DESARROLLO DEL CAPITULO I

Si a y b son dos números reales dados, con $a < b$, denotaremos por $[a,b]$ al intervalo cerrado de extremos a y b. Al intervalo abierto de extremos a y b lo notamos por (a,b). Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función medible, diremos que f es de cuadrado integrable si la integral

$$\int_a^b |f(x)|^2 \, dx$$

existe en el sentido de Lebesgue y es finita (|.| significa el valor absoluto).

$\mathbb{L}^2(a,b)$ representa al conjunto de todas las funciones reales, definidas en $[a,b]$, medibles y de cuadrado integrable.

En el conjunto $\mathbb{L}^2(a,b)$ se puede definir la siguiente relación de equivalencia: Dados f,g dos elementos de $\mathbb{L}^2(a,b)$, diremos que $f \sim g$ si y sólo si $f(x) = g(x)$ c.p.d. (es decir, $f(x) = g(x)$ salvo en un subconjunto de $[a,b]$ de medida nula). ¡ Pruebe el lector que, efectivamente, dicha relación es una relación de equivalencia, con el objeto de familiarizarse con la realización de ejercicios, ya que si sigue leyendo este libro eso es lo que le espera !.
Al conjunto cociente de $\mathbb{L}^2(a,b)$, con la relación de equivalencia anterior, se le nota por $L^2(a,b)$.

Dada una función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, escribiremos a veces $f \in L^2(a,b)$. Esta afirmación debe entenderse en el sentido de que la clase de equivalencia definida por f (es decir, el conjunto formado por todas aquellas funciones reales, definidas en $[a,b]$ y que coinciden con f salvo en un subconjunto de medida nula de $[a,b]$) pertenece al conjunto $L^2(a,b)$.

También escribiremos a veces $f = g$ en $L^2(a,b)$, debiéndose entender que $f(x) = g(x)$ c.p.d. en $[a,b]$.

EJEMPLOS Y NOTAS:

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, entonces $f \in L^2(a,b)$.

- Si $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos $t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ de (a,b), y es tal que, para cada i $(1 \leq i \leq n)$ existen los límites laterales $f(t_i-)$ y $f(t_i+)$, entonces $f \in L^2(a,b)$.

- Si $f : [a,b) \to \mathbb{R}$ es continua y existe $f(b-)$, entonces $f \in L^2(a,b)$ (análogamente si $f : (a,b] \to \mathbb{R}$ es continua y existe $f(a+)$, entonces $f \in L^2(a,b)$).

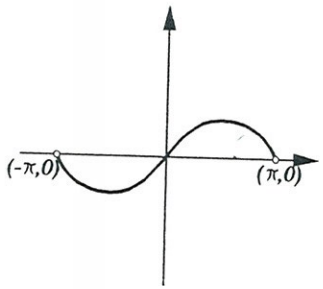
- Puede ocurrir que $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sea discontinua en un número infinito de puntos de $[a,b]$ y que $f \in L^2(a,b)$.

Por ejemplo, la función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ definida como

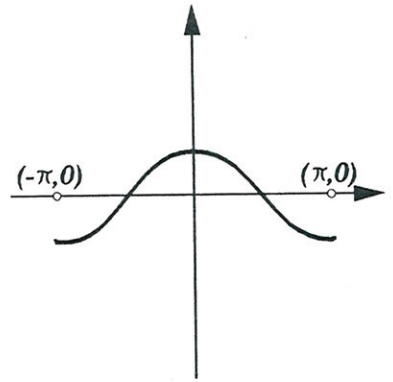
$$f(x) = \begin{cases} 1 & si\ x \in [a,b] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & si\ x \in [a,b] \cap (\mathbb{R} - \mathbb{Q}) \end{cases}$$

está en $L^2(a,b)$. De hecho $f = 0$ en $L^2(a,b)$ (recuérdese que $\mathbb{Q}$ es numerable y que cualquier subconjunto numerable de $[a,b]$ tiene medida cero).

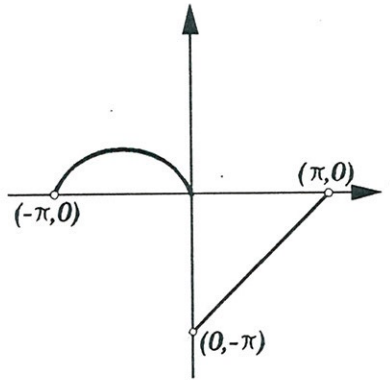
Para ilustrar gráficamente las anteriores ideas, y tomando $[a,b] = [-\pi,\pi]$ por concretar, las siguientes funciones pertenecen a $L^2(-\pi,\pi)$:



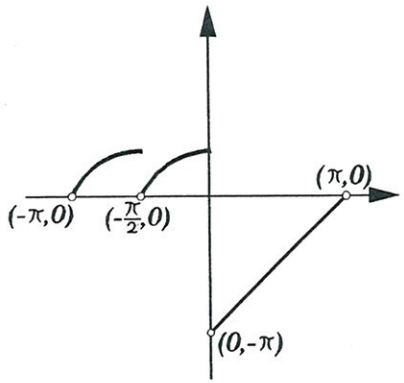
$f(x)$=senx en $[-\pi,\pi]$



$f(x)$=cosx en $[-\pi,\pi]$



$f(x)=\begin{cases} -\text{senx}, & x \in [-\pi,0] \\ x-\pi, & x \in (0,\pi] \end{cases}$



$f(x)=\begin{cases} -\text{senx}, & x \in [-\pi,-\frac{\pi}{2}] \\ \text{cosx}, & x \in (-\frac{\pi}{2},0] \\ x-\pi, & x \in (0,\pi] \end{cases}$

Fig.2

- Si $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ es continua, no ha de cumplirse necesariamente que $f\in L^2(a,b)$ (ver ejercicio nº 1)

- Un criterio muy útil para demostrar que una función dada $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ pertenece a $L^2(a,b)$ es el siguiente: "Si f es medible y $|f(x)|^2\le g(x)$, c.p.d. en $[a,b]$, donde $g:[a,b]\to\mathbb{R}$ es medible y existe $\int_a^b g(x)\,dx$, entonces $f\in L^2(a,b)$" (a estas alturas es posible que muchos lectores hayan sentido la necesidad imperiosa de repasar sus conocimientos sobre integración de Lebesgue. Una buena referencia puede ser [2]).

El criterio anterior suele utilizarse mucho en la práctica para el caso en que g es una función constante (una cota, si existe, de $|f|^2$ en $[a,b]$) obteniéndose lo siguiente: "Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es medible y f es acotada en $[a,b]$, entonces $f\in L^2(a,b)$".

EJERCICIO 1:
Sea $\alpha>0$. Considérese la función $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ definida como

$$f(x)=\frac{1}{x^\alpha}\ si\ x\neq 0\ ,\ f(0)=0.$$

Demuéstrese que $f\in L^2(0,1)$ si y sólo si $\alpha<\frac{1}{2}$.

Solución:

f es claramente medible para cualquier $\alpha>0$. Ahora, distinguiremos dos casos:

(a) $\alpha=\frac{1}{2}$. Entonces

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^2 dx=\int_0^1\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=\int_0^1\frac{1}{x}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}[ln1-ln\varepsilon]=+\infty$$

(b) $\alpha>0$, $\alpha\neq\frac{1}{2}$. Entonces

$$\int_0^1\left(\frac{1}{x^\alpha}\right)^2 dx=\int_0^1\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\int_\varepsilon^1\frac{1}{x^{2\alpha}}\,dx=$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left[\frac{1}{-2\alpha+1}-\frac{\varepsilon^{-2\alpha+1}}{-2\alpha+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{-2\alpha+1}\left[1-\lim_{\varepsilon\to 0^+}\varepsilon^{-2\alpha+1}\right]$$

Este límite es finito sólo si $-2\alpha+1>0$; es decir, $\alpha<\frac{1}{2}$.

NOTAS:

- El hecho de que $f(0)=0$ no influye para nada en el resultado, de tal manera que el mismo resultado se obtendría para $f(0)$ cualquier otro número real.

- La función $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$, $\forall x\in(0,1)$ es continua y no pertenece a $L^2(0,1)$.

- La función $f:(0,1)\to\mathbb{R}$ definida como $f(x)=\frac{1}{\sqrt[5]{x}}$, $\forall x\in(0,1)$ no es acotada y sin embargo pertenece a $L^2(0,1)$.

Antonio Cañada

Antes de continuar sería conveniente que el lector calibrase su capacidad para relacionar las diferentes clases de funciones que han aparecido hasta ahora. Para ello, el siguiente ejercicio puede ser recomendable.

EJERCICIO 2.

Razónese la veracidad o falsedad de las afirmaciones siguientes:

(a) Si $f:[a,b]\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua, $f\in L^2(a,b)$.
(b) Si $f:[a,b)\longrightarrow\mathbb{R}$ es continua, $f\in L^2(a,b)$.
(c) Si $f\in L^2(a,b)$, f es continua en $[a,b]$.

(d) Si $f \in L^2(a,b)$, f es acotada en $[a,b]$.

(e) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es medible y acotada, $f \in L^2(a,b)$.

(f) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos, $f \in L^2(a,b)$.

(g) Si $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ es continua salvo en un número finito de puntos y f es acotada en $[a,b]$, $f \in L^2(a,b)$.

(h) Si $f \in L^2(a,b)$, el conjunto de puntos de $[a,b]$ donde f no es continua es numerable.

Aquellos que hayan estudiado la teoría de integración de Lebesgue saben que $L^1(a,b)$ representa al conjunto de funciones $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ medibles para las que $\int_a^b |f(x)|\,dx$ es finita (entendemos, igual que anteriormente, que dos funciones son iguales si lo son c.p.d.). La relación existente entre $L^1(a,b)$ y $L^2(a,b)$ se puede ver en el siguiente ejercicio.

EJERCICIO 3.

Demuéstrese que $L^2(a,b) \subset L^1(a,b)$ de manera estricta.

Solución:

Sea $f \in L^2(a,b)$. Entonces, para cualquier $x \in [a,b]$ se tiene que $(|f(x)| - 1)^2 \geq 0$, de donde deducimos que

$$|f(x)| \leq \frac{1}{2}(1 + |f(x)|^2),\ \forall x \in [a,b]$$

Ahora bien, $|f|$ es una función medible en $[a,b]$ y la función $|f|$ está acotada por una función integrable (la función $\frac{1}{2}(1+|f(x)|^2)$). Esto prueba que $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y por tanto $f \in L^1(a,b)$.

Para ver que la inclusión de $L^2(a,b)$ en $L^1(a,b)$ es estricta, utilizaremos el ejercicio 1. Para ello, tomemos por simplicidad

$(a,b) = (0,1)$ y sea $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ si $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Sabemos que $f \notin L^2(0,1)$; sin embargo

$$\int_0^1 |f(x)|\,dx = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx =$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0^+} (2 - 2\sqrt{\varepsilon}) = 2$$

lo que prueba que $f \in L^1(0,1)$.

El lector no tendrá (o no deberá tener) ninguna dificultad en considerar el caso de un intervalo general (a,b).

NOTA: Observemos que en el ejercicio precedente hemos demostrado que si f es medible y existe, en el sentido de Lebesgue, $\int_a^b (f(x))^2\,dx$, también existe (en el sentido de Lebesgue) $\int_a^b f(x)\,dx$ (estrictamente hemos demostrado que existe $\int_a^b |f(x)|\,dx$, pero, en integración de Lebesgue, esto es equivalente a la existencia de $\int_a^b f(x)\,dx$). ¿Sería el lector capaz de dar un ejemplo de función f medible para la que exista $\int_a^b f^2(x)\,dx$ y no exista $\int_a^b f(x)\,dx$, tomadas ambas en el sentido de Riemann?.

Hasta ahora hemos intentado familiarizarnos con el conjunto $L^2(a,b)$ describiendo fundamentalmente sus elementos. Ahora bien, gran parte de la utilidad del conjunto $L^2(a,b)$ viene dada por su estructura algebraica y topológica. La primera se describe en el ejercicio siguiente:

EJERCICIO 4.

Demuéstrese que $L^2(a,b)$ es un espacio vectorial real de dimensión infinita, con las operaciones usuales de suma de funciones

y producto de un número real por una función.

Solución: Las operaciones indicadas son:

$$(f+g)(x) = f(x)+g(x)\ ,\forall\ x\ \in\ [a,b],\ \forall f,g\ \in\ L^2(a,b)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x))\ ,\forall x \in [a,b],\ \forall\alpha\in\mathbb{R},\ \forall f\in L^2(a,b)$$

La única propiedad de espacio vectorial que no es obvia es precisamente la ley de composición interna para la suma. Probémosla. Para ello, sean $f,g\in L^2(a,b)$; entonces, como

$$(|f(x)|-|g(x)|)^2\geq 0,\ \forall x\in[a,b]$$

se tiene que

$$|f(x)g(x)|\leq\frac{1}{2}(|f(x)|^2+|g(x)|^2),\ \forall x\in[a,b]$$

lo que prueba que $|fg|\ \in\ L^1(a,b)$. También,

$$|f(x)+g(x)|^2\leq|f(x)|^2+|g(x)|^2+2|f(x)g(x)|,\ \forall x\in[a,b]$$

de donde se obtiene que $f+g\in L^2(a,b)$.

Que la dimensión de $L^2(a,b)$ es infinita se obtiene de manera inmediata usando el hecho de que las funciones polinomiales son elementos de $L^2(a,b)$.

El ejercicio anterior permite afirmar que si f y g son dos elementos de $L^2(a,b)$ entonces se puede definir el "producto escalar" de f y g , $<f,g>$, como

$$<f,g>\ =\ \int_a^b f(x)g(x)\ dx \qquad (1.1)$$

El nombre de "producto escalar" se justifica por las propiedades que se indican a continuación.

EJERCICIO 5.

Pruébese que $<\cdot,\cdot>: L^2(a,b)\text{x}L^2(a,b)\to\mathbb{R}$, $(f,g)\to<f,g>$ satisface las siguientes propiedades:

1. $<f,g>=<g,f>$, $\forall f,g\in L^2(a,b)$.
2. $<f+g,h>=<f,h>+<g,h>$, $\forall f,g,h\in L^2(a,b)$.
3. $<\alpha f,g>=\alpha<f,g>$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in L^2(a,b)$.
4. $<f,f>\geq 0$, $\forall f\in L^2(a,b)$ y $<f,f>=0\Leftrightarrow f=0$.

En el ejercicio siguiente se obtiene una propiedad muy útil del producto escalar $<\cdot,\cdot>$ (y en general, de cualquier producto escalar) conocida con el nombre de desigualdad de Cauchy-Schwarz.

EJERCICIO 6.

Pruébese que

$$|<f,g>|^2\leq<f,f><g,g> \qquad (1.2)$$

$\forall f,g\in L^2(a,b)$
(Sugerencia: $<f+\alpha g,f+\alpha g>\geq 0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, $\forall f,g\in L^2(a,b)$).

Solución: Sean $f,g\in L^2(a,b)$. Consideremos la función polinómica
$p:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $p(\alpha)=<f+\alpha g,f+\alpha g>$. Entonces

$$p(\alpha)=\alpha^2<g,g>+2\alpha<f,g>\ +\ <f,f>$$

Ahora bien, p es una función polinómica de segundo grado y $p(\alpha)\geq 0$, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$. Esto obligá a que

$$(2<f,g>)^2-4<g,g><f,f>\leq 0$$

De donde obtenemos (1.2).

Las propiedades del ejercicio 5, junto con la desigualdad (1.2) nos permiten definir una norma en el espacio $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 7.

Pruébese que la aplicación $\|\cdot\| : L^2(a,b) \to \mathbb{R}$ definida como

$$\|f\| = < f, f >^{1/2} = \left(\int_a^b f^2(x)\, dx \right)^{1/2} \qquad (1.3)$$

verifica las propiedades usuales de norma, es decir,

(a) $\|f\| \geq 0$, $\forall f \in L^2(a,b)$ y $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$.

(b) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$, $\forall f, g \in L^2(a,b)$. (Desigualdad Triangular)

(c) $\|\alpha f\| = |\alpha| \|f\|$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $\forall f \in L^2(a,b)$.

El lector conoce otros ejemplos de espacios normados cuya norma viene definida a partir de un producto escalar:

- El espacio $\mathbb{R}^n$ con la norma $\|\cdot\|$ definida por

$$\|x\| = (x_1^2 + \cdots + x_n^2)^{1/2}$$

$\forall x = (x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$

y el producto escalar $< \cdot, \cdot >$ definido por

$$< x, y >= x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

$\forall x = (x_1, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

- El espacio l^2 formado por las sucesiones $\{x_n\}$ de números reales tales que $\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty$, con la norma

$$\|x\| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{1/2} , \forall x = \{x_n\} \in l^2$$

y el producto escalar $< \cdot, \cdot >$ definido por

$$< x, y >= \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n, \ \forall x = \{x_n\}, \ y = \{y_n\} \ \in l^2$$

Sabemos también que gran parte de las "buenas propiedades" que cumplen estos espacios son debidas al hecho de que son espacios normados completos. Esta es la propiedad que a continuación probamos para $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 8. (Teorema de Riesz-Fischer)

Pruébese que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert real
Sugerencia: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$,

(a) Probar que existe una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, tal que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 2^{-k}, \ \forall k \in \mathbb{N}.$$

(b) Expresando

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + (f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)) + \cdots + (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)),$$

demostrar que $\{f_{n_k}\}$ es convergente c.p.d. a una función f .

(c) Probar que $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(a,b)$.

Solución: Sea $\{f_n\}$ una sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$. Entonces

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \ m, n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon \qquad (1.4)$$

En particular, para cada $k \in \mathbb{N}$ es posible elegir un natural n_k tal que si $m, n \geq n_k$, entonces $\|f_n - f_m\| < 2^{-k}$. Es claro que la

sucesión $\{n_k\ ,\ k \in \mathbb{N}\}$ puede elegirse tal que $n_{k+1} > n_k$, $\forall k \in \mathbb{N}$. Tenemos así una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, cumpliendo que

$$\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\| < 2^{-k},\ \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1.5}$$

Nuestro próximo objetivo va a ser probar que f_{n_k} es convergente c.p.d. a una función $f \in L^2(a,b)$ y que $\{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b)$. Para probar que $\{f_{n_k}\}$ es convergente c.p.d., expresaremos $\{f_{n_k}\}$ como una serie cuyas sumas parciales van a ser precisamente f_{n_k}; probar la convergencia de $\{f_{n_k}\}$ será equivalente a probar la convergencia de la citada serie y para esto último utilizaremos (1.5). Así pues, sea

$$f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x) + \cdots + f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x),\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

Para probar la convergencia de $f_{n_k}(x)$, consideraremos la sucesión

$$g_{n_k}(x) = |f_{n_1}(x)| + |f_{n_2}(x) - f_{n_1}(x)| + \cdots + |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|,\ \forall k \in \mathbb{N}.$$

$\{g_{n_k}^2\}$ es una sucesión de funciones que es:

(a) monótona creciente (pues g_{n_k} lo es)

(b) $g_{n_k}^2 \in L^1(a,b)$, $\forall k \in \mathbb{N}$ (pues $g_{n_k} \in L^2(a,b)$, $\forall k \in \mathbb{N}$)

(c) La sucesión de integrales $\left\{\int_a^b g_{n_k}^2(x)\ dx\right\}$ es acotada,pues

$$\|g_{n_k}\|^2 \leq \left[\|f_{n_1}\| + \|f_{n_2} - f_{n_1}\| + \cdots + \|f_{n_k} - f_{n_{k-1}}\|\right]^2$$

$$\leq \left[\|f_{n_1}\| + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^{k-1}}\right]^2 \leq (\|f_{n_1}\| + 1)^2$$

Por el teorema de la convergencia monótona (aplicado a la sucesión $\{g_{n_k}^2,\ k \in \mathbb{N}\}$), la sucesión $\{g_{n_k}^2,\ k \in \mathbb{N}\}$ converge c.p.d. y como g_{n_k} es no negativa, la sucesión $\{g_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ converge c.p.d., a una función g , de donde deducimos que $\{f_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ también converge c.p.d. a una función que llamaremos f. (téngase en cuenta que al ser la sucesión $\{g_{n_k},\ k \in \mathbb{N}\}$ convergente c.p.d., la serie $\sum_{k=2}^{\infty} |f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x)|$ es convergente c.p.d., con lo que la serie $\sum_{k=2}^{\infty} (f_{n_k}(x) - f_{n_{k-1}}(x))$ es también convergente c.p.d. Es claro que $|f| \leq g$).

Sea ahora $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ y $m \geq n_0(\varepsilon)$ fijo. Entonces, para cada $k \in \mathbb{N}$ tal que $n_k \geq n_0(\varepsilon)$ se tiene que

$$\|f_m - f_{n_k}\|^2 = \int_a^b |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2\ dx \leq \varepsilon^2$$

Consideremos la sucesión de funciones $\{(f_m - f_{n_k})^2,\ k \in \mathbb{N}\}$. Tal sucesión lo es de funciones de $L^1(a,b)$ y además sabemos que $(f_m(x) - f_{n_k}(x))^2$ converge c.p.d. a $(f_m(x) - f(x))^2$. También,

$$|f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2 \leq (|f_m(x)| + |g_{n_k}(x)|)^2 \leq (|f_m(x)| + |g(x)|)^2$$

Por el Teorema de la convergencia dominada de Lebesgue (aplicado a la sucesión $\{(f_m - f_{n_k})^2,\ k \in \mathbb{N}\}$), tenemos que

$$\lim_{k \to +\infty} \int_a^b |f_m(x) - f_{n_k}(x)|^2\ dx = \int_a^b |f_m(x) - f(x)|^2\ dx$$

de donde obtenemos que $f_m - f \in L^2(a,b)$ y que $\|f_m - f\| \leq \varepsilon$. Como $f = f_m - (f_m - f)$, $f \in L^2(a,b)$ y $\{f_m\} \to f$ en $L^2(a,b)$.

NOTAS

1.- Las llamadas ecuaciones integrales de Fredholm de segunda especie, i.e., ecuaciones integrales del tipo

$$\Phi(x) + \int_a^b K(x,y)\Phi(y)\ dy = f(x) \tag{1.6}$$

con las funciones Φ, f y K continuas en $[a,b]$, $[a,b]$ y $[a,b]x[a,b]$ respectivamente fueron estudiadas con detalle por *D. Hilbert* (1862 – 1943) a comienzos de este siglo.

F. Riesz (1880 – 1956) consideró también ecuaciones del tipo (1.6) para el caso en que Φ, f *o* K no son necesariamente continuas. El metodo que aplicó para el estudio de (1.6) le llevó a introducir en 1907 el conjunto de funciones de cuadrado integrable en el sentido de Lebesgue, $L^2(a,b)$, y estudió (1.6) en el caso en que Φ, $f \in L^2(a,b)$, $K \in L^2((a,b)\text{x}(a,b))$.

En el mismo año, *E. Fischer* (1875 – 1959) introdujo el concepto de "convergencia en media": Una sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas en $[a,b]$ se dice que converge en media si

$$\lim_{m,n\to\infty} \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))^2 \, dx = 0 \qquad (1.7)$$

(observemos que esto es lo que nosotros entendemos como sucesión de Cauchy en $L^2(a,b)$). Además Fischer probó el resultado del ejercicio anterior: Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $L^2(a,b)$ que "converge en media", entonces existe una función $f \in L^2(a,b)$ tal que $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(a,b)$. (véase [8] para más detalles)

2.- Consideremos el espacio vectorial real $\text{C}[a,b]$ formado por todas las funciones continuas y reales, definidas en $[a,b]$. Si en $\text{C}[a,b]$ se considera la norma (1.3), es decir,

$$\|f\| = \left(\int_a^b f^2(x) \, dx \right)^{1/2}, \quad \forall f \in C[a,b]$$

es fácil demostrar que $(C[a,b], \|\cdot\|)$ es un espacio normado no completo. Precisamente su completación es $L^2(a,b)$. (ver Ejercicio nº 9)

3.- En el ejercicio anterior hemos probado la siguiente propiedad:

"Si $\{f_n\}$ es una sucesión de $L^2(a,b)$ *y* $f \in L^2(a,b)$ es tal que $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(a,b)$, entonces existe una subsucesión de $\{f_n\}$, $\{f_{n_k}\}$, cumpliendo que $\{f_{n_k}\} \to f$ *c.p.d.* ; *i.e.*, $\{f_{n_k}(x)\} \to f(x)$ *c.p.d. en* $[a,b]$". Esto sugiere algunas cuestiones tales como:

(a) ¿ Si $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(a,b)$, se podrá afirmar que $\{f_n\} \to f$ *c.p.d.*?.

(b) ¿ Si $\{f_n\} \to f$ *c.p.d.*, se tiene que $\{f_n\} \to f$ en $L^2(a,b)$?.

La respuesta a estas preguntas, así como la relación entre la convergencia en $L^2(a,b)$ y otros tipos de convergencia que el lector está más acostumbrado a manejar (convergencia puntual, convergencia uniforme, etc.) la encontraremos en los ejercicios que siguen. Pero antes de continuar, debemos resaltar el resultado fundamental que hemos obtenido hasta ahora

$L^2(a,b)$ ES UN ESPACIO DE HILBERT REAL

Llegados a este punto creo que estamos muy contentos con el hecho de haber conseguido una "buena estructura algebraico-topológica" para nuestro espacio $L^2(a,b)$ pero si nos detenemos aquí lo hecho sería solo "apariencia". Hemos de seguir investigando qué tipo de propiedades adicionales satisface nuestro espacio para poder utilizarlas después.

Comenzamos con un ejercicio para familiarizarnos con la convergencia en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 9.

Consideramos la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por

$f_n : [-1,1] \to \mathbb{R}$ tal que

$$f_n(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x \le -1/n \\ nx, & -1/n \le x \le 1/n \\ 1, & 1/n \le x \le 1 \end{cases}$$

Demuéstrese que $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(-1,1)$ donde $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$

viene definida por

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ 1/2, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

Solución: Es claro que f_n es continua en $[-1,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto $f_n \in L^2(-1,1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Por otra parte f es continua salvo en el punto x=0 y acotada y por lo tanto $f \in L^2(-1,1)$.

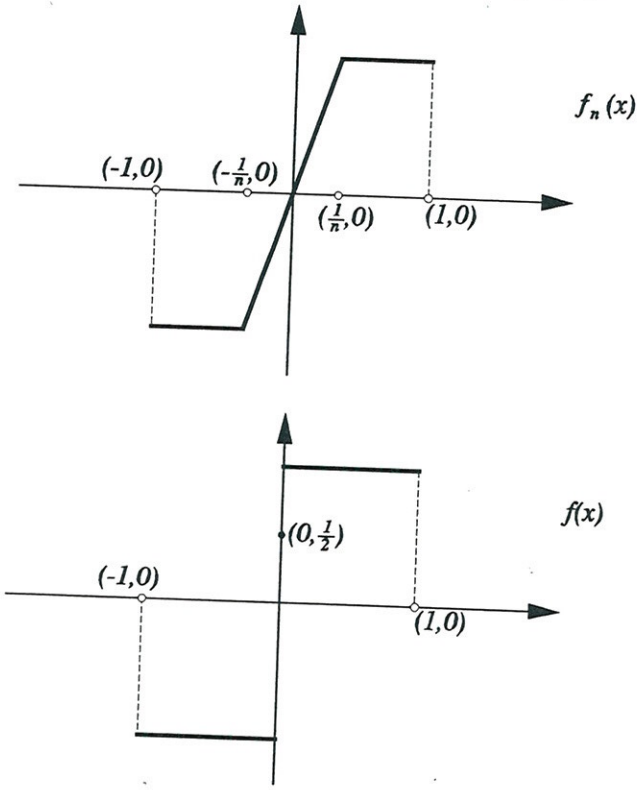


Fig.3

También,

$$\|f_n - f\|^2 = \int_{-1}^{1} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-1/n}^{0} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx +$$

$$+\int_{0}^{1/n} |f_n(x) - f(x)|^2\, dx = \int_{-1/n}^{0} |nx+1|^2\, dx + \int_{0}^{1/n} |nx-1|^2\, dx =$$

$$= \int_{-1/n}^{0} (n^2x^2 + 2nx + 1)\, dx + \int_{0}^{1/n} (n^2x^2 - 2nx + 1)\, dx =$$

$$= n^2\frac{1}{3n^3} + 2n\frac{1}{2}\cdot\frac{-1}{n^2} + \frac{1}{n} + n^2\frac{1}{3n^3} - 2n\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n} =$$

$$= \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{3n} \to 0 \; si \; n \to +\infty$$

Luego $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(-1,1)$.

NOTAS Y COMENTARIOS.

1.- Observemos que la sucesión $\{f_n\}$ es una sucesión de Cauchy en $L^2(-1,1)$ y que cada f_n es continua. A raíz de este ejercicio es fácil ver que no existe ninguna función continua g en [-1,1] t.q. $\{f_n\} \to g$ en $L^2(-1,1)$ (ver nota 2.- del ejercicio nº 8). ¿ Te atreverías a demostrarlo?

2.- Es claro que $\{f_n\} \to h$ *en* $L^2(-1,1)$, donde

$$h(x) = \begin{cases} -1, & -1 \le x < 0 \\ a, & x = 0 \\ 1, & 0 < x \le 1 \end{cases}$$

y a es cualquier número real dado. ¿ Contradice esto el principio de unicidad del límite de una sucesión en espacios normados?

3.- En este ejercicio $f_n(x) \to f(x)$ *c.p.d.* (¡Pruébese esta afirmación!). Sin embargo, no siempre es así (véase el ejercicio nº 10)

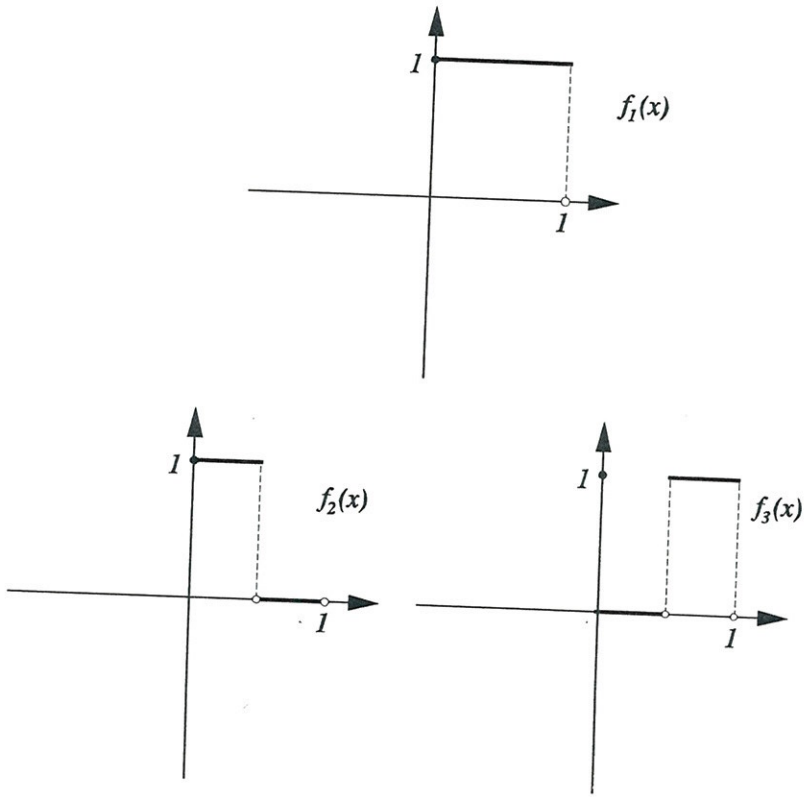
EJERCICIO 10.

Considérese la sucesión de funciones de $L^2(0,1)$, $\{f_n\}$, definida de la manera siguiente: Si $n \in \mathbb{N}$ es tal que $n = 2^{k-1} + j$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < 2^{k-1}$, entonces $f_n(x) = 1$ *si* $x \in \left[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}\right]$ *y* $f_n(x) = 0$ *si* $x \in [0,1] - \left[\frac{j}{2^{k-1}}, \frac{j+1}{2^{k-1}}\right]$.

Pruébese que $\{f_n\} \to 0$ *en* $L^2(0,1)$ y que, sin embargo, $\{f_n\} \nrightarrow 0$ *c.p.d.*

Solución:

¡No se asuste el lector al ver la ley que define $\{f_n\}$!. En realidad es escribir de manera rigurosa la sucesión de funciones cuyas gráficas se presentan a continuación



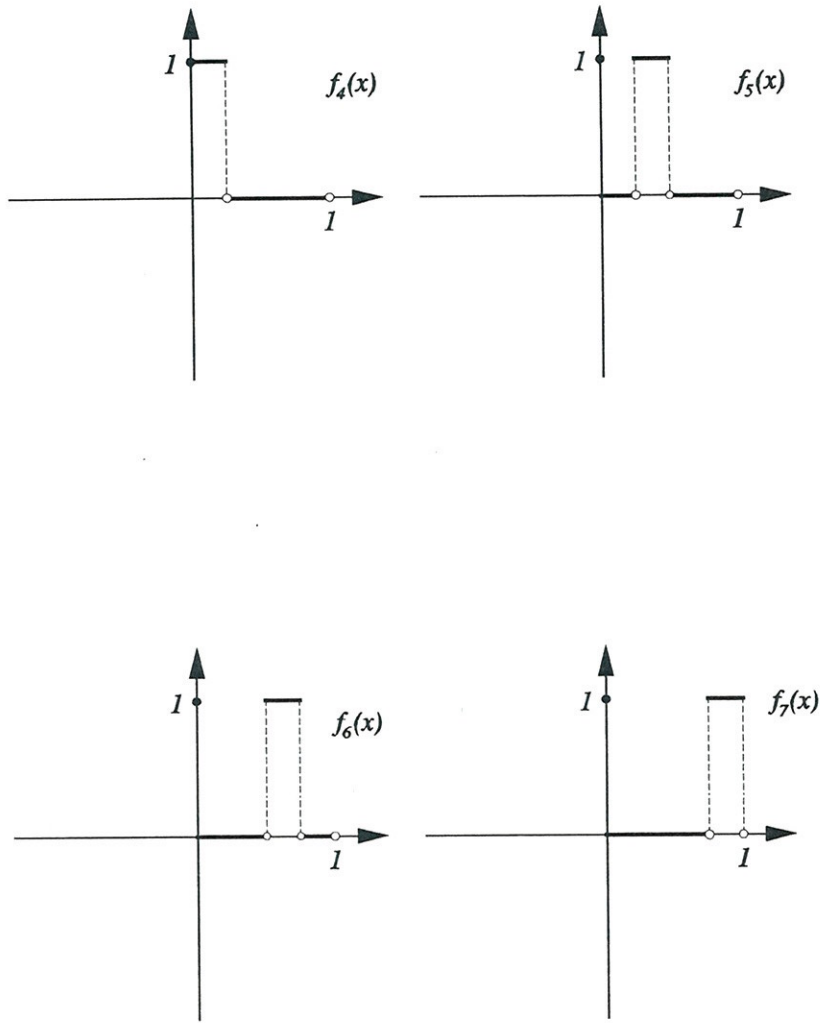


Fig.4

Por lo tanto, si $n = 2^{k-1} + j$, $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq j < 2^{k-1}$, (notemos que k y j son únicos para cada n dado)

$$\|f_n\|^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 \, dx = \int_{\frac{j}{2^{k-1}}}^{\frac{j+1}{2^{k-1}}} 1 \, dx = \frac{1}{2^{k-1}}$$

y como se cumple que $n \to +\infty \Leftrightarrow k \to +\infty$, $\lim_{n\to+\infty} \|f_n\| = 0$. Luego $\{f_n\} \to 0$ *en* $L^2(0,1)$.

Por otra parte, sea $x \in [0,1]$. Es claro que dado $n \in \mathbb{N}$ cualquiera, es posible encontrar n_1, n_2 números naturales mayores que n tales que $f_{n_1}(x) = 0$, $f_{n_2}(x) = 1$. Esto prueba que $\{f_n(x)\}$ no es convergente para ningún $x \in [0,1]$ y en particular se tiene que $\{f_n\} \not\to 0$ *c.p.d.*

NOTA (y ejercicio incluido).

Observemos que en el ejercicio anterior hemos demostrado que, en general, convergencia en $L^2(a,b)$ no implica convergencia puntual. Sin embargo, en el ejercicio 8 se demostró que si $\{f_n\} \to f$ *en* $L^2(a,b)$, existe una subsucesión de $\{f_n\}$, que converge casi por doquier a f : ¿sería el lector capaz de encontrar tal subsucesión en el ejercicio previo?

EJERCICIO 11.

Consideremos la sucesión de funciones de $L^2(0,1)$, $\{f_n\}$, definida por

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x = 0 \text{ ó } 1/n \leq x \leq 1 \\ n, & 0 < x < 1/n \end{cases}$$

Demuéstrese que $\{f_n\} \longrightarrow 0$ c.p.d. y que sin embargo $\{f_n\}$ no converge en $L^2(0,1)$}.

Solución:

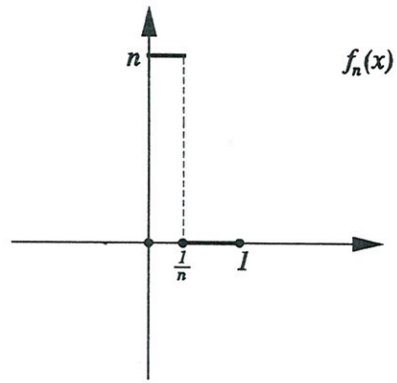


*Fig.*5

Sea $x \in (0,1]$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ *t.q.* $\frac{1}{n_0} < x$; de aquí obtenemos que $f_n(x) = 0 \ \forall n \geq n_0$ y por lo tanto $\{f_n(x)\} \longrightarrow 0$.

Como $f_n(0) = 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, también $\{f_n(0)\} \longrightarrow 0$.

Así pues $\{f_n(x)\} \longrightarrow 0$, $\forall x \in [0,1]$. Sin embargo

$\|f_n - 0\|^2 = \int_0^1 |f_n(x)|^2 \, dx = \int_0^{1/n} n^2 \, dx = n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, de donde deducimos que $\{f_n\}$ no converge en $L^2(0,1)$.

NOTA (y otra vez ejercicio incluido).

En el ejercicio previo hemos probado que, en general, convergencia c.p.d. no implica convergencia en $L^2(a,b)$.

Observemos también que $\{f_n^2\}$ es una sucesión de funciones de $L^1(0,1)$ *t.q.* $\{f_n^2\} \longrightarrow 0$ c.p.d. Sin embargo,

$$\int_0^1 f_n^2(x) \, dx \not\longrightarrow \int_0^1 0 \, dx = 0$$

¿Por qué no se puede aplicar el Teorema de la Convergencia dominada de Lebesgue en este caso?

EJERCICIO 12.

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones de $L^2(a,b)$ que converge uniformemente a una función f de $L^2(a,b)$. Pruébese que $\{f_n\} \longrightarrow f$ *en* $L^2(a,b)$.

Solución:

Que $\{f_n\}$ converja uniformemente a f quiere decir que $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \ \exists n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} : \ \forall n \geq n_0(\varepsilon) \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$, $\forall x \in [a,b]$.

Sea entonces $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ dado. Tomemos $n_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)$ y n un natural cualquiera, $n \geq n_0\left(\frac{\varepsilon}{\sqrt{b-a}}\right)$. Entonces

$$\|f_n - f\| = \left(\int_a^b |f_n(x) - f(x)|^2 \, dx\right)^{1/2} \leq \left(\int_a^b \frac{\varepsilon^2}{b-a} \, dx\right)^{1/2} = \varepsilon$$

Podemos resumir lo realizado en los ejercicios nº 9, 10, 11 y 12 con el gráfico siguiente:

$$\begin{array}{ccc} & & \{f_n\} \to f \ en \ L^2(a,b) \\ & \nearrow\!\!\!\!\times & \\ \{f_n\} \to f \ uniformemente \ en \ [a,b] & & \not\downarrow \not\downarrow \\ & \searrow\!\!\!\!\times & \\ & & \{f_n\} \to f \ c.p.d. \end{array}$$

Hasta ahora nos hemos familiarizado con la estructura algebraico-topoló gica de $L^2(a,b)$ así como con el concepto de convergencia de una sucesión de funciones $\{f_n\}$ *de* $L^2(a,b)$ hacia un

elemento f de dicho espacio. Como resultado fundamental, destaquemos nuevamente el hecho de que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert real.

Otros espacios de Hilbert que ya hemos mencionado, como el espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, deben gran parte de sus propiedades al hecho de que tienen una base. Esto facilita muchísimo su estudio así como el estudio de ciertas clases de funciones (por ejemplo, las funciones lineales u homomorfismos) definidas entre dichos espacios. La pregunta que lógicamente cabe hacerse es la siguiente: ¿Tendrá $L^2(a,b)$ una base?. Esta pregunta lleva aparejada, a su vez, otras cuestiones tales como: ¿Cuál sería una definición "adecuada" de base en $L^2(a,b)$?. ¿Cuántas bases hay (si es que las hay) en $L^2(a,b)$?. ¿Qué ventajas tiene la utilización del concepto de base?; etc.

Trataremos de responder a las cuestiones anteriores en los ejercicios que siguen. Para ello, la noción de ortogonalidad será fundamental.

DEFINICION: Sea $\mathbb{A} \subset L^2(a,b)$. Diremos que $\mathbb{A}$ está formado por elementos ortogonales (o simplemente que $\mathbb{A}$ es ortogonal) si $< f,g >= 0$, $\forall f,g \in \mathbb{A}$ con $f \neq g$ y además $< f,f > \neq 0$, $\forall f \in \mathbb{A}$ (o sea que $\mathbb{A}$ no puede contener al elemento nulo de $L^2(a,b)$).

DEFINICION: Sea $\mathbb{A} \subset L^2(a,b)$. Diremos que $\mathbb{A}$ está formado por elementos ortonormales (o simplemente que $\mathbb{A}$ es ortonormal) si $< f,g >= 0$, $\forall f,g \in \mathbb{A}$ con $f \neq g$ y además $< f,f >= 1$, $\forall f \in \mathbb{A}$.

EJERCICIO 13.

Demostrar que los siguientes conjuntos de funciones son ortogonales en los espacios que se indican:

1.-$\left\{1,\ cos\dfrac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\dfrac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ *en* $L^2(a,b)$.

2.-$\left\{1,\ cos\dfrac{\pi nx}{l},\ sen\dfrac{\pi nx}{l},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ *en* $L^2(-l,l)$.

3.-$\left\{sen\dfrac{n\pi x}{l},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ *en* $L^2(0,l)$.

4.-$\left\{cos\dfrac{n\pi x}{l},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ *en* $L^2(0,l)$.

5.-$\left\{sen\dfrac{(2n-1)\pi x}{2l},\ n\in\mathbb{N}\right\}$ *en* $L^2(0,l)$.

Solución:

Para hacer el ejercicio conviene recordar las siguientes fórmulas de trigonometría elemental:

$$sen(x)\cdot sen(y)=\frac{1}{2}[cos(x-y)-cos(x+y)]$$

$$cos(x)\cdot sen(y)=\frac{1}{2}[sen(y+x)+sen(y-x)]$$

$$cos(x)\cdot cos(y)=\frac{1}{2}[cos(x+y)+cos(x-y)]$$

$\forall x,y\in\mathbb{R}$

1.-

(a)

$$<1,cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}>=\int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx=$$

$$=\frac{b-a}{2\pi n}sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\Big]_a^b=$$

$$=\frac{b-a}{2\pi n}[sen(2\pi n)-sen(0)]=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(b)

$$<1,\ sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}>=\int_a^b sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\,dx=$$

$$=-\frac{b-a}{2\pi n}cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\Big]_a^b=$$

$$=-\frac{b-a}{2\pi n}[cos(2\pi n)-cos(0)]=0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

(c)

$$<cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ cos\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}>=$$

$$=\int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}cos\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\,dx=$$

$$=\frac{1}{2}\int_a^b\left(cos\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}+cos\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ sen\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)}sen\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b=$$

$$=\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}[sen\ 2\pi(n+m)-sen(0)]+$$

$$+\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)}[sen\ 2\pi(n-m)-sen(0)]=0$$

$\forall n,m\in\mathbb{N},\ n\neq m.$

(d)

$$<cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}>=$$

$$=\int_a^b cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\,dx=$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left(sen\frac{2\pi(m+n)(x-a)}{b-a} + sen\frac{2\pi(m-n)(x-a)}{b-a} \right) dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m+n)} cos\frac{2\pi(m+n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m-n)} cos\frac{2\pi(m-n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m+n)}[cos\ 2\pi(m+n) - cos(0)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(m-n)}[cos 2\pi(m-n) - cos(0)] = 0$$

$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$

Si n=m,

$$< cos\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a} >=$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b sen\frac{2\pi(n+n)(x-a)}{b-a}\ dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b-a}{4n\pi} cos\frac{2\pi(2n)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{b-a}{4n\pi}[cos(4\pi n) - cos(0)] = 0$$

$\forall n \in \mathbb{N}.$

(e)

$$< sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a},\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a} >=$$

$$= \int_a^b sen\frac{2\pi n(x-a)}{b-a}\ sen\frac{2\pi m(x-a)}{b-a}\ dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_a^b \left(cos\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a} - cos\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)} sen\frac{2\pi(n-m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ sen\frac{2\pi(n+m)(x-a)}{b-a}\Big]_a^b =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n-m)}\ [sen\ 2\pi(n-m) - sen(0)] -$$

$$-\frac{1}{2}\frac{b-a}{2\pi(n+m)}\ [sen\ 2\pi(n+m) - sen(0)] = 0$$

$\forall n, m \in \mathbb{N},\ n \neq m.$

Análogamente se hacen los otros apartados del ejercicio.

Es claro que si un subconjunto $\mathbb{A}$ *de* $L^2(a,b)$ es ortogonal, entonces cualquier subconjunto suyo no vacío es también ortogonal y que si cada elemento de $\mathbb{A}$ se multiplica por un escalar no nulo, el conjunto resultante es también ortogonal; en particular, si cada elemento de un conjunto ortogonal se divide por su norma, se tiene un conjunto ortonormal.

El siguiente ejercicio será de utilidad en la motivación del concepto de base en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 14.

Sea $\{f_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Demostrar que si $\{\lambda_n,\}$ es una sucesión de números reales tales que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n$ es convergente a $f \in L^2(a,b)$ entonces $\lambda_n =< f, f_n >,\ \forall n \in \mathbb{N}$ y

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2.$$

Solución: Probemos en primer lugar que $\lambda_n =< f, f_n >$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

$$< f, f_n >=< \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >= \lim_{k\to\infty} < \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >=$$
$$= \lim_{k\to\infty} \lambda_n = \lambda_n .$$

Sea $k \in \mathbb{N}$, entonces

$$\|f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n\|^2 =< f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n,\ f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n >=$$
$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{k} \lambda_n < f,\ f_n > + \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2$$

Como $\lim_{k\to+\infty} \|f - \sum_{n=1}^{k} \lambda_n f_n\|^2 = \|f - \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n f_n\| = 0$,

$$\|f\|^2 = \lim_{k\to+\infty} \sum_{n=1}^{k} |\lambda_n|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda_n|^2$$

NOTAS.

1.- En el ejercicio anterior se ha afirmado que $< \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >= \lim_{k\to\infty} < \sum_{j=1}^{k} \lambda_j f_j,\ f_n >$. Esto es fácil de probar pues si $\{h_k\}$ es una sucesión de elementos de $L^2(a,b)$ que converge a $h \in L^2(a,b)$, entonces $\lim_{k\to\infty} < h_k, g >=< h, g >$, $\forall g \in L^2(a,b)$ (pensemos que $| < h_k, g > - < h, g > | = | < h_k - h, g > | \leq \|h_k - h\|\ \|g\|$).

Una vez que tenemos cierta familiaridad con la noción de subconjunto ortogonal de $L^2(a,b)$, podemos plantearnos nuevamente la pregunta: ¿Cuál será una definición "adecuada" de base en

$L^2(a,b)$?.

Pensemos en los espacios de Hilbert que conocemos: $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{R}^3, \cdots\cdots$ etc. En $\mathbb{R}$, una base está formada por un elemento no nulo (dicho elemento forma un subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}$); en $\mathbb{R}^2$, una base está formada por un subconjunto ortogonal con dos elementos, y en general, en $\mathbb{R}^n$, una base está formada por un subconjunto ortogonal de n elementos (pensemos que cualquier subconjunto ortogonal de $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente y que el procedimiento de ortogonalización de Gram-Schmidt permite construir, a partir de un subconjunto linealmente independiente $\{f_1, \cdots, f_m\}$ *de* $\mathbb{R}^n$ otro subconjunto ortonormal que que engendra el mismo subespacio). En este caso, todo elemento de $\mathbb{R}^n$ es combinación lineal única de los elementos de la base. Podemos pensar entonces lo siguiente: "Un subconjunto $\mathbb{A}$ de $L^2(a,b)$ que sea ortogonal se dirá que es una base de $L^2(a,b)$ si todo elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita (al ser $\mathbb{A}$ ortogonal, $\mathbb{A}$ es linealmente independiente y por tanto dicha combinación lineal ha de ser única) de elementos de $\mathbb{A}$". Rápidamente vamos a ver que no existe tal subconjunto.

EJERCICIO 15.

Demostrar que no existe ningún subconjunto $\mathbb{A}$ *de* $L^2(a,b)$ que sea ortogonal y que cumpla la siguiente propiedad: "Cualquier elemento de $L^2(a,b)$ es combinación lineal finita de elementos de $\mathbb{A}$".

Solución: Podemos suponer que el conjunto dado es ortonormal.
Si $\mathbb{A} \subset L^2(a,b)$ es pues un conjunto ortonormal cumpliendo la propiedad anterior, $\mathbb{A}$ debe ser infinito (en otro caso, la dimensión del espacio vectorial real $L^2(a,b)$ sería finita, hecho que sabemos que es falso). Así pues $\mathbb{A}$ debe contener algún subconjunto numerable (de hecho, veremos posteriormente que cualquier subconjunto or-

togonal de $L^2(a,b)$ debe ser numerable); Sea $\mathbb{B} \subset \mathbb{A}$, $\mathbb{B}$ numerable. Entonces $\mathbb{B} = \{b_n,\ n \in \mathbb{N}\}$. Tomemos la sucesión $\{f_n\}$ definida por:

$$f_n = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}$$

Si $n > m$,

$$\|f_n - f_m\|^2 = \|\frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n}\|^2 =$$

$$=< \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n}, \frac{b_{m+1}}{2^{m+1}} + \cdots + \frac{b_n}{2^n} >=$$

$$= \frac{1}{2^{2m+2}} + \frac{1}{2^{2m+4}} + \cdots + \frac{1}{2^{2n}}$$

y como la sucesión $\left\{\sum_{n=1}^{k} \frac{1}{2^{2n}}, k \in \mathbb{N}\right\}$ es de Cauchy en $\mathbb{R}$, $\{f_n\}$ es de Cauchy en $L^2(a,b)$. Por ser $L^2(a,b)$ completo, $\{f_n\} \to f$ donde $f \in L^2(a,b)$; de hecho

$$f = \frac{b_1}{2} + \cdots\cdots + \frac{b_n}{2^n} + \cdots\cdots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k}$$

Por otra parte, f debe ser una combinación lineal finita de elementos de $\mathbb{A}$: es decir, existen $a_1, \cdots, a_n \in \mathbb{A}$ y $\alpha_1, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ tales que

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k$$

De donde se obtiene que

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k a_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_k}{2^k} = 0,$$

que no es posible utilizando el ejercicio 14. (¿Por qué?)

Creo que los ejercicios 14 y 15 motivan la siguiente definición:

DEFINICION. Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Diremos que tal subconjunto es una base si cualquier elemento f de $L^2(a,b)$ se expresa de la forma:

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n \tag{1.8}$$

(es decir $f = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n \right)$ *en* $L^2(a,b)$)

La anterior definición motiva de manera inmediata una serie de cuestiones:

¿Existen bases de $L^2(a,b)$? Si la respuesta es afirmativa (que evidentemente lo será porque si no, no habríamos dado la anterior definición), ¿Cuántas bases hay en $L^2(a,b)$?, ¿Cómo se pueden construir bases de $L^2(a,b)$? ¿Qué utilidades tiene la utilización de la noción de base en $L^2(a,b)$?, etc.

La primera pregunta pues que cabe plantearse es la referente a la existencia de bases en $L^2(a,b)$. En este sentido, es muy corriente en Matemáticas al objeto de probar la existencia de algo que interesa (en este caso de base en $L^2(a,b)$) dar diversas caracterizaciones previas. Esto será útil no solamente para probar la existencia (que lo será) sino para poder utilizar las diversas caracterizaciones según nos exija la situación concreta que se nos plantee.

EJERCICIO 16.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$. Demostrar que son equivalentes:

(a) $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es una base de $L^2(a,b)$.

(b) Para cualquier f de $L^2(a,b)$ se cumple la llamada igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2$$

(c) El único elemento de $L^2(a,b)$ ortogonal al conjunto $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es el elemento cero (es decir si $f \in L^2(a,b)$ satisface que $< f, f_n >= 0, \forall n \in \mathbb{N}$, entonces $f = 0$).

Sugerencia: Probar que $a) \Rightarrow b)$, $b) \Rightarrow c)$, $c) \Rightarrow a)$. Para $c) \Rightarrow a)$ pruébese en primer lugar que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$ es convergente (probando que es de Cauchy) a un elemento g de $L^2(a,b)$; después, demuéstrese que $< g, f_n >=< f, f_n >$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Solución:

$a) \Rightarrow b)$: Es el ejercicio 14.

$b) \Rightarrow c)$: Si $f \in L^2(a,b)$ satisface que $< f, f_n >= 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, entonces $\|f\|^2 = 0$, es decir, $f = 0$.

$c) \Rightarrow a)$: Demostremos en primer lugar que dado $f \in L^2(a,b)$, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > f_n$ es convergente: o lo que es lo mismo, que la sucesión de sumas parciales $\{S_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es convergente donde $S_k = \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n$.

Ahora bien, como $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert (y por tanto un espacio normado completo) bastará con probar que $\{S_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Cauchy; para ello, si $m, n \in \mathbb{N}$, $m > n$, se tiene que

$$\|S_m - S_n\|^2 =< S_m - S_n,\ S_m - S_n >=$$

$$=< \sum_{k=n+1}^{m} < f, f_k > f_k,\ \sum_{j=n+1}^{m} < f, f_j > f_j >=$$

$$= \sum_{k=n+1}^{m} | < f, f_k > |^2$$

Recalquemos la igualdad que hemos obtenido, porque será utilizada no sólo en este ejercicio sino también posteriormente:

$$\|S_m - S_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} | < f, f_k > |^2 \tag{1.9}$$

La parte derecha de (1.9) es en realidad $|H_m - H_n|$, donde $\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ representa la sucesión de sumas parciales de la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} | < f, f_k > |^2 \tag{1.10}$$

Por otra parte, se cumple que

$$0 \leq \|f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n\|^2 =$$

$$=< f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n,\ f - \sum_{n=1}^{k} < f, f_n > f_n >=$$

$$= \|f\|^2 - 2\sum_{n=1}^{k} | < f, f_n > |^2 + \sum_{n=1}^{k} | < f, f_n > |^2 =$$

$$\|f\|^2 - \sum_{n=1}^{k} | < f, f_n > |^2$$

Lo que prueba que

$$H_k = \sum_{n=1}^{k} | < f, f_n > |^2 \leq \|f\|^2\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Así pues, la serie (1.10) tiene sumas parciales acotadas.

Al ser una serie de términos no negativos, esto implica que la serie (1.10) es convergente; de aquí se obtiene que la sucesión

$\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ es de Cauchy (pues es convergente), que junto con (1.9) prueba que la sucesión $\{S_k, k \in \mathbb{N}\}$ es también de Cauchy.

Ya sabemos que la serie

$$\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n \tag{1.11}$$

es convergente. Queda por probar que lo es a f. Para ello, sea $g \in L^2(a,b)$ tal que

$$g = \sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$$

Entonces, por el ejercicio 14, si $n \in \mathbb{N}$,

$$< g, f_n >=< f, f_n >,\ \forall n \in \mathbb{N}$$

Luego $< g - f, f_n >= 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. De aquí obtenemos que $g = f$.

NOTAS Y COMENTARIOS.

1.- En la solución del ejercicio anterior se han probado algunos hechos que conviene recalcar: Si $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto ortonormal de $L^2(a,b)$ (no necesariamente una base) entonces:

(a) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2$ es convergente y

$$\sum_{n=1}^{\infty} | < f, f_n > |^2 \leq \|f\|^2\ ,\ \forall f \in L^2(a,b) \tag{1.12}$$

((1.12) se llama desigualdad de Parseval).

(b) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} < f, f_n > \ f_n$ es convergente (no necesariamente a f).

(c) Si $\{\alpha_n\}$ es una sucesión de números reales dados, entonces la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$ es convergente si y solamente si la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ es convergente. De hecho,
si $\mathbb{S}_k = \sum_{n=1}^{k} \alpha_n\ f_n,\ \forall k \in \mathbb{N}$ y si $m, n \in \mathbb{N},\ m > n$, entonces

$$\|\mathbb{S}_m - \mathbb{S}_n\|^2 = \sum_{k=n+1}^{m} \alpha_k^2.$$

2.- La anterior definición de base es válida para cualquier espacio de Hilbert real de dimensión infinita y separable, así como las equivalencias probadas en el ejercicio anterior.

3.- En $\mathbb{R}^n$, un conjunto formado por n vectores ortonormales forma una base. Si $\{v_1, \cdots, v_n\}$ es tal conjunto, entonces todo vector $v \in \mathbb{R}^n$ se expresa de la forma

$$v = \sum_{k=1}^{n} < v, v_k > v_k$$

(obsérvese la analogía con (1.8)).

Además se cumple que

$$\|v\|^2_{\mathbb{R}^n} = \sum_{k=1}^{n} | < v, v_k > |^2$$

(Igualdad de Parseval)
y si $v \in \mathbb{R}^n$ es ortogonal a todos los $v_i, 1 \leq i \leq n$, entonces v debe ser el vector cero (apartado c) del ejercicio anterior).

Obsérvese pues, las analogías existentes entre los espacios de Hilbert $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Es claro que hay también grandes diferencias (las que existen entre un espacio de Hilbert real y separable de dimensión infinita y un espacio de Hilbert real de dimensión

finita; véase, por ejemplo, el ejercicio 15), pero en Matemáticas es fundamental ir reconociendo las analogías y las diferencias entre los nuevos objetos y los que son "familiares" al lector para poder avanzar en el conocimiento de aquellos.

Antes de probar la existencia de bases en $L^2(a,b)$ probemos otro resultado que pone de manifiesto más analogías existentes entre los espacios $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Sabemos que si $\{v_1,\cdots,v_n\}$ es una base ortonormal de $\mathbb{R}^n$ y si $v,w \in \mathbb{R}^n$ son tales que $v=\sum_{k=1}^{n} < v,v_k > v_k$, $w=\sum_{k=1}^{n} < w,v_k > v_k$ entonces el producto escalar de v y w, $< v,w >$ viene dado por

$$< v,w >= \sum_{k=1}^{n} < v,v_k > < w,v_k >$$

El resultado análogo en $L^2(a,b)$ es el siguiente.

EJERCICIO 17.

Sea $\{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ una base de $L^2(a,b)$. Pruébese que si f y g son elementos arbitrarios de $L^2(a,b)$, entonces:

$$< f,g >= \sum_{n=1}^{\infty} < f,f_n > < g,f_n > \qquad (1.13)$$

Solución:

Sabemos que $f=\sum_{n=1}^{\infty} < f,f_n > f_n$, $g=\sum_{n=1}^{\infty} < g,f_n > f_n$. Sean $\{H_k,\ k \in \mathbb{N}\}$, $\{M_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ las sucesiones de las sumas parciales respectivas de las series anteriores; es decir,

$$H_k=\sum_{n=1}^{k} < f,f_n > f_n,\ M_k=\sum_{n=1}^{k} < g,f_n > f_n\ ,\ \forall k \in \mathbb{N}$$

Entonces

$$| < f,g > -\sum_{n=1}^{k} < f,f_n >< g,f_n > | = | < f,g > - < H_k,M_k > | =$$

$$= | < f,g > - < f,M_k > + < f,M_k > - < H_k,M_k > | \leq$$

$$\leq | < f,g-M_k > | + | < f-H_k,M_k > | \leq$$

$$\leq \|f\|\|g-M_k\| + \|f-H_k\|\|M_k\|$$

Como $\lim_{k\to\infty} H_k = f$ y $\lim_{k\to\infty} M_k = g$, se tiene que $\lim_{k\to\infty}\|g-M_k\| = \lim_{k\to\infty}\|f-H_k\| = 0$ y como la sucesión $\{\|M_k\|, k \in \mathbb{N}\}$ es acotada, deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} | < f,g > -\sum_{n=1}^{k} < f,f_n > < g,f_n > | = 0$$

lo que prueba (1.13).

Vamos ya a demostrar la existencia de bases en $L^2(a,b)$. Ello se hará para una base muy especial que se utilizará en el capítulo siguiente en los desarrollos en serie de Fourier. Existen procedimientos muy diversos para probar el ejercicio que sigue. Como uno de los objetivos de estas notas es que sean útiles para el mayor número de lectores posibles, presentamos la demostración dada por Lebesgue que, aunque ingeniosa, utiliza hechos elementales. El ejercicio que sigue muestra una base del espacio $L^2(-\pi,\pi)$. Será inmediato, a partir de un cambio de variable conveniente, la construcción de una base en $L^2(a,b)$ cualquiera.

EJERCICIO 18.

Demostrar que el conjunto

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx)\ ,\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(nx)\ ,\ n \in \mathbb{N}\} \qquad (1.14)$$

es una base de $L^2(-\pi,\pi)$.

Sugerencia: (más que una sugerencia es un plan de ataque para resolver el ejercicio): Utilícese la caracterización de base dada en el apartado c) del ejercicio 16. Para ello hay que demostrar que si $f \in L^2(-\pi,\pi)$ es ortogonal al conjunto (1.14), entonces $f = 0$ (en $L^2(a,b)$). Es conveniente hacer esto en dos etapas:

(a) f continua en $[-\pi,\pi]$. Si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y ortogonal al conjunto (1.14), f debe ser ortogonal a cualquier polinomio trigonométrico. Si $f \not\equiv 0$ *en* $[-\pi,\pi]$, debe existir $x_0 \in (-\pi,\pi)$, $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ tales que $|f(x)| \geq \varepsilon$, $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \subset (-\pi,\pi)$. Demuéstrese entonces que para m suficientemente grande f no es ortogonal al polinomio trigonométrico

$$g_m(x) \equiv (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta))^m$$

realizando para ello un estudio detallado de g_m en los intervalos definidos por las desigualdades $|x - x_0| \leq \leq \delta$, $|x - x_0| \leq \delta/2$, $|x - x_0| > \delta$.

(b) Si $f \in L^2(-\pi,\pi)$, considérese la siguiente función $h : [-\pi,\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = g(x) - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}$, $g(x) \equiv \int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$, $a_0 =< g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >$.

Solución:

Sabemos que el conjunto (1.14) es ortogonal (véase el apartado 2 del ejercicio 13); es trivial que la norma de cada elemento del conjunto dado es 1 y por lo tanto dicho conjunto es ortonormal.

Para ver que es base, utilizaremos el apartado c) del ejercicio 16. Sea pues $f \in L^2(-\pi,\pi)$ ortogonal al conjunto (1.14). Entonces:

$$< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= 0, \; < f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx) >= 0, \tag{1.15}$$

$$< f, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(nx) >= 0, \; \forall n \in \mathbb{N}$$

Debemos demostrar que $f(x) = 0$ *c.p.d. en* $[-\pi,\pi]$. Para ello consideramos dos etapas:

(a) f continua en $[-\pi,\pi]$.

(b) $f \in L^2(-\pi,\pi)$ arbitraria.

Concentrémonos en el caso a). Si $f(x) \neq 0$ *en* $L^2(-\pi,\pi)$ debe existir $x_0 \in (-\pi,\pi)$ tal que $f(x_0) \neq 0$ y por la continuidad de f existen números reales y positivos ε *y* δ tales que

$$|f(x)| \geq \varepsilon \;,\; \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (-\pi,\pi) \tag{1.16}$$

Por otra parte, de (1.15) se deduce que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) cos(nx)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) sen(nx)\,dx = 0,$$

$\forall n \in \mathbb{N}$ y por tanto

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\left(a_0 + \sum_{k=1}^{n} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)\right) dx = 0 \tag{1.17}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$ y para cualquier elección de números reales a_k $(0 \leq k \leq n)$, b_k $(1 \leq k \leq n)$.

Consideremos ahora, para cada $m \in \mathbb{N}$, la función $g_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $g_m(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta))^m$

g_m verifica las siguientes propiedades:

(P1) g_m es una combinación lineal finita de funciones del conjunto (1.14). En efecto, probémoslo por inducción sobre m:

Para

$$m = 1,\ g_1(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta)) =$$

$$= 1 - cos(\delta) + cos(x_0)cos(x) + sen(x_0)sen(x)$$

Sea la afirmación válida para m=p, es decir,

$$g_p(x) = \sum_{k=0}^{p} a_k cos(kx) + b_k sen(kx)$$

Entonces

$$g_{p+1}(x) = (1 + cos(x - x_0) - cos(\delta))^{p+1} = g_p(x)g_1(x)$$

y usando las fórmulas del ejercicio 13, se prueba que

$$g_{p+1}(x) = \sum_{k=0}^{p+1} a_{k'} cos(kx) + b_{k'} sen(kx)$$

para ciertos números reales $a_{k'}$ $(0 \leq k' \leq p+1)$ $b_{k'}$ $(1 \leq k' \leq p+1)$.

(P2) $\forall x \in (-\pi, \pi)/|x - x_0| \leq \delta$, se cumple

$$|g_m(x)| \geq 1 \tag{1.18}$$

Esto es trivial pues si $|x - x_0| \leq \delta$ $(\delta < \pi/2)$, entonces $cos(x - x_0) \geq cos(\delta)$

(P3) $\forall x \in (-\pi, \pi)/\ |x - x_0| \leq \delta/2$, se tiene

$$|g_m(x)| \geq (1 + cos(\frac{\delta}{2}) - cos(\delta))^m \tag{1.19}$$

También trivial pues si $|x - x_0| \leq \delta/2$, $cos(x - x_0) \geq cos(\frac{\delta}{2})$

(P4) $\forall x \in (-\pi, \pi)/|x - x_0| > \delta$, se satisface

$$|g_m(x)| \leq 1 \tag{1.20}$$

En efecto, si $x \in (-\pi, \pi)$ es tal que $|x - x_0| > \delta$, entonces

$$x - x_0 \in (-2\pi, 2\pi)\ y$$

$$x - x_0 \notin (-2\pi, -2\pi + \delta) \cup (-\delta, \delta) \cup (2\pi - \delta, 2\pi) \tag{1.21}$$

Puesto que $x < \pi\ y\ x_0 - \delta > -\pi$ implican $x < \pi\ y\ -x_0 < \pi - \delta$, se tiene que $x - x_0 < 2\pi - \delta$.

Análogamente $x > -\pi\ y\ x_0 + \delta < \pi$ implican $x > -\pi\ y\ - x_0 > -\pi + \delta$, de donde deducimos que $x - x_0 > -2\pi + \delta$

Análogamente,

$$|x - x_0| > \delta \Rightarrow x - x_0 \notin (-\delta, \delta)$$

Así se cumple (1.21).

Pero (1.21) implica que $cos(x - x_0) \leq cos(\delta)$ (ver Fig.6) luego $-2 \leq cos(x - x_0) - cos(\delta) \leq 0$, o lo que es lo mismo $-1 \leq 1 + cos(x - x_0) - cos(\delta) \leq 1$, es decir $|g_m(x)| \leq 1$ que es (1.20).

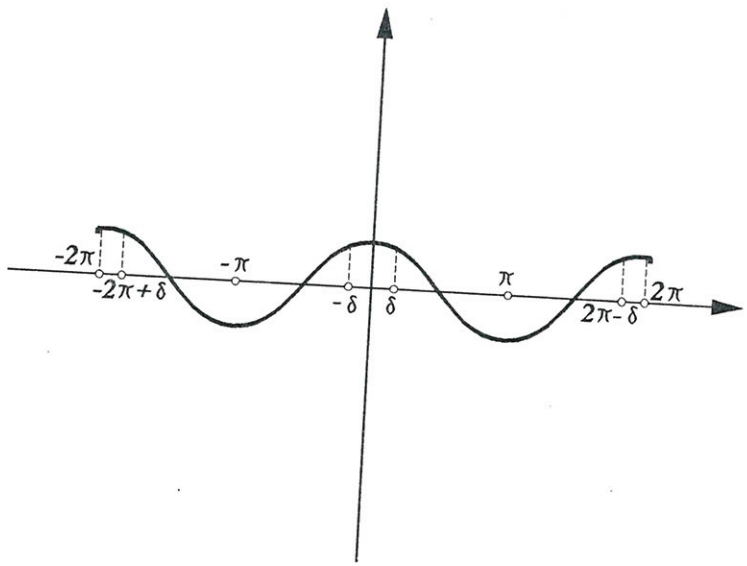


Fig.6

De (1.17) y de (P1) deducimos que

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx = 0\ ,\ \forall m \in \mathbb{N} \qquad (1.22)$$

Pero

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx = \int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)g_m(x)\,dx +$$

$$+\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx + \int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx$$

y además,

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)||g_m(x)|\,dx,$$

puesto que las funciones f y g_m tienen signo constante (no se anulan) en $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ (ver (1.16) y (1.18))

Luego, por (P2) y (P3),

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| =$$

$$= \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f(x)||g_m(x)|\,dx \ \geq\ \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} |f(x)||g_m(x)|\,dx \ \geq$$

$$\geq \int_{x_0-\delta/2}^{x_0+\delta/2} \varepsilon\,(1+cos(\frac{\delta}{2})-cos(\delta))^{m}\,dx = \delta\varepsilon(1+cos(\frac{\delta}{2})-cos(\delta))^{m}$$

Así pues,

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| \ \to\ +\infty \ si\ m \to\ +\infty \qquad (1.23)$$

Por otra parte, por (P4)

$$\left|\int_{-\pi}^{x_0-\delta} f(x)g_m(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{-\pi}^{x_0-\delta} |f(x)||g_m(x)|\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{1.24}$$

y

$$\left|\int_{x_0+\delta}^{\pi} f(x)g_m(x)\,dx\right| \leq$$

$$\leq \int_{x_0+\delta}^{\pi} |f(x)||g_m(x)|\,dx \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|\,dx \tag{1.25}$$

Es claro, por último, que (1.23), (1.24) y (1.25) contradicen (1.22).

Por lo tanto, si f es continua en $[-\pi,\pi]$ y satisface (1.15), $f \equiv 0$ *en* $[-\pi,\pi]$.

Consideremos ahora la etapa b), es decir, $f \in L^2(-\pi,\pi)$ satisfaciendo (1.15).

Sea $g:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ definida por $g(x)=\int_{-\pi}^{x} f(t)\,dt$. Como $f \in L^2(-\pi,\pi) \subset L^1(-\pi,\pi)$, g es absolutamente continua (y por tanto continua) en $[-\pi,\pi]$. Definamos también $h:[-\pi,\pi]\to\mathbb{R}$ por

$$h(x) = g(x) - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}\,,\quad a_0 = < g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > .$$

La función h es una función continua en $[-\pi,\pi]$ que satisface $h'(x) = g'(x) = f(x)$ *c.p.d. en* $[-\pi,\pi]$. Además

$$< h, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > = < g - \frac{a_0}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > = < g, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > - a_0 < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} > =$$

$$= a_0 - a_0 = 0$$

$$< h, \frac{1}{\sqrt{\pi}} cos(nx) > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)cos(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ h(x)\frac{sen(nx)}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} \frac{sen(nx)}{n} h'(x)\,dx \right\} =$$

$$= -\frac{1}{\sqrt{\pi}n} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)sen(nx)\,dx = 0,$$

$$< h, \frac{1}{\sqrt{\pi}} sen(nx) > = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} h(x)sen(nx)\,dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ -h(x)\frac{cos(nx)}{n}\Big]_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} \frac{cos(nx)}{n} h'(x)\,dx \right\} =$$

$$= \frac{1}{n\sqrt{\pi}} [-h(\pi)cos(n\pi) + h(-\pi)cos(n(-\pi))] +$$

$$+ \frac{1}{n\sqrt{\pi}} \left[\int_{-\pi}^{\pi} f(x)cos(nx)\,dx \right] = 0$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$.

Por el apartado a), $h \equiv 0$ *en* $[-\pi,\pi]$, lo que implica que $f(x) = 0$ *c.p.d. en*$[-\pi,\pi]$.

Este ejercicio ha sido duro de resolver, pero merecía la pena hacerlo con detalle. Animo, pues el resto del capítulo es "más relajante".

Es inmediato ahora encontrar una base en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 19.

Demostrar que el conjunto

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{b-a}},\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}cos\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right),\ \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{b-a}}sen\left(n\pi\frac{2x-a-b}{b-a}\right),\ n\in\mathbb{N}\right\}$$

es una base de $L^2(a,b)$.

Sugerencia: La aplicación $y \to \frac{b-a}{2\pi}y + \frac{a+b}{2}$ es una biyección del intervalo $[-\pi,\pi]$ en el intervalo $[a,b]$ (o lo que es lo mismo, la aplicación $x \to \frac{\pi(2x-a-b)}{b-a}$ es una biyección del intervalo $[a,b]$ en el intervalo $[-\pi,\pi]$).

NOTAS Y COMENTARIOS:

1.- El hecho de que el conjunto dado en el ejercicio 19 sea una base de $L^2(a,b)$ tiene muchas e importantes consecuencias. Restrinjámonos por comodidad de notación, al caso en que $(a,b)=(-\pi,\pi)$. Entonces, por definición de base, se tendrá que para cualquier función $f\in L^2(-\pi,\pi)$, f se expresa de la forma

$$f = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n(\cdot)) + b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n(\cdot))\right) \qquad (1.26)$$

donde $a_0 =< f, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,dx$

$$a_n =< f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}cos(n(\cdot)) >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx)\,dx$$
$$b_n =< f, \tfrac{1}{\sqrt{\pi}}sen(n(\cdot)) >= \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(nx)\,dx\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}.$$

y se cumple la igualdad de Parseval

$$\|f\|^2 = \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\ ,\ \forall f\in L^2(-\pi,\pi)$$

Hagamos hincapié en la expresión (1.26). (1.26) significa que $f = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(a_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(k(\cdot))+b_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(k(\cdot)))$ *en* $L^2(-\pi,\pi)$ es decir que

$$\lim_{n\to\infty}\left\|f - a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} - \left(\sum_{k=1}^{n}(a_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(k(\cdot)) + b_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(k(\cdot)))\right)\right\| = 0$$

o equivalentemente

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-S_n(x)|^2\,dx = 0 \qquad (1.27)$$

donde

$$S_n(x) = a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(kx) + b_k\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(kx))$$

Entonces, ¿podremos escribir que

$$f(x) = \qquad (1.28)$$

$$a_0\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}cos(nx) + b_n\frac{1}{\sqrt{\pi}}sen(nx))$$

c.p.d. en $[-\pi,\pi]$?

La mayoría de los lectores pensarán: ¿Qué diferencia existe entre (1.26) y (1.28)?. Pues sí que la hay; (1.26) significa que la serie de la parte derecha de la igualdad converge, con la norma de $L^2(-\pi,\pi)$, a f (es decir (1.27)), mientras que (1.28) significa convergencia puntual de la citada serie (c.p.d.) a la función f y es conocido que convergencia en $L^2(-\pi,\pi)$ no implica necesariamente convergencia puntual (c.p.d.) (ver Ejercicio 10).

No parece pues que para funciones arbitrarias de $L^2(-\pi,\pi)$ pueda afirmase (1.28). Al menos, con los conocimientos que tenemos ahora mismo, no parece que sea fácil probar (1.28). Pero por otra parte está claro que es deseable conocer tipos de funciones de $L^2(-\pi,\pi)$ para las que (1.28) se cumpla, con vista a las aplicaciones que se harán posteriormente.

Este tipo de cuestiones, así como otras relacionadas (¿Para qué tipos de funciones $f \in L^2(-\pi,\pi)$ se cumple (1.28) de manera uniforme en $[-\pi,\pi]$?, ¿Qué relación hay entre la respuesta a la pregunta anterior y la regularidad de la función f?, etc.,) se abordarán en el capítulo siguiente, donde mostraremos diversas aplicaciones del desarrollo (1.26).

Veamos ahora algunas concecuencias inmediatas que, sobre el espacio $L^2(a,b)$, tiene el resultado del ejercicio 19.

EJERCICIO 20.

Demostrar que $L^2(a,b)$ es un espacio de Hilbert separable.

Solución: Sea $\mathbb{A} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ el conjunto dado en el ejercicio 19. El conjunto $\mathbb{H}$ formado por todas las combinaciones lineales finitas con coeficientes racionales de elementos de $\mathbb{A}$ es numerable (¡Pruebe esto el lector!). Veamos que $\mathbb{H}$ es denso en $L^2(a,b)$. Para ello, sean $f \in L^2(a,b)$ y $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrarios.

Como $f = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n} < f, f_k > f_k\right)$, existe un natural n_0, tal que

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (1.29)$$

Ahora bien, para cada k, $1 \le k \le n_0$, $< f, f_k >$ es un número real y por tanto existe $\alpha_k \in \mathbb{Q}$, $1 \le k \le n_0$, tal que

$|\alpha_k - < f, f_k > | < \frac{\varepsilon}{2n_0}$ $\forall k$, $1 \le k \le n_0$. Por tanto

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \right\| \le \left\| f - \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k \right\| +$$

$$+ \left\| \sum_{k=1}^{n_0} < f, f_k > f_k - \sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \right\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n_0} \| (< f, f_k > - \alpha_k) f_k \| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2n_0} n_0 = \varepsilon$$

Como $\sum_{k=1}^{n_0} \alpha_k f_k \in \mathbb{H}$, el anterior razonamiento prueba que $\mathbb{H}$ es denso en $L^2(a,b)$.

NOTA. El espacio de Hilbert real $\mathbb{R}^n$ es también separable (¿Quién es, en este caso, el subconjunto numerable y denso contenido en $\mathbb{R}^n$?). Esto añade otra analogía entre $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$. Como no quiero que se interpreten mis comentarios sobre esto en el sentido de que $L^2(a,b)$ y $\mathbb{R}^n$ "se parecen mucho" (sólo quiero que el lector saque la conclusión de que se parecen "lo suficiente"), vamos a poner de manifiesto otra diferencia fundamental entre ambos espacios, además de la ya citada en el ejercicio 15; nos referimos al conocido teorema de Bolzano-Weierstrass que afirma lo siguiente:

"Si $\mathbb{S} \subset \mathbb{R}^n$ es acotado y contiene infinitos puntos, entonces la acumulación de $\mathbb{S}$ es no vacía" (ver [3] para la demostración).

Este teorema, fundamental para probar muchos resultados para funciones definidas entre espacios euclídeos de dimensión finita, no es cierto en $L^2(a,b)$ (y en general, en cualquier espacio normado de dimensión infinita).

EJERCICIO 21.

Demuéstrese que la afirmación
"Si $\mathbb{S} \subset L^2(a,b)$ es acotado y contiene infinitos elementos, entonces la acumulación de $\mathbb{S}$ es no vacía"

no es cierta .

Sugerencia: Considérese el conjunto del ejercicio 19.

Lo anterior indica que debemos ser cautos a la hora de establecer paralelismos entre resultados algebraicos y topológicos de los espacio $\mathbb{R}^n$ y $L^2(a,b)$; de hecho, existen "más diferencias notables" que semejanzas entre ambos espacios (marcados por el paso de la dimensión finita a infinita). De todas maneras, el lector debería leer, para tener más información al respecto, el estupendo capítulo nº 18 que, con el título de "Análisis Funcional" escribió *I.M. Gelfand* formando parte del libro (3 volúmenes): "La Matemática: su contenido, métodos y significado", [1].

Terminamos el capítulo con la discusión sobre la existencia de diferentes bases en $L^2(a,b)$.

EJERCICIO 22.

Demuéstrese que existen infinitas bases en $L^2(a,b)$.

Solución:
Sea $\mathbb{A} = \{f_n, n \in \mathbb{N}\}$ la base dada en el ejercicio 19. Consideremos el conjunto

$$\mathbb{B} = \left\{ \frac{f_1+f_2}{\|f_1+f_2\|}, \frac{f_1-f_2}{\|f_1-f_2\|}, f_n,\ n \geq 3 \right\} =$$

$$= \left\{ \frac{f_1+f_2}{\sqrt{2}}, \frac{f_1-f_2}{\sqrt{2}}, f_n, n \geq 3 \right\}.$$

Es trivial demostrar que $\mathbb{B}$ es también una base de $L^2(a,b)$.

Es claro que el anterior procedimiento permite construir infinitas bases de $L^2(a,b)$.

NOTAS Y COMENTARIOS

El hecho de disponer de diferentes bases en $L^2(a,b)$ es extremadamente útil para las aplicaciones (está claro que las infinitas bases construidas en el ejercicio anterior tienen la misma utilidad que la dada en el ejercicio 19 y que interesaría por tanto construir otras bases formadas por funciones "distintas de las trigonométricas"). Muchas de estas bases (y quizás las más interesantes) pueden construirse usando la teoría de operadores compactos y autoadjuntos definidos en espacios de Hilbert separables (ver [7]).

Para bases de $L^2(a,b)$ relacionadas con funciones de Bessel, Legendre, Hermite, Laguerre, etc. se puede consultar el excelente libro de *Courant y Hilbert* [5].

De todas maneras, los temas anteriores se explicarán con detalle en otros capítulos de la presente monografía.

Por último, para aquellos que quieran profundizar en el estudio de $L^2(a,b)$ recomendamos el libro de *Brezis* [4] y para aquellos lectores que quieran tener un conocimiento adecuado y más general de los espacios de Hilbert recomendamos el libro de *Halmos* [6].

Bibliografía para el Capítulo I

[1] ALEKSANDROV, A. D. y otros. "*La matemática: su contenido, métodos y significado*". Alianza Universidad, 1980.

[2] APARICIO, C. y PEREZ, J. "*Integral de Lebesgue*". Copistería "La Gioconda". Granada, 1991.

[3] APOSTOL, T.M. "*Análisis Matemático*". Reverté, 1960.

[4] BREZIS, H. "*Análisis Funcional*". Alianza Universidad Textos, 1984.

[5] COURANT, R. y HILBERT, D. "*Methods of Mathematical Physics*", Interscience, 1962.

[6] HALMOS, P.R. "*A Hilbert space problem book*". Van Nostrand, 1967.

[7] HUTSON, V. y PYM, J.S. "*Applicationf of Functional Analysis and Operator Theory*". Academic Press, 1980.

[8] KLINE, M. "*Mathematical thought from ancient to modern times*". Oxford University Press, 1972.

[9] STROMBERG, K.R. "*An introduction to classical real Analysis*". Wadsworth, California, 1981.