *Shock waves and reaction-diffusion equations,* New York: Springer-Verlag. 4.3, 5.3, 5.3

[38] Stromberg, K. R. (1981): *An Introduction to classical real analysis,.* Belmot: Wadsworth. 1, 2.1.2, 2.1.3, 3.3

[39] Tijonov, A. N. y Samarski, A. A. (1980): *Ecuaciones de la Física Matemática,* Perú: Mir. 1, 1, 1, 1, 1, 1, 4.2, 4.3, 4.3, 4.3, 4.3, 5.3, 5.3

[40] Walker, J. S. (1997): *Fourier Analysis and Wavelet analysis,* Notices of the AMS, 44, 658-670. 1

[41] Weinberger, H. (1970): *Ecuaciones diferenciales en derivadas parciales,* Barcelona: Reverté. 1, 1, 1, 1, 1, 5.3

[42] Widder, D. V. (1975): *The heat equation,* New York: Academic Press. 4.3

[43] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis: main principles and their applications,* New York: Springer-Verlag. 1

[44] Zeidler, E. (1995): *Applied Functional Analysis: Applications to Mathematical Physics,* New York: Springer-Verlag. 1

[45] Zygmund, A. (1968): *Trigonometric series,* Cambridge: Cambridge University Press. 1, 1