ANÁLISIS CONVEXO Y OPTIMIZACIÓN, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

Quinto curso, examen final, 01/02/2013.

1. Sea $K \subset \mathrm{R}^n$. Demuéstrese:

   (a) K cerrado no implica necesariamente que la envolvente convexa de K sea cerrado.

   (b) Enúnciese y demuéstrese el Teorema de Caratheodory: *cualquier elemento de la envolvente convexa de K puede escribirse como combinación lineal convexa de, a lo sumo, ¿? puntos de K*

   (c) Úsese el Teorema anterior (si se estima conveniente), para probar que si K es compacto, entonces la envolvente convexa de K es compacto.

2. Un funcional $\Phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$ de clase $C^1(\mathrm{R}^n)$ se dice elíptico si existe algún número real $\alpha > 0$, tal que

$$\langle \nabla\Phi(v) - \nabla\Phi(u), v - u \rangle \geq \alpha \|v - u\|^2, \ \forall\ u, v \in \mathrm{R}^n.$$

   (a) Pruébese que si Φ es elíptico, entonces Φ es estrictamente convexo y coercivo. Además

$$\Phi(v) - \Phi(u) \geq \langle \nabla\Phi(u), v - u \rangle + \frac{\alpha}{2}\|v - u\|^2, \ \forall\ u, v \in \mathrm{R}^n.$$

   (b) Pruébese que Φ puede ser estrictamente convexo y coercivo y no ser elíptico.

   (c) Demuéstrese que si Φ es elíptico y $K \subset \mathrm{R}^n$ es no vacío, convexo y cerrado, entonces existe un único elemento $z \in K$ tal que $\Phi(z) = \inf_K \ \Phi$ y que z es el único elemento de K que verifica $\langle \nabla\Phi(z), v - z \rangle \geq 0, \ \forall\ v \in K$.

   (d) Sea $\Phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, dos veces derivable en R^n. Pruébese que Φ es elíptico si y solamente si existe algún número real $\beta > 0$, tal que $\Phi''(w, w) \geq \beta \|w\|^2, \ \forall\ w \in \mathrm{R}^n$.

   (e) Sea A una matriz real, $n \times n$, simétrica y $b \in \mathrm{R}^n$. Demuéstrese que el funcional $\Phi : \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$, definido como $\Phi(v) = \frac{1}{2}\langle Av, v \rangle - \langle b, v \rangle, \forall\ v \in \mathrm{R}^n$ es elíptico, si y solamente si A es definida positiva. Además, para funcionales de este tipo, Φ es elíptico si y solamente si Φ es estrictamente convexo.