LA ECUACIÓN DEL CALOR. PROBLEMAS DE TIPO MIXTO [1]

En la página web

https://www.ugr.es/ acanada/docencia/docencia.htm

encontraréis información adicional sobre el contenido de este archivo y la ecuación del calor.

En este archivo se proponen 4 ejercicios. El último lo encontraréis en la sección de bibliografía. **Plazo de entrega: hasta el 10 de mayo, esta vez improrrogable.**

CONOCIMIENTOS PREVIOS NECESARIOS

1. Problemas de valores propios para e.d.o. lineales de segundo orden con coeficientes constantes (método de separación de variables).
2. Teorema de derivación de integrales paramétricas.

En este tema estudiamos dos problemas de tipo mixto asociados a la ecuación del calor. Más concretamente, dedicamos nuestra atención a los problemas:

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ u(0,t) & = & u(\pi,t) = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi, \end{array}\right. \qquad (C1)$$

y

$$\left.\begin{array}{rcll} \dfrac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} & = & \dfrac{\partial u(x,t)}{\partial t}, & 0 < x < \pi, \ 0 < t < T, \\ \dfrac{\partial u(0,t)}{\partial x} & = & \dfrac{\partial u(\pi,t)}{\partial x} = 0, & 0 \le t \le T, \\ u(x,0) & = & f(x), & 0 \le x \le \pi. \end{array}\right. \qquad (C2)$$

[1] A. Cañada, Abril 2020

El interés por estos problemas proviene de la Física. En términos elementales, el problema (C1) modela la siguiente situación: Tenemos una varilla delgada de longitud π, cuyos extremos se mantienen a $0°$ centígrados y cuya superficie lateral está aislada (por eso, la ecuación del calor que aparece es homogénea). Si la distribución inicial de temperatura está dada por la función $f(x)$, entonces la función $u(x,t)$ representa la temperatura de la varilla en la sección transversal de abscisa x y en el tiempo t.
Por su parte, el problema (C2) modela una situación parecida, donde se sustituye el hecho de que la varilla se mantenga en sus extremos a cero grados centígrados, por el de que tales extremos se mantengan aislados.

La ecuación en derivadas parciales que aparece en ambos problemas,

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \qquad (C)$$

es una de las más importantes de la Física Matemática y se conoce con el nombre de **ecuación del calor**. Aparece con generalidad en fenómenos de difusión y es el ejemplo más elemental de ecuación parabólica.

La interpretación física de (C1) y (C2) sugiere que la solución de ambos problemas debe existir y ser única. Esto se confirma teóricamente usando, respectivamente, el principio del máximo-mínimo para (C1) y el método de la energía para (C2)

Designemos por Ω al conjunto

$$\Omega = \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < \pi, 0 < t < T\}.$$

Una solución de (C1) es cualquier función $u : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}$, tal que

$$u \in C(\overline{\Omega}) \cap C_x^2(\Omega) \cap C_t^1(\Omega)$$

y que satisface (C1) puntualmente. Como ya hemos mencionado, usando el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor(¿te acuerdas?) puede probarse fácilmente que (C1) tiene, a lo sumo, una solución.

Pasemos a continuación a comentar el tema de la existencia de soluciones de (C1). El proceso es similar al que se realiza para la ecuación de ondas y lo explicamos con detalle en las llamadas “clases presenciales” (por favor, revisa los apuntes de los días previos al 13 de marzo, que fue la última clase presencial)

En una primera etapa, usaremos el método de separación de variables para encontrar soluciones de (C1) de la forma $u(x,t) = X(x)T(t)$. Así obtenemos, exactamente igual que para la ecuación de ondas, el problema de valores propios

$$X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi],\ X(0) = X(\pi) = 0, \qquad (PVP1)$$

y la familia uniparamétrica de e.d.o.

$$T'(t) - \mu T(t) = 0,\ t \in (0,T].$$

Obviamente, los únicos valores interesantes del parámetro real μ son aquellos para los que (PVP1) tiene solución no trivial. En este caso, diremos que μ es valor propio de (PVP1).

La manera de calcular los valores propios de los problemas anteriores es sencilla, puesto que las ecuaciones consideradas son lineales y tienen coeficientes constantes.

Para ello, recordemos que, fijado μ, el conjunto de soluciones (reales) de la ecuación $X''(x) - \mu X(x) = 0,\ x \in [0,\pi]$, es un espacio vectorial real de dimensión dos. Además:

- Si $\mu = 0$, una base de tal espacio vectorial está constituida por las funciones $X^1(x) = 1,\ X^2(x) = x,\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

- Si $\mu > 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = \exp(\sqrt{\mu}x),\ X^2(x) = \exp(-\sqrt{\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

- Si $\mu < 0$, una base está formada por las funciones $X^1(x) = cos(\sqrt{-\mu}x),\ X^2(x) = sen(\sqrt{-\mu}x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$.

Cualquier solución de (PVP1) es de la forma $X(x) = c_1 X^1(x) + c_2 X^2(x),\ \forall\ x \in [0,\pi]$, donde c_1, c_2 son números reales cualesquiera. Imponiendo las condiciones de contorno llegamos al siguiente sistema de ecuaciones:
- Si $\mu = 0$,

$$\begin{aligned} c_1 &= 0, \\ c_1 + c_2\pi &= 0, \end{aligned}$$

cuya única solución es $c_1 = c_2 = 0$.Por tanto, $\mu = 0$, no es valor propio de (PVP1).

- Si $\mu > 0$,

$$c_1 + c_2 = 0,$$
$$c_1 \exp(\sqrt{\mu}\pi) + c_2 \exp(-\sqrt{\mu}\pi) = 0.$$

El determinante de los coeficientes de este sistema es $\exp(-\sqrt{\mu}\pi) - \exp(\sqrt{\mu}\pi)$, que es distinto de cero. Por tanto la única solución del sistema es la solución trivial $c_1 = c_2 = 0$.Consecuentemente, no existe ningún valor propio positivo de (PVP1).

- Si $\mu < 0$,

$$c_1 = 0,$$
$$c_1 cos(\sqrt{-\mu}\pi) + c_2 sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0.$$

Este sistema tiene solución no trivial si y solamente si $sen(\sqrt{-\mu}\pi) = 0$; o lo que es lo mismo, si y solamente si $\mu = -n^2$, para algún $n \in \mathbb{N}$. En este caso, es decir $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, engendrado por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi]$.

En resumen, el conjunto de valores propios de (PVP1) es el conjunto

$$\{-n^2, \ n \in \mathbb{N}\}.$$

Si $\mu = -n^2$, para algún n natural, el conjunto de soluciones de (PVP1) es un espacio vectorial real de dimensión uno, cuya base está formada por la función $X_n(x) = sen(nx), \ \forall \ x \in [0, \pi]$.

El método de separación de variables permite calcular la única solución de (C1) en casos sencillos que son aquellos en los que la función f de (C1) es “una combinación lineal finita de senos” , es decir, es de la forma

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i X_{n_i}(x) = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{sen}(n_i x),$$

siendo $m \in \mathbb{N}$, $a_1, ..., a_m$ números reales cualesquiera y $n_1, .., n_m$, números naturales distintos.

En estos casos, la única solución de (C1) es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{sen}(n_i x) \exp(-n_i^2 t), \ \forall \ (x,t) \in \Omega.$$

Observa la principal diferencia con respecto al primer problema de tipo mixto para la ecuación de ondas, donde la solución es la función

$$u(x,t) = \sum_{i=1}^{m} a_i \text{sen}(n_i x)\cos(n_i t).$$

Ejercicio PTM1.

Encuéntrese la única solución de (C1) para

1. $f(x) = 2\text{sen}(3x) - \pi\text{sen}(11x) + \sqrt{2}\text{sen}(7x)$
2. $f(x) = \text{sen}^3(x)$

En una segunda etapa, usando tales casos previos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base hilbertiana de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \text{sen}(n(\cdot)),\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

se puede probar un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C1):

Teorema 1.. *Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$ y $f(0) = f(\pi) = 0$, entonces la única solución de (C1) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{sen}(nx)\exp(-n^2 t), & si \ \ t > 0, \\ f(x), & si \ \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\text{sen}(nx)\ dx,\ \ \forall n \in \mathbb{N}.$$

Ejercicio PTM2

Calcúlese la única solución de (C1) para $f(x) = x(x-\pi)$ (Si hay que hacer un conjunto numerable infinito de integrales, sólo debéis indicar la manera de hacer tales integrales y, por supuesto, la fórmula correcta de la solución).

El ejercicio que sigue es muy bonito. No me lo inventé yo, lo propuso un alumno hace años, y la verdad no es difícil, pero tampoco trivial.

Ejercicio PTM3

Considérese el problema de tipo mixto (C1). Si $f \equiv 0$, la única solución de (C1) es $u \equiv 0$. Si $f(x) = \mathrm{sen}(2x)$, la única solución de (C1) es $u(x,t) = \mathrm{sen}(2x)e^{-4t}$.

1. Si

$$f(x) = \begin{cases} 0, \ \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \\ \mathrm{sen}(2x), \ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

¿Es la función

$$u(x,t) = \begin{cases} 0, \ \text{si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2}, \\ \mathrm{sen}(2x)e^{-4t}, \ \text{si } \dfrac{\pi}{2} \le x \le \pi. \end{cases}$$

solución de (C1)? Si la respuesta es negativa (que lo va a ser evidentemente), razónese adecuadamente cuál (o cuáles) de las condiciones en (C1) no se cumplen.

2. Escribe la fórmula de la solución correcta Si, nuevamente, el número de integrales a calcular es infinito numerable, no es necesario que calcules las integrales. Indica sólo el método para calcularlas.

Para el problema (C2), se puede llevar a cabo un procedimiento similar.

Los valores propios son ahora el conjunto $\{-n^2, \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ y las funciones propias son $\{\cos(nx), \ n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$.

Nuevamente, aplicando el método de separación de variables, encontramos la única solución de (C2) en casos sencillos: aquellos en los que la función f es "combinación lineal finita de cosenos", y usando éstos y el desarrollo en serie de Fourier de la condición inicial f, respecto de la base de $L^2(0,\pi)$

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \ \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n(\cdot)), \ n \in \mathbb{N} \right\},$$

mostramos un teorema general sobre existencia y unicidad de soluciones de (C2):

Teorema 2.. *Si $f \in C[0,\pi]$ es C^1 a trozos en $[0,\pi]$, entonces la única solución de (C2) viene dada por la fórmula:*

$$u(x,t) = \begin{cases} \dfrac{b_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos(nx)\exp(-n^2 t), & \textit{si} \ \ t > 0, \\ f(x), & \textit{si} \ \ t = 0 \end{cases}$$

donde

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos(nx)\ dx, \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Observa una diferencia fundamental con el primer problema de tipo mixto: en el Teorema anterior no es necesario imponer la condición $f(0) = f(\pi) = 0$, ya que ni las condiciones de contorno $u_x(0,t) = u_x(\pi,t) = 0$, ni las funciones propias, lo exigen.

La bibliografía recomendada para el desarrollo del capítulo es la siguiente:

1. **A. Cañada. Series de Fourier y Aplicaciones. Madrid, Pirámide, 2002.**

2. **H.F. Weinberger. Curso de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales. Reverté, 1986.**

3. **A.N. Tijonov y A.A. Samarsky: Ecuaciones de la Física Matemática. Mir, 1980.**

4. **El siguiente vídeo de youtube, de acceso libre (y revisado previamente por mí):**

   $https://www.youtube.com/watch?v = DTiL6G_j9zk$

PTM4

Lo mismo que los críticos de cine hacen, por definición de críticos de cine, críticas de cine, **os pido en este ejercicio que hagáis una crítica matemática del video anterior, haciendo un énfasis especial en las virtudes y defectos matemáticos del mismo.** ¡Ojo: máximo una página!