ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES
GRADO EN MATEMÁTICAS
Cuarto curso, 15/06/2018.

1. (a) **(1.5 puntos)** Considérese la ecuación de ondas unidimensional
$$(u_{tt} - u_{xx})(x,t) = 0,\ x \in \mathrm{R},\ t > 0 \tag{1}$$
Si $\Omega = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 : t > 0\}$, pruébese que $u \in C^2(\Omega)$ es solución de (1) si y solamente si u es de la forma $u(x,t) = H(x+t) + G(x-t)$, con $H \in C^2(\mathrm{R},\mathrm{R}),\ G \in C^2(\mathrm{R},\mathrm{R})$.

   (b) **(1.5 puntos)** Considérese ahora el problema de Cauchy
$$\begin{aligned}(u_{tt} - u_{xx})(x,t) = 0,\ x \in \mathrm{R},\ t > 0,\\ u(x,0) = \alpha(x),\ u_t(x,0) = \beta(x),\ x \in \mathrm{R}\end{aligned} \tag{2}$$
Si $\alpha \in C^2(\mathrm{R},\mathrm{R})$ y $\beta \in C^1(\mathrm{R},\mathrm{R})$, úsese el apartado anterior para encontrar, de manera razonada, la fórmula que proporciona la única solución $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ de (2).

2. (a) **(1 punto)** Enúnciese el principio del máximo-mínimo para la ecuación del calor.

   (b) **(1 punto)** Sea el problema de tipo mixto
$$\begin{aligned}u_{xx}(x,t) = u_t(x,t),\ x \in (0,\pi),\ t \in (0,T),\\ u(0,t) = u(\pi,t) = 0,\ t \in [0,T],\quad u(x,0) = f(x),\ x \in [0,\pi],\end{aligned} \tag{3}$$
donde $u \in C^2_x(\Omega) \cap C^1_t(\Omega) \cap C(\overline{\Omega}),\ f \in C[0,\pi]$, y $\Omega = \{(x,t) \in \mathrm{R}^2 : x \in (0,\pi),\ t \in (0,T)\}$. Usando el principio del apartado anterior, pruébese rigurosamente que (3) tiene, a lo sumo una solución.

   (c) **(1 punto)** Si f es $C^1_{tr}[0,\pi]$ verifica $f(0) = f(\pi) = 0$, propóngase una fórmula, en forma de serie de funciones, que proporcione la única solución de (3).

   (d) **(1 punto)** Calcúlese el término cuarto de la serie anterior para la función $f : [0,\pi] \to \mathrm{R}$, definida como $f(x) = x$, si $0 \le x \le \pi/2$ y $f(x) = -x + \pi$, si $\pi/2 \le x \le \pi$.

3. (a) **(1.5 puntos)**
Considérese el problema de Dirichlet
$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,\ (x,y) \in \Omega \equiv \{(x,y) \in \mathrm{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\},\\ u(x,y) = f(x,y),\ (x,y) \in \partial\Omega.\end{aligned} \tag{4}$$
Demuéstrese que mediante un cambio a coordenadas polares $x = \rho\cos\phi,\ y = \rho\mathrm{sen}\phi$, el problema anterior se transforma en
$$\begin{aligned}\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho})}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\ \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} = 0,\ 0 < \rho < 1,\ \phi \in \mathrm{R},\\ u(1,\phi) = g(\phi),\ \phi \in \mathrm{R},\end{aligned} \tag{5}$$
donde $g : \mathrm{R} \to \mathrm{R}$ está definida como $g(\phi) = f(cos\phi, sen\phi)$.

   (b) **(1.5 puntos)** Calcúlese la única solución de (5) para $g(\phi) = 3\mathrm{sen}^2\phi - 7\cos\phi$.