ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, Examen final, convocatoria ordinaria, 08/06/2020.

1. Considérese el problema

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \operatorname{sen}(5x), \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t, \\
u(x,0) = -\operatorname{sen}(3x),\ u_t(x,0) &= \pi \operatorname{sen}(7x), \quad 0 \le x \le \pi
\end{aligned}
\tag{1}
$$

   a) **(0.5 puntos)** Concepto de solución de (1). Brevemente, en 5 líneas como máximo, razónese por qué dicho problema tiene solución única.

   b) **(3 puntos)** Calcúlese razonadamente la única solución de (1).

2. Considérese el problema de tipo mixto

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} &= \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}, \qquad 0 \le x \le \pi,\ 0 < t \le T, \\
u(0,t) &= u(\pi,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \\
u(x,0) &= f(x), \qquad 0 \le x \le \pi,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

   a) **(0.5 puntos)** Concepto de solución de (2). Brevemente, en 5 líneas como máximo, razónese por qué dicho problema tiene solución única.

   b) **(2.5 puntos)** Si

$$
f(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } 0 \le x \le \dfrac{\pi}{6}, \\[2ex] \operatorname{sen}(6x), \text{ si } \dfrac{\pi}{6} \le x \le \pi. \end{cases}
$$

   Calcúlese razonadamente la única solución de (2).

3. Considérese el problema de contorno para la ecuación de Poisson

$$
\Delta u(x,y,z) = -5r + \pi,\ (x,y,z) \in \Omega; \quad u(x,y,z) = 0,\ (x,y,z) \in \partial\Omega, \tag{3}
$$

$$
r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad \Omega = B_{\mathbb{R}^3}(0;2),
$$

   donde $B_{\mathbb{R}^3}(0;2)$ es la bola abierta en $\mathbb{R}^3$ de centro $0 \in \mathbb{R}^3$ y radio 2.

   a) **(0.5 puntos)** Concepto de solución de (3). Brevemente, en 5 líneas como máximo, razónese por qué dicho problema tiene solución única.

   b) **(3 puntos)** Calcúlese razonadamente la única solución de (3)