

# Análisis Funcional y Teoría de la Medida

Miguel Martín y Rafael Payá

[mmartins@ugr.es](mailto:mmartins@ugr.es)

[rpaya@ugr.es](mailto:rpaya@ugr.es)



*ugr*

Universidad  
de Granada



Máster Universitario en Física y Matemáticas (FisyMat)

- 1 Tema 1: Espacios de Medida
- 2 Tema 2: Integración
- 3 Tema 3: Espacios  $L_p$
- 4 Tema 4: Teorema de Fubini
- 5 Tema 5: Teorema de Radon-Nikodým
- 6 Tema 6: Teorema de Riesz
- 7 Tema 7: Espacios Vectoriales Topológicos
- 8 Tema 8: Tipos de Espacios Vectoriales Topológicos
- 9 Tema 9: Ejemplos de Espacios Vectoriales Topológicos
- 10 Tema 10: Teorema de Hahn-Banach
- 11 Tema 11: Teoremas de la Aplicación abierta y Gráfica Cerrada
- 12 Tema 12: Teorema de Banach-Steinhaus
- 13 Tema 13: Teoría de Dualidad
- 14 Tema 14: El Teorema Espectral

# Tema 1: Espacios de Medida

1 Espacios de Medida

2 Espacios medibles

3  $[0, \infty]$

4 Medidas

5 Lebesgue

6 Primer Teorema



## Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

## Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- $\Omega$  es un conjunto no vacío

## Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- $\Omega$  es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

$$(i) \quad \Omega \in \mathcal{A}$$

$$(ii) \quad A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$$

$$(iii) \quad A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$$

## Definición de Espacio de Medida

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$$

- $\Omega$  es un conjunto no vacío
- $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:
  - (i)  $\Omega \in \mathcal{A}$
  - (ii)  $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
  - (iii)  $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es una **medida (positiva)**:
  - (a)  $\mu(\emptyset) = 0$
  - (b)  $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$



## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

### Ejemplos extremos

La  $\sigma$ -álgebra **trivial**  $\{\emptyset, \Omega\}$  y la  $\sigma$ -álgebra **discreta**  $\mathcal{P}(\Omega)$

## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

### Ejemplos extremos

La  $\sigma$ -álgebra **trivial**  $\{\emptyset, \Omega\}$  y la  $\sigma$ -álgebra **discreta**  $\mathcal{P}(\Omega)$

### Ejemplo importante: $\sigma$ -álgebras de Borel

## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

### Ejemplos extremos

La  $\sigma$ -álgebra **trivial**  $\{\emptyset, \Omega\}$  y la  $\sigma$ -álgebra **discreta**  $\mathcal{P}(\Omega)$

### Ejemplo importante: $\sigma$ -álgebras de Borel

- Toda intersección de  $\sigma$ -álgebras es una  $\sigma$ -álgebra

## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

### Ejemplos extremos

La  $\sigma$ -álgebra **trivial**  $\{\emptyset, \Omega\}$  y la  $\sigma$ -álgebra **discreta**  $\mathcal{P}(\Omega)$

### Ejemplo importante: $\sigma$ -álgebras de Borel

- Toda intersección de  $\sigma$ -álgebras es una  $\sigma$ -álgebra
- Para  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , existe la  **$\sigma$ -álgebra engendrada** por  $\mathcal{S}$

## Espacios medibles

### Espacio medible $(\Omega, \mathcal{A})$

$\Omega$  es un conjunto no vacío y  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  es una  $\sigma$ -álgebra:

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

Los elementos de  $\mathcal{A}$  son los **conjuntos medibles**.

### Ejemplos extremos

La  $\sigma$ -álgebra **trivial**  $\{\emptyset, \Omega\}$  y la  $\sigma$ -álgebra **discreta**  $\mathcal{P}(\Omega)$

### Ejemplo importante: $\sigma$ -álgebras de Borel

- Toda intersección de  $\sigma$ -álgebras es una  $\sigma$ -álgebra
- Para  $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ , existe la  $\sigma$ -álgebra **engendada** por  $\mathcal{S}$
- $\Omega$  espacio topológico con topología  $\mathcal{T}$ : la  $\sigma$ -álgebra **de Borel** de  $\Omega$  es la engendada por  $\mathcal{T}$ . Sus elementos son los **conjuntos de Borel** en  $\Omega$ .

## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

### Operaciones con conjuntos medibles

Toda  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$



## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

### Operaciones con conjuntos medibles

Toda  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$

## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

### Operaciones con conjuntos medibles

Toda  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

### Operaciones con conjuntos medibles

Toda  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$

## Conjuntos medibles

### $\sigma$ -álgebra $\mathcal{A}$

- $\Omega \in \mathcal{A}$
- $A \in \mathcal{A} \Rightarrow \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

### Operaciones con conjuntos medibles

Toda  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$  verifica:

- $\emptyset \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
- $A_n \in \mathcal{A} \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$
- $A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcap_{k=1}^n A_k \in \mathcal{A}$
- $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \setminus B \in \mathcal{A}$

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en  $[0, \infty[$

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en  $[0, \infty[$
- $x \leq \infty \quad \forall x \in [0, \infty[$ .



# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en  $[0, \infty[$
- $x \leq \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$ .

Propiedades del orden

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en  $[0, \infty[$
- $x \leq \infty \quad \forall x \in [0, \infty[$ .

Propiedades del orden

- Orden total

# 1. Orden en $[0, \infty]$

$[0, \infty]$

$$[0, \infty] = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 0\} \cup \{\infty\} = [0, \infty[ \cup \{\infty\}$$

Orden

- Orden usual en  $[0, \infty[$
- $x \leq \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$ .

Propiedades del orden

- Orden total
- Todo subconjunto no vacío de  $[0, \infty]$  tiene supremo e ínfimo

## 2. Topología de $[0, \infty]$

Topología de  $[0, \infty]$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$



## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$
- Toda sucesión monótona converge en  $[0, \infty]$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$
- Toda sucesión monótona converge en  $[0, \infty]$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$
- Toda sucesión monótona converge en  $[0, \infty]$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$

## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$
- Toda sucesión monótona converge en  $[0, \infty]$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$
- $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$



## 2. Topología de $[0, \infty]$

### Topología de $[0, \infty]$

- Topología del orden: Abiertos = Uniones de intervalos abiertos.

$$] \alpha, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x < \beta\} \quad (\alpha, \beta \in [0, \infty])$$

$$] \alpha, \infty [ = \{x \in [0, \infty] : \alpha < x\} \quad (\alpha \in [0, \infty])$$

$$[0, \beta [ = \{x \in [0, \infty] : x < \beta\} \quad (\beta \in [0, \infty])$$

- Subbase numerable:  $\{[0, \beta[ : \beta \in \mathbb{Q}^+\} \cup \{] \alpha, \infty [ : \alpha \in \mathbb{Q}^+\}$

### Propiedades topológicas

- Espacio métrico compacto homeomorfo a  $[0, 1]$
- Compactación por un punto de  $[0, \infty[$
- Toda sucesión monótona converge en  $[0, \infty]$
- $\limsup_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup\{x_k : k \geq n\}$
- $\liminf_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf\{x_k : k \geq n\}$
- $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} y_n, \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} x_n \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} y_n$
- $x_n \leq y_n \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \{x_n\} \rightarrow x, \quad \{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow x \leq y$

## Suma en $[0, \infty]$

Suma en  $[0, \infty]$

## Suma en $[0, \infty]$

Suma en  $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1$ ,  $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$



## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1$ ,  $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
- Continua:  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $\{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1$ ,  $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
- Continua:  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $\{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$
- Tiene sentido la suma de cualquier serie: 
$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$$

## Suma en $[0, \infty]$

### Suma en $[0, \infty]$

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

### Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1$ ,  $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
- Continua:  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $\{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$

- Tiene sentido la suma de cualquier serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

Suma en  $[0, \infty]$ Suma en  $[0, \infty]$ 

Suma usual en  $[0, \infty[$   
 $x + \infty = \infty + x = \infty \quad \forall x \in [0, \infty]$

## Propiedades de la suma

- Asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0
- Cancelación sólo en ciertos casos:  $x + y = x + z$ ,  $x < \infty \Rightarrow y = z$
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1$ ,  $x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq y_1 + y_2$
- Continua:  $\{x_n\} \rightarrow x$ ,  $\{y_n\} \rightarrow y \Rightarrow \{x_n + y_n\} \rightarrow x + y$

- Tiene sentido la suma de cualquier serie:  $\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n x_k$

- $\sum_{n=1}^{\infty} (x_n + y_n) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} y_n$

- Incondicional: Para  $a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty]$  y  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$  biyectiva, se tiene:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a(m, n) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a(m, n) = \sum_{k=1}^{\infty} a(\sigma(k))$$

## Producto en $[0, \infty]$

Producto en  $[0, \infty]$

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$



## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$

### Propiedades del producto

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$

### Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$

### Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$

### Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$
- Crecientemente continuo:  $\{x_n\} \nearrow x, \{y_n\} \nearrow y \Rightarrow \{x_n y_n\} \rightarrow xy$

## Producto en $[0, \infty]$

### Producto en $[0, \infty]$

- Producto usual en  $[0, \infty[$
- $x \infty = \infty x = \infty \quad \forall x \in ]0, \infty]$
- $0 \infty = \infty 0 = 0$

### Propiedades del producto

- Asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- Compatible con el orden:  $x_1 \leq y_1, x_2 \leq y_2 \Rightarrow x_1 x_2 \leq y_1 y_2$
- Crecientemente continuo:  $\{x_n\} \nearrow x, \{y_n\} \nearrow y \Rightarrow \{x_n y_n\} \rightarrow xy$
- $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha x_n = \alpha \sum_{n=1}^{\infty} x_n$

# Concepto de Medida

## Medida

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

# Concepto de Medida

## Medida

$\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

- $\mu(\emptyset) = 0$
- $\mu$  es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \Rightarrow \quad \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

## Medidas de Borel

Medida de Borel en un espacio topológico  $\Omega$  = Medida definida en la  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\Omega$

## Consecuencias

### Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:



## Consecuencias

### Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

## Consecuencias

### Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

## Consecuencias

### Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

- Subaditiva:  $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

# Consecuencias

## Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

- Subaditiva:  $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A}, A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

# Consecuencias

## Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

- Subaditiva:  $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A}, A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita:  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \supseteq A_{n+1} \ \forall n \in$

$$\mathbb{N}, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

## Consecuencias

### Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

- Subaditiva:  $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A}, A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita:  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \supseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N}, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$

$$\mathbb{N}, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Sugestivamente:  $\{A_n\} \nearrow A \Rightarrow \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$

# Consecuencias

## Propiedades de las medidas

Toda medida  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es:

- Finitamente aditiva:

$$A_1, A_2, \dots, A_n \in \mathcal{A}, A_k \cap A_j = \emptyset \ (k \neq j) \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{k=1}^n A_k \right) = \sum_{k=1}^n \mu(A_k)$$

- Creciente:  $A, B \in \mathcal{A}, A \subseteq B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$

- Subaditiva:  $A_n \in \mathcal{A} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

- Crecientemente continua:

$$A_n \in \mathcal{A}, A_n \subseteq A_{n+1} \ \forall n \in \mathbb{N} \Rightarrow \mu \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

- Decrecientemente continua donde es finita:  $A_n \in \mathcal{A}, A_n \supseteq A_{n+1} \ \forall n \in$

$$\mathbb{N}, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \mu \left( \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(A_n)$$

Sugestivamente:  $\{A_n\} \nearrow A \Rightarrow \{\mu(A_n)\} \nearrow \mu(A)$

Mientras que:  $\{A_n\} \searrow A, \mu(A_1) < \infty \Rightarrow \{\mu(A_n)\} \searrow \mu(A)$

## Primeros Ejemplos de medidas

### Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$  arbitrario,  $m : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  cualquier función y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x) := \sup \left\{ \sum_{x \in J} m(x) : J \subseteq A, J \text{ finito} \right\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$



## Primeros Ejemplos de medidas

### Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$  arbitrario,  $m : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  cualquier función y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x) := \sup \left\{ \sum_{x \in J} m(x) : J \subseteq A, J \text{ finito} \right\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

### Medidas de Dirac

Fijado  $x \in \Omega$ , para  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con  $m(x) = 1$  y  $m(\omega) = 0 \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

## Primeros Ejemplos de medidas

### Medidas discretas

$\Omega \neq \emptyset$  arbitrario,  $m : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  cualquier función y  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ . Se define:

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} m(x) := \sup \left\{ \sum_{x \in J} m(x) : J \subseteq A, J \text{ finito} \right\} \quad (A \in \mathcal{P}(\Omega))$$

### Medidas de Dirac

Fijado  $x \in \Omega$ , para  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  se define:

$$\delta_x(A) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases}$$

Se obtiene con  $m(x) = 1$  y  $m(\omega) = 0 \forall \omega \in \Omega \setminus \{x\}$

### Medida que cuenta (“counting measure”)

Para todo  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$  se define  $\mu(A)$  como el número de elementos de  $A$ , entendiéndose que  $\mu(A) = \infty$  cuando  $A$  es un conjunto infinito.

Se obtiene con  $m(x) = 1 \forall x \in \Omega$ .

Definición de la Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$ 

## Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

## Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

### Medida exterior de Lebesgue

## Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

### Medida exterior de Lebesgue

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$$

Definición de la Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$ 

## Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

## Medida exterior de Lebesgue

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

## Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

### Medida exterior de Lebesgue

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

### Medida de Lebesgue

## Definición de la Medida de Lebesgue en $\mathbb{R}^N$

### Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

### Medida exterior de Lebesgue

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

### Medida de Lebesgue

- **Conjuntos medibles-Lebesgue:**

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N : \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$



Definición de la Medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$ 

## Intervalos acotados

$$I = \prod_{k=1}^N I^{(k)} \quad m(I) = \prod_{k=1}^N \left( \sup I^{(k)} - \inf I^{(k)} \right)$$

## Medida exterior de Lebesgue

$$\lambda^* : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, \infty]$$

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} m(I_n) : E \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

## Medida de Lebesgue

- **Conjuntos medibles-Lebesgue:**

$$\mathcal{M} = \left\{ E \subseteq \mathbb{R}^N : \lambda^*(A) = \lambda^*(A \cap E) + \lambda^*(A \setminus E) \quad \forall A \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \right\}$$

- **Medida de Lebesgue:**  $\lambda = \lambda^*|_{\mathcal{M}}$

$$\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty], \quad \lambda(E) = \lambda^*(E) \quad \forall E \in \mathcal{M}$$

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N, \lambda^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$  (**medida de Borel-Lebesgue**) es la única medida de Borel en  $\mathbb{R}^N$  que extiende a  $m$

# Propiedades de la Medida de Lebesgue (1)

## Primeras propiedades

- $\mathcal{M}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\lambda : \mathcal{M} \rightarrow [0, \infty]$  es una medida
- $\mathcal{B} \subsetneq \mathcal{M} \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$
- $E \subset \mathbb{R}^N$ ,  $\lambda^*(E) = 0 \Rightarrow E \in \mathcal{M}$
- $\lambda|_{\mathcal{B}}$  (medida de Borel-Lebesgue) es la única medida de Borel en  $\mathbb{R}^N$  que extiende a  $m$
- También  $\lambda$  es la única medida definida en  $\mathcal{M}$  que extiende a  $m$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología



## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists G : E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists G : E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists F : F = \overline{F} \subset E, \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists G : E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists F : F = \overline{F} \subset E, \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$ , conjunto de tipo  $G_\delta$  con  $\lambda(B \setminus E) = 0$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists G : E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists F : F = \overline{F} \subset E, \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$ , conjunto de tipo  $G_\delta$  con  $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$ , conjunto de tipo  $F_\sigma$  con  $\lambda(E \setminus A) = 0$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (2)

### Medida de Lebesgue y Topología

$$\lambda^*(E) = \inf \left\{ \lambda(G) : E \subseteq G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N \right\} \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N)$$

Equivalen:

- $E \in \mathcal{M}$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists G : E \subset G = G^\circ \subseteq \mathbb{R}^N, \lambda^*(G \setminus E) < \varepsilon$
- $\forall \varepsilon > 0 \exists F : F = \overline{F} \subset E, \lambda^*(E \setminus F) < \varepsilon$
- $E \subseteq B$ , conjunto de tipo  $G_\delta$  con  $\lambda(B \setminus E) = 0$
- $E \supseteq A$ , conjunto de tipo  $F_\sigma$  con  $\lambda(E \setminus A) = 0$

$$\begin{aligned} E \in \mathcal{M} &\Rightarrow \lambda(E) = \inf \{ \lambda(G) : G \text{ abierto}, G \supseteq E \} \\ &= \sup \{ \lambda(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E \} \end{aligned}$$



## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:

$$\lambda^*(E + x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E+x \in \mathcal{M}$ , en cuyo caso,  $\lambda(E+x) = \lambda(E)$

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E+x \in \mathcal{M}$ , en cuyo caso,  $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en  $\mathbb{R}^N$ , finita en compactos e invariante por traslaciones.

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E+x \in \mathcal{M}$ , en cuyo caso,  $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en  $\mathbb{R}^N$ , finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis “finita en compactos” se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita

## Propiedades de la Medida de Lebesgue (3)

### Medida de Lebesgue y Geometría

- La medida exterior de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $\lambda^*(E+x) = \lambda^*(E) \quad (E \subseteq \mathbb{R}^N, x \in \mathbb{R}^N)$
- La medida de Lebesgue es invariante por traslaciones:  
 $E \in \mathcal{M} \Leftrightarrow E+x \in \mathcal{M}$ , en cuyo caso,  $\lambda(E+x) = \lambda(E)$
- Salvo un factor de proporcionalidad, la medida de Borel-Lebesgue es la única medida de Borel en  $\mathbb{R}^N$ , finita en compactos e invariante por traslaciones.
- La hipótesis “finita en compactos” se puede sustituir por la existencia de un conjunto abierto no vacío con medida finita
- La medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^N$  es invariante por isometrías.

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores



# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

## Otros ejemplos importantes

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

## Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes

# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

## Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar



# Construcción de Medidas

## Extensión de Carathéodory-Hahn

Visión abstracta de la construcción de la medida de Lebesgue

- Construcción de medidas exteriores
- Teorema de Carathéodory
- Teorema de extensión de Hahn
- Unicidad de la extensión de Hahn
- Completación de una medida
- Teorema de Aproximación

## Otros ejemplos importantes

- Medidas de Lebesgue-Stieltjes
- Medidas de Haar
- Medidas de Hausdorff

## Tema 2: Integración

1 Funciones medibles

2 Integral

## Función medible entre espacios medibles

## Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

## Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

## Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

## Primeras propiedades

### Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

### Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible



### Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

### Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{T}$ :

## Función medible entre espacios medibles

$(\Omega, \mathcal{A})$ ,  $(Y, \mathcal{B})$  espacios medibles,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(B) \in \mathcal{A} \quad \forall B \in \mathcal{B}$$

## Primeras propiedades

- La composición de funciones medibles es medible
- Si  $\mathcal{B}$  es la  $\sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{T}$ :

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

## Función medible con valores en un espacio topológico

## Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

## Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

## Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

## Primeras propiedades

## Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

## Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles

### Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

### Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible



### Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

### Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si  $\mathcal{T}$  tiene una subbase numerable  $\mathcal{S}$ :

## Función medible con valores en un espacio topológico

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $(Y, \mathcal{T})$  espacio topológico,  $f : \Omega \rightarrow Y$

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(T) \in \mathcal{A} \quad \forall T \in \mathcal{T}$$

## Primeras propiedades

- Las funciones continuas son (Borel) medibles
- Una función continua de una función medible es medible
- Si  $\mathcal{T}$  tiene una subbase numerable  $\mathcal{S}$ :

$$f \text{ medible} \iff f^{-1}(S) \in \mathcal{A} \quad \forall S \in \mathcal{S}$$

## Funciones medibles positivas

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$



## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

## Funciones medibles positivas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$ . Equivalen:

- (i)  $f$  es medible
- (ii)  $\{x \in \Omega : f(x) > \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iii)  $\{x \in \Omega : f(x) \geq \alpha\} \in \mathcal{A} \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}^+$
- (iv)  $\{x \in \Omega : f(x) < \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$
- (v)  $\{x \in \Omega : f(x) \leq \beta\} \in \mathcal{A} \quad \forall \beta \in \mathbb{R}^+$

## Consecuencias

$\{f_n\}$  medibles positivas. También son medibles:

- $g_1(x) = \sup\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_2(x) = \inf\{f_n(x) : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in \Omega)$
- $g_3(x) = \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$
- $g_4(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad (x \in \Omega)$

Por tanto:  $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \Omega \implies f$  medible

## Función simple positiva



## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Función simple positiva:**  $s : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  medible con  $s(\Omega)$  finito

## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Función simple positiva:**  $s : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  medible con  $s(\Omega)$  finito

**Descomposición canónica:**

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \infty$$

## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Función simple positiva:**  $s : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  medible con  $s(\Omega)$  finito

**Descomposición canónica:**

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

Función simple positiva:  $s : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  medible con  $s(\Omega)$  finito

Descomposición canónica:

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j), \quad s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$$

## Función simple positiva

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Función simple positiva:**  $s : \Omega \rightarrow [0, \infty[$  medible con  $s(\Omega)$  finito

**Descomposición canónica:**

$$s(\Omega) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\} \quad \text{con} \quad 0 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_n < \infty$$

$$A_k := \{x \in \Omega : s(x) = \alpha_k\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^n A_k, \quad A_k \cap A_j = \emptyset \quad (k \neq j), \quad s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k}$$

Recíprocamente:

$$B_1, \dots, B_m \in \mathcal{A}, \quad \beta_1, \dots, \beta_m \in [0, \infty[ \Rightarrow t = \sum_{j=1}^m \beta_j \chi_{B_j} \quad \text{simple positiva}$$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas



## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \Omega$

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\sup f(\Omega) < \infty$  convergencia uniforme

## Teorema de aproximación de Lebesgue

Toda función medible positiva es el límite puntual de una sucesión creciente de funciones simples positivas

$$f : \Omega \rightarrow [0, \infty] \text{ medible, } n \in \mathbb{N}$$

$$F_n = \{x \in \Omega : f(x) \geq n\} \in \mathcal{A}$$

$$E_{nk} = \left\{ x \in \Omega : \frac{k-1}{2^n} \leq f(x) < \frac{k}{2^n} \right\} \in \mathcal{A} \quad (k = 1, 2, \dots, n2^n)$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n2^n} \frac{k-1}{2^n} \chi_{E_{nk}} + n \chi_{F_n}$$

- $s_n(x) \leq s_{n+1}(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\{s_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \Omega$
- $\sup f(\Omega) < \infty$  convergencia uniforme

## Consecuencia

$f, g$  medibles,  $\alpha \in [0, \infty]$ ,  $p \in \mathbb{R}^+$   $\Rightarrow f + g, \alpha f, fg, f^p$  medibles

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$



## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \text{ simples, } s(x) \leq t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$$

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \text{ simples, } s(x) \leq t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$$

$$\int_E s d\mu = \max \left\{ \int_E t d\mu : t \text{ simple, } t \leq s \right\}$$

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \text{ simples, } s(x) \leq t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$$

$$\int_E s d\mu = \max \left\{ \int_E t d\mu : t \text{ simple, } t \leq s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

## Definición de la Integral

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $E \in \mathcal{A}$

Integral de de una función simple positiva

$$s = \sum_{k=1}^n \alpha_k \chi_{A_k} \quad \int_E s d\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mu(A_k \cap E)$$

$$s, t \text{ simples, } s(x) \leq t(x) \quad \forall x \in E \quad \Rightarrow \quad \int_E s d\mu \leq \int_E t d\mu$$

$$\int_E s d\mu = \max \left\{ \int_E t d\mu : t \text{ simple, } t \leq s \right\}$$

Integral de una función medible positiva

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

$$\int_E f d\mu = \sup \left\{ \int_E s d\mu : s \text{ simple } s \leq f \right\}$$

## Propiedades de la integral (1)

### Primeras propiedades

## Propiedades de la integral (1)

## Primeras propiedades

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible  $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$



## Propiedades de la integral (1)

### Primeras propiedades

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible  $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,  $\alpha \in [0, \infty]$   $\Rightarrow \int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu$

## Propiedades de la integral (1)

## Primeras propiedades

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible  $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,  $\alpha \in [0, \infty]$   $\Rightarrow \int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu$
- $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medibles,  $f \leq g$   $\Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$

## Propiedades de la integral (1)

### Primeras propiedades

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible  $\Rightarrow \int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$
- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,  $\alpha \in [0, \infty]$   $\Rightarrow \int_{\Omega} \alpha f d\mu = \alpha \int_{\Omega} f d\mu$
- $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medibles,  $f \leq g$   $\Rightarrow \int_{\Omega} f d\mu \leq \int_{\Omega} g d\mu$

### Teorema de la convergencia monótona

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión creciente de funciones medibles positivas en  $\Omega$  y sea  $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \quad \forall x \in \Omega$ . Entonces:

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

## Propiedades de la integral (2)

### Principales consecuencias del TCM

## Propiedades de la integral (2)

### Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

## Propiedades de la integral (2)

### Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

## Propiedades de la integral (2)

### Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

## Propiedades de la integral (2)

## Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$



## Propiedades de la integral (2)

## Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

## Propiedades de la integral (2)

## Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\mu$$

## Propiedades de la integral (2)

## Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\mu$$

- **Lema de Fatou:**  $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

## Propiedades de la integral (2)

## Principales consecuencias del TCM

- $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right) d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

- $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible. **Integral indefinida:**

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\mu$$

- **Lema de Fatou:**  $\{f_n\}$  sucesión de funciones medibles positivas en  $\Omega$ :

$$\int_{\Omega} \left( \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n d\mu$$

## Propiedades de la integral (3)

### Valores extremos de la integral

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

## Propiedades de la integral (3)

## Valores extremos de la integral

 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

## Propiedades de la integral (3)

## Valores extremos de la integral

 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_{\Omega} f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

## Propiedades de la integral (3)

## Valores extremos de la integral

$f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_{\Omega} f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

## Desigualdades de Hölder y Minkowski

$f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medibles,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ :



## Propiedades de la integral (3)

## Valores extremos de la integral

 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_{\Omega} f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

## Desigualdades de Hölder y Minkowski

 $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medibles,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ :

$$\int_{\Omega} f g d\mu \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} g^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*}$$

## Propiedades de la integral (3)

## Valores extremos de la integral

 $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible:

$$\int_{\Omega} f d\mu = 0 \Leftrightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) > 0\}) = 0 \quad (f = 0 \text{ c.p.d.})$$

$$\int_{\Omega} f d\mu < \infty \Rightarrow \mu(\{x \in \Omega : f(x) = \infty\}) = 0 \quad (f < \infty \text{ c.p.d.})$$

## Desigualdades de Hölder y Minkowski

 $f, g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medibles,  $1 < p < \infty$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ :

$$\int_{\Omega} f g d\mu \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{1/p} \left( \int_{\Omega} g^{p^*} d\mu \right)^{1/p^*}$$

$$\left( \int_{\Omega} (f + g)^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left( \int_{\Omega} f^p d\mu \right)^{1/p} + \left( \int_{\Omega} g^p d\mu \right)^{1/p}$$

## Tema 3: Espacios $L_p$

1 Funciones medibles

2 Espacios  $L_p$

3 Funciones integrables

Funciones medibles



Espacios  $L_p$



Funciones integrables



$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad (\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C}))$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad (\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C}))$$

Dos observaciones



$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad (\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C}))$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad (\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C}))$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (u(x), v(x)) \quad \forall x \in \Omega$ . Entonces:

$\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ ,  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \quad (\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C}))$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ,  $f(x) = (u(x), v(x)) \quad \forall x \in \Omega$ . Entonces:

$$f \text{ medible} \iff u, v \text{ medibles}$$

## Propiedades de las funciones medibles

## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.

## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$  (álgebra sobre  $\mathbb{K}$ )

## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$  (álgebra sobre  $\mathbb{K}$ )
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu), p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$  medible positiva

## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$  (álgebra sobre  $\mathbb{K}$ )
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu), p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$  medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$  medibles positivas



## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$  (álgebra sobre  $\mathbb{K}$ )
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu), p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$  medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$  medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu) :$

$$|\alpha(x)| = 1, f(x) = \alpha(x)|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$

## Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  es medible  $\iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f$  medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g, fg \in \mathcal{L}_0(\mu)$  (álgebra sobre  $\mathbb{K}$ )
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu), p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$  medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$  medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu) :$

$$|\alpha(x)| = 1, f(x) = \alpha(x)|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$

- $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_0(\mu), \{f_n(x)\} \rightarrow f(x) \quad \forall x \in \Omega \implies f \in \mathcal{L}_0(\mu)$

## Espacios $L_p$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

Espacios  $L_p$ 

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

$p = 0$  Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

Espacios  $L_p$ 

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

$p = 0$  Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$  Funciones  $p$ -integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$$

Espacios  $L_p$ 

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

$p = 0$  Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$  Funciones  $p$ -integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$  Funciones esencialmente acotadas:

## Espacios $L_p$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

$p = 0$  Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$  Funciones  $p$ -integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$  Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \text{ess sup } |f| = \min\{M \in [0, \infty] : |f| \leq M \text{ c.p.d.}\}$$

## Espacios $L_p$

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $p \in [0, \infty]$ :

$p = 0$  Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$  Funciones  $p$ -integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_{\Omega} |f|^p d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$  Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \text{ess sup } |f| = \min\{M \in [0, \infty] : |f| \leq M \text{ c.p.d.}\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \text{ess sup } |f| < \infty\}$$



Caso  $1 \leq p < \infty$

Caso  $1 \leq p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

Caso  $1 \leq p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_p$  seminorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

Caso  $1 \leq p < \infty$ 

$$\nu_p(f) = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_p$  seminorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.}\} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

Caso  $1 \leq p < \infty$ 

$$\nu_p(f) = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_p$  seminorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.}\} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

Caso  $1 \leq p < \infty$ 

$$\nu_p(f) = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_p$  seminorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \iff f \in N(\mu) := \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.}\} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left( \int_{\Omega} |f|^p d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$  espacio normado

Caso  $p = \infty$

### Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup } |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$



### Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup } |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_\infty$  seminorma en  $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

### Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup } |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_\infty$  seminorma en  $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

### Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \text{ess sup } |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$ ,  $\nu_\infty$  seminorma en  $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \text{ess sup } |f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

$L_\infty(\mu)$  espacio normado

Caso  $0 < p < 1$

### Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

### Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

Caso  $0 < p < 1$ 

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\nu_p$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

Caso  $0 < p < 1$ 

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\nu_p$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$



Caso  $0 < p < 1$ 

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\nu_p$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

Caso  $0 < p < 1$ 

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\nu_p$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad [f]_p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f, g) = [f - g]_p = \int_{\Omega} |f - g|^p d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

Caso  $0 < p < 1$ 

$$a, b \geq 0, 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leq a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$  espacio vectorial sobre  $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\nu_p$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad [f]_p = \int_{\Omega} |f|^p d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f, g) = [f - g]_p = \int_{\Omega} |f - g|^p d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$  espacio métrico

Caso  $p = 0$

$$\mu(\Omega) < \infty$$

### Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

Caso  $p = 0$  $\mu(\Omega) < \infty$ 

$$\nu_0(f) = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

 $\nu_0$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_0(\mu)$

Caso  $p = 0$  $\mu(\Omega) < \infty$ 

$$\nu_0(f) = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

 $\nu_0$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_0(\mu)$ 

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad [f]_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

Caso  $p = 0$  $\mu(\Omega) < \infty$ 

$$\nu_0(f) = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

 $\nu_0$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_0(\mu)$ 

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad [f]_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f, g) = [f - g]_0 \quad (f, g \in L_0(\mu))$$



Caso  $p = 0$ 

$$\mu(\Omega) < \infty$$

$$\nu_0(f) = \int_{\Omega} \frac{|f|}{1+|f|} d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

$\nu_0$  es una pseudonorma en  $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad [f]_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f, g) = [f - g]_0 \quad (f, g \in L_0(\mu))$$

$L_0(\mu)$  espacio métrico

## Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ ( $0 \leq p \leq \infty$ )

## Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$

## Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$

## Primeras propiedades de los espacios $L_p(\mu)$ ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus i L_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus iL_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus iL_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus i L_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$



Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus iL_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus i L_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

Primeras propiedades de los espacios  $L_p(\mu)$  ( $0 \leq p \leq \infty$ )

- $f \in L_p(\mu) \implies |f| \in L_p(\mu)$
- $f \in L_0(\mu), |f| \in L_p(\mu) \implies f \in L_p(\mu)$
- Reducción al caso real:  $L_p(\mu, \mathbb{C}) = L_p(\mu, \mathbb{R}) \oplus i L_p(\mu, \mathbb{R})$
- $L_p(\mu, \mathbb{R})$  retículo vectorial:

$$f \leq g \iff \mu(\{x \in \Omega : f(x) > g(x)\}) = 0 \quad (f \leq g \text{ c.p.d.})$$

$$f, g \in L_p(\mu) \implies f \vee g, f \wedge g \in L_p(\mu)$$

$$f \vee g = \frac{1}{2}(f + g + |f - g|), \quad f \wedge g = \frac{1}{2}(f + g - |f - g|)$$

$$[f \vee g](x) = \max\{f(x), g(x)\}, \quad [f \wedge g](x) = \min\{f(x), g(x)\} \quad \text{c.p.d.}$$

$$f \in L_p(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^- \in L_p(\mu)$$

$$f^+ = f \vee 0; \quad f^- = -(f \wedge 0); \quad f = f^+ - f^-; \quad |f| = f^+ + f^-$$

## Convergencia en $L_p(\mu)$

Convergencia en  $L_p(\mu)$ 

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$

Convergencia en  $L_p(\mu)$ 

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$

Convergencia en  $L_p(\mu)$ 

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Convergencia en  $L_p(\mu)$ 

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones ( $\mu$  finita)



## Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

## Implicaciones ( $\mu$ finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$

## Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

## Implicaciones ( $\mu$ finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  c.p.d.  $\implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$

Convergencia en  $L_p(\mu)$ 

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones ( $\mu$  finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  c.p.d.  $\implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \rightarrow f$  c.p.d.

## Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

## Implicaciones ( $\mu$ finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  c.p.d.  $\implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \rightarrow f$  c.p.d.

## Teorema de Riesz-Fisher

## Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

## Implicaciones ( $\mu$ finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  c.p.d.  $\implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \rightarrow f$  c.p.d.

## Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$  es un espacio de Banach ( $1 \leq p \leq \infty$ )

## Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$ :  $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_{\infty}(\mu) \iff \{f_n\} \rightarrow f$  uniformemente en  $\Omega \setminus E$  con  $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$ :  
 $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \iff \lim_{n \rightarrow \infty} \mu(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geq \varepsilon\}) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

## Implicaciones ( $\mu$ finita)

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  c.p.d.  $\implies \{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \rightarrow f$  en  $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \rightarrow f$  c.p.d.

## Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$  es un espacio de Banach ( $1 \leq p \leq \infty$ )
- $L_p(\mu)$  es un espacio métrico completo ( $0 \leq p < 1$ )

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$



## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener  $\int_E |f| d\mu < \infty$

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener  $\int_E |f| d\mu < \infty$

## Propiedades

$$I : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener  $\int_E |f| d\mu < \infty$

## Propiedades

$$I : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener  $\int_E |f| d\mu < \infty$

## Propiedades

$$I : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$$

## Integral

Para  $f \in L_1(\mu)$ :

$$\int_{\Omega} f d\mu = \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^+ d\mu - \int_{\Omega} (\operatorname{Re} f)^- d\mu + i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^+ d\mu - i \int_{\Omega} (\operatorname{Im} f)^- d\mu$$

$$\int_E f d\mu = \int_{\Omega} f \chi_E d\mu \quad (E \in \mathcal{A})$$

Bastaría con tener  $\int_E |f| d\mu < \infty$

## Propiedades

$$I : L_1(\mu) \rightarrow \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_{\Omega} f d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left| \int_{\Omega} f d\mu \right| \leq \int_{\Omega} |f| d\mu = \|f\|_1$$

- Positivo:

$$f \in L_1(\mu, \mathbb{R}), f \geq 0 \implies \int_{\Omega} f d\mu \geq 0$$

## Teorema de la convergencia dominada

## Teorema de la convergencia dominada

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  que converge puntualmente a una función  $f$ .



## Teorema de la convergencia dominada

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  que converge puntualmente a una función  $f$ . Supongamos que existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

## Teorema de la convergencia dominada

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  que converge puntualmente a una función  $f$ . Supongamos que existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \right\} \rightarrow 0$$

## Teorema de la convergencia dominada

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  que converge puntualmente a una función  $f$ . Supongamos que existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \right\} \rightarrow 0$$

En particular,  $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$  y

$$\left\{ \int_{\Omega} f_n d\mu \right\} \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$$

## Teorema de la convergencia dominada

Sea  $\{f_n\}$  una sucesión de funciones medibles de  $\Omega$  en  $\mathbb{K}$  que converge puntualmente a una función  $f$ . Supongamos que existe  $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$  tal que:

$$|f_n(x)| \leq g(x) \quad \forall x \in \Omega, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_{\Omega} |f_n - f| d\mu \right\} \rightarrow 0$$

En particular,  $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$  y

$$\left\{ \int_{\Omega} f_n d\mu \right\} \rightarrow \int_{\Omega} f d\mu$$

Si hubiéramos supuesto que  $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$ , con  $0 < p < \infty$ , hubiéramos obtenido:

$$\left\{ \int_{\Omega} |f_n - f|^p d\mu \right\} \rightarrow 0$$

y en particular  $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$ .

## Corolario muy útil

## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

- Para  $0 \leq p < \infty$ ,  $S(\mu)$  es denso en  $L_p(\mu)$



## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

- Para  $0 \leq p < \infty$ ,  $S(\mu)$  es denso en  $L_p(\mu)$

$p = \infty$ ?

## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

- Para  $0 \leq p < \infty$ ,  $S(\mu)$  es denso en  $L_p(\mu)$

$p = \infty$ ?

Funciones simples:

## Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

- Para  $0 \leq p < \infty$ ,  $S(\mu)$  es denso en  $L_p(\mu)$

$p = \infty$ ?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A} \}$$

## Corolario muy útil

### Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A}, \mu(E) < \infty \} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

- Para  $0 \leq p < \infty$ ,  $S(\mu)$  es denso en  $L_p(\mu)$

$p = \infty$ ?

### Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \text{Lin} \{ \chi_E : E \in \mathcal{A} \}$$

- $\tilde{S}(\mu)$  es denso en  $L_\infty(\mu)$

## Tema 4: Teorema de Fubini

## 1 Producto de medidas

- Producto de espacios medibles
- Medida producto
- Caso de  $\mathbb{R}^n$

## 2 Teorema de Fubini

- Para funciones positivas
- Aplicaciones
- Para funciones integrables

## Producto de $\sigma$ -álgebras

$\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

**Rectángulos medibles:**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$



## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

Rectángulos medibles:  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

$\sigma$ -álgebra producto:  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

Rectángulos medibles:  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

$\sigma$ -álgebra producto:  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

### Ejemplos

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

**Rectángulos medibles:**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

**$\sigma$ -álgebra producto:**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

### Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

**Rectángulos medibles:**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

**$\sigma$ -álgebra producto:**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

### Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

**Rectángulos medibles:**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

**$\sigma$ -álgebra producto:**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

### Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$
- $X$  numerable  $\implies \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$

## Producto de $\sigma$ -álgebras

### $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B})$  espacios medibles

**Rectángulos medibles:**  $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}$

**$\sigma$ -álgebra producto:**  $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma$ -álgebra engendrada por  $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$

### Ejemplos

- $\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k}$
- $\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$ :  $\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$
- $X$  numerable  $\implies \mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(Y) = \mathcal{P}(X \times Y)$
- $\mathcal{P}(X) \otimes \mathcal{P}(X) = \mathcal{P}(X \times X) \implies \text{card } X \leq \text{card } \mathbb{R}$

# Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

Secciones de conjuntos y de funciones

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$



## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- Sección de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$  espacios medibles

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  espacio medible producto

$E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$  espacios medibles

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  espacio medible producto

$E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X, E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$  espacios medibles

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  espacio medible producto

$E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X, E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

**Las secciones de conjuntos medibles son medibles**



## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f : X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x : Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y : X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$  espacios medibles

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  espacio medible producto

$E \subset X \times Y$ ,  $f : X \times Y \rightarrow Z$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X$ ,  $E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

**Las secciones de conjuntos medibles son medibles**

- $f$  medible  $\implies f_x$  medible  $\forall x \in X$ ,  $f^y$  medible  $\forall y \in Y$

## Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

### Secciones de conjuntos y de funciones

$X, Y, Z$  conjuntos,  $E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- **Sección** de  $E$  por un  $x \in X$ :  $E_x = \{y \in Y : (x, y) \in E\}$
- Sección de  $E$  por un  $y \in Y$ :  $E^y = \{x \in X : (x, y) \in E\}$
- **Sección** de  $f$  por un  $x \in X$ :  $f_x: Y \rightarrow Z$ ,  $f_x(y) = f(x, y)$  ( $y \in Y$ )
- Sección de  $f$  por un  $y \in Y$ :  $f^y: X \rightarrow Z$ ,  $f^y(x) = f(x, y)$  ( $x \in X$ )

### Propiedades de la $\sigma$ -álgebra producto

$(X, \mathcal{A}), (Y, \mathcal{B}), (Z, \mathcal{C})$  espacios medibles

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$  espacio medible producto

$E \subset X \times Y$ ,  $f: X \times Y \rightarrow Z$

- $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \implies E_x \in \mathcal{B} \ \forall x \in X$ ,  $E^y \in \mathcal{A} \ \forall y \in Y$

**Las secciones de conjuntos medibles son medibles**

- $f$  medible  $\implies f_x$  medible  $\forall x \in X$ ,  $f^y$  medible  $\forall y \in Y$

**Las funciones medibles son separadamente medibles**

## Producto de medidas

Existencia de medidas producto

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$



## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Existencia y unicidad de la medida producto

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Existencia y unicidad de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Existencia y unicidad de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

Existe una única medida  $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$[\mu \otimes \nu](A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

## Producto de medidas

### Existencia de medidas producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida

Existen medidas  $\varphi : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$\varphi(A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

### Medida $\sigma$ -finita

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita cuando:

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \quad \text{con} \quad A_n \in \mathcal{A}, \mu(A_n) < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

### Existencia y unicidad de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

Existe una única medida  $\mu \otimes \nu : \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando que

$$[\mu \otimes \nu](A \times B) = \mu(A)\nu(B) \quad \forall A \in \mathcal{A}, \forall B \in \mathcal{B}$$

$\mu \otimes \nu$  medida producto,  $(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

## Completación de una medida

Medida completa

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**



## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\overline{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\overline{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \overline{\mathcal{A}})$$

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \bar{\mathcal{A}})$$

- $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \bar{\mathcal{A}})$$

- $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$
- $\bar{\mu}$  está bien definida, es una medida y extiende a  $\mu$

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \bar{\mathcal{A}})$$

- $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$
- $\bar{\mu}$  está bien definida, es una medida y extiende a  $\mu$
- El espacio de medida  $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  es completo

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \bar{\mathcal{A}})$$

- $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$
- $\bar{\mu}$  está bien definida, es una medida y extiende a  $\mu$
- El espacio de medida  $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  es completo
- Si  $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  es un espacio de medida completo,

$$\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \bar{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$$

## Completación de una medida

### Medida completa

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida **completo** cuando:

$$B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0, N \subset B \implies N \in \mathcal{A}$$

Se dice también que la medida  $\mu$  es **completa**

### Completación de una medida

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida (no completo). Definimos:

$$\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup N : A \in \mathcal{A}, N \subset B \in \mathcal{A}, \mu(B) = 0\}$$

$$\bar{\mu}(A \cup N) = \mu(A) \quad (A \cup N \in \bar{\mathcal{A}})$$

- $\bar{\mathcal{A}}$  es una  $\sigma$ -álgebra y  $\mathcal{A} \subset \bar{\mathcal{A}}$
- $\bar{\mu}$  está bien definida, es una medida y extiende a  $\mu$
- El espacio de medida  $(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  es completo
- Si  $(\Omega, \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu})$  es un espacio de medida completo,

$$\mathcal{A} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}|_{\mathcal{A}} = \mu \implies \bar{\mathcal{A}} \subset \tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mu}|_{\bar{\mathcal{A}}} = \bar{\mu}$$

$(\Omega, \bar{\mathcal{A}}, \bar{\mu})$  es la **completación** de  $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ , y  $\bar{\mu}$  la **completación de la medida**  $\mu$



## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

### La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Suponemos:



## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

### La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

### La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

### La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto  $\mu \otimes \nu$  **no es completa**

## Medidas de Lebesgue y de Borel-Lebesgue

### Relación entre ambas medidas

$\mathcal{M}_n$   $\sigma$ -álgebra de los conjuntos medibles-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\lambda_n : \mathcal{M}_n \rightarrow [0, \infty]$  medida de Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$\mathcal{B}_n$   $\sigma$ -álgebra de Borel de  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathcal{B}_n \subset \mathcal{M}_n$

$\beta_n = \lambda_n|_{\mathcal{B}_n}$ , medida de Borel-Lebesgue en  $\mathbb{R}^n$

$(\mathbb{R}^n, \mathcal{M}_n, \lambda_n)$  es la completación del espacio de medida  $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}_n, \beta_n)$ .

La medida de Lebesgue es la completación de la medida de Borel-Lebesgue

### La medida producto no suele ser completa

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita. Suponemos:

- $\exists A \in \mathcal{A} : A \neq \emptyset, \mu(A) = 0$
- $\exists E \subset Y : E \notin \mathcal{B}$

Entonces la medida producto  $\mu \otimes \nu$  **no es completa**

$\lambda_n \otimes \lambda_k$  no es completa

# Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

## Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

## Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

### Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

## Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

### Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

## Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

### Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:



## Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

### Medidas producto en $\mathbb{R}^n$

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ 

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además,  $\lambda_{n+k}$  extiende a  $\lambda_n \otimes \lambda_k$ ,

Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ 

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además,  $\lambda_{n+k}$  extiende a  $\lambda_n \otimes \lambda_k$ , que a su vez extiende a  $\beta_{n+k}$

Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ 

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además,  $\lambda_{n+k}$  extiende a  $\lambda_n \otimes \lambda_k$ , que a su vez extiende a  $\beta_{n+k}$
- De hecho:

Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ Medidas producto en  $\mathbb{R}^n$ 

- La medida de Borel-Lebesgue se comporta bien para productos:

$$\mathcal{B}_n \otimes \mathcal{B}_k = \mathcal{B}_{n+k} \quad \text{y} \quad \beta_n \otimes \beta_k = \beta_{n+k}$$

- Para la de Lebesgue se tiene:

$$\mathcal{B}_{n+k} \subsetneq \mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k \subsetneq \mathcal{M}_{n+k}$$

- Además,  $\lambda_{n+k}$  extiende a  $\lambda_n \otimes \lambda_k$ , que a su vez extiende a  $\beta_{n+k}$
- De hecho:

$$(\mathbb{R}^{n+k}, \mathcal{M}_{n+k}, \lambda_{n+k}) = (\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k, \overline{\mathcal{M}_n \otimes \mathcal{M}_k}, \overline{\lambda_n \otimes \lambda_k})$$

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

Teorema



## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema

Para  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  medible, definimos:

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema

Para  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  medible, definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema

Para  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  medible, definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

Entonces  $\phi$  y  $\psi$  son medibles y se verifica que:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

## Teorema de Fubini para funciones medibles positivas

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema

Para  $f : X \times Y \rightarrow [0, \infty]$  medible, definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in Y$$

Entonces  $\phi$  y  $\psi$  son medibles y se verifica que:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Cálculo de la medida producto

## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Cálculo de la medida producto

Para  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$



## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Cálculo de la medida producto

Para  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces  $\phi, \psi$  son medibles y se tiene

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

## Cálculo de la medida producto

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Cálculo de la medida producto

Para  $E \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , definimos:

$$\phi : X \rightarrow [0, \infty], \quad \phi(x) = \nu(E_x) \quad \forall x \in X$$

$$\psi : Y \rightarrow [0, \infty], \quad \psi(y) = \mu(E^y) \quad \forall y \in Y$$

Entonces  $\phi, \psi$  son medibles y se tiene

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

Con notación más sugerente:

$$[\mu \otimes \nu](E) = \int_X \nu(E_x) d\mu(x) = \int_Y \mu(E^y) d\nu(y)$$

## La integral como medida

### La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita

## La integral como medida

### La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$  medida de Borel-Lebesgue

## La integral como medida

### La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$  medida de Borel-Lebesgue

Para  $f : X \rightarrow [0, \infty[$ , definimos

$$S(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

## La integral como medida

### La integral como medida

$(X, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita

$(\mathbb{R}, \mathcal{B}, \beta)$  medida de Borel-Lebesgue

Para  $f : X \rightarrow [0, \infty[$ , definimos

$$S(f) = \{(x, t) \in X \times \mathbb{R} : 0 < t < f(x)\}$$

Entonces,  $f$  es medible si, y sólo si,  $S(f) \in \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ , en cuyo caso,

$$\int_X f d\mu = [\mu \otimes \beta](S(f))$$

## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto



## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema de Hobson-Tonelli

Para  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  medible, son equivalentes:

## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema de Hobson-Tonelli

Para  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  medible, son equivalentes:

(1)  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$

## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema de Hobson-Tonelli

Para  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  medible, son equivalentes:

(1)  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$

(2)  $\int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty$

## Teorema de Hobson-Tonelli

$(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita

$(X \times Y, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B}, \mu \otimes \nu)$  espacio de medida producto

### Teorema de Hobson-Tonelli

Para  $f : X \times Y \rightarrow \mathbb{K}$  medible, son equivalentes:

- (1)  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$
- (2)  $\int_X \int_Y |f(x, y)| d\nu(y) d\mu(x) < \infty$
- (3)  $\int_Y \int_X |f(x, y)| d\mu(x) d\nu(y) < \infty$

## Teorema de Fubini para funciones integrables

## Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ .

## Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ .

Existen conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \forall x \in A$$

$$\nu(Y \setminus B) = 0, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \forall y \in B$$

## Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ .

Existen conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \forall x \in A$$

$$\nu(Y \setminus B) = 0, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in A, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus A$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in B, \quad \psi(y) = 0 \quad \forall y \in Y \setminus B$$



## Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ .

Existen conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \forall x \in A$$

$$\nu(Y \setminus B) = 0, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in A, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus A$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in B, \quad \psi(y) = 0 \quad \forall y \in Y \setminus B$$

se tiene que  $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ ,  $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$  y

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

## Teorema de Fubini para funciones integrables

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y  $f \in \mathcal{L}_1(\mu \otimes \nu)$ .

Existen conjuntos  $A \in \mathcal{A}$  y  $B \in \mathcal{B}$  tales que:

$$\mu(X \setminus A) = 0, \quad f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \quad \forall x \in A$$

$$\nu(Y \setminus B) = 0, \quad f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \quad \forall y \in B$$

Además, definiendo

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \quad \forall x \in A, \quad \phi(x) = 0 \quad \forall x \in X \setminus A$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \quad \forall y \in B, \quad \psi(y) = 0 \quad \forall y \in Y \setminus B$$

se tiene que  $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ ,  $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$  y

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

Todo ello se resume de nuevo en la expresión:

$$\int_{X \times Y} f d(\mu \otimes \nu) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

Para  $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu \otimes \nu})$ , se tiene:

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu), (Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

Para  $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu \otimes \nu})$ , se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

Para  $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu \otimes \nu})$ , se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones  $\phi$  y  $\psi$  definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

Para  $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu \otimes \nu})$ , se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones  $\phi$  y  $\psi$  definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que  $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ ,  $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$  y

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \otimes \nu}) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$



## Teorema de Fubini para la completación de la medida producto

Sean  $(X, \mathcal{A}, \mu)$ ,  $(Y, \mathcal{B}, \nu)$  espacios de medida  $\sigma$ -finita y completa.

Para  $f \in \mathcal{L}_1(\overline{\mu \otimes \nu})$ , se tiene:

$$f_x \in \mathcal{L}_1(\nu) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$f^y \in \mathcal{L}_1(\mu) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

Además, las funciones  $\phi$  y  $\psi$  definidas c.p.d. mediante:

$$\phi(x) = \int_Y f_x d\nu = \int_Y f(x, y) d\nu(y) \text{ para } [\mu]\text{-casi todo } x \in X$$

$$\psi(y) = \int_X f^y d\mu = \int_X f(x, y) d\mu(x) \text{ para } [\nu]\text{-casi todo } y \in Y$$

verifican que  $\phi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ ,  $\psi \in \mathcal{L}_1(\nu)$  y

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \otimes \nu}) = \int_X \phi d\mu = \int_Y \psi d\nu$$

Podemos de nuevo escribir:

$$\int_{X \times Y} f d(\overline{\mu \otimes \nu}) = \int_X \int_Y f(x, y) d\nu(y) d\mu(x) = \int_Y \int_X f(x, y) d\mu(x) d\nu(y)$$

## Tema 5: Teorema de Radon-Nikodým

- 1 TRN para medidas positivas
- 2 Medidas reales o complejas
- 3 TRN para medidas reales o complejas



## Integral indefinida de una función medible positiva

## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

Integral indefinida de  $f$ :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

Integral indefinida de  $f$ :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\lambda$$

## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

Integral indefinida de  $f$ :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f d\lambda$$



## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

Integral indefinida de  $f$ :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f d\lambda$$

Relación entre  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$$

## Integral indefinida de una función medible positiva

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible

Integral indefinida de  $f$ :

$$\varphi : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty], \quad \varphi(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\varphi$  es una medida y, para  $g : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  medible,

$$\int_{\Omega} g d\varphi = \int_{\Omega} g f d\lambda$$

Escribimos:

$$d\varphi = f d\lambda$$

Relación entre  $\lambda$  y  $\mu$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \varphi(E) = 0$$

Decimos que  $\varphi$  es **absolutamente continua** con respecto a  $\lambda$ :  $\varphi \ll \lambda$

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$       ¿Es suficiente?

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$       ¿Es suficiente?

En general **NO**:  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  conjuntos medibles Lebesgue,  $\lambda$  número de elementos,  $\mu$  medida de Lebesgue

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$       ¿Es suficiente?

En general **NO**:  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  conjuntos medibles Lebesgue,  $\lambda$  número de elementos,  $\mu$  medida de Lebesgue

## Teorema de Radon-Nikodým para medidas positivas



## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$       ¿Es suficiente?

En general **NO**:  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  conjuntos medibles Lebesgue,  $\lambda$  número de elementos,  $\mu$  medida de Lebesgue

## Teorema de Radon-Nikodým para medidas positivas

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  una medida **absolutamente continua** con respecto a  $\lambda$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

## La pregunta natural

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  otra medida

¿Existe una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ ?

Condición obviamente necesaria:  $\mu \ll \lambda$       ¿Es suficiente?

En general **NO**:  $\Omega = \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{A}$  conjuntos medibles Lebesgue,  $\lambda$  número de elementos,  $\mu$  medida de Lebesgue

## Teorema de Radon-Nikodým para medidas positivas

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  una medida **absolutamente continua** con respecto a  $\lambda$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces **existe** una función medible  $f : \Omega \rightarrow [0, \infty]$  tal que  $d\mu = f d\lambda$ :

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

## Integral indefinida de una función integrable

## Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ .

## Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ . **Integral indefinida** de  $f$ :

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

## Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ . **Integral indefinida** de  $f$ :

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\mu$  es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

## Integral indefinida de una función integrable

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ . **Integral indefinida** de  $f$ :

$$\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}, \quad \mu(E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

$\mu$  es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

$\mu$  es combinación lineal de medidas (positivas):

$$\mu(E) = \int_E (\operatorname{Re} f)^+ d\lambda - \int_E (\operatorname{Re} f)^- d\lambda + i \int_E (\operatorname{Im} f)^+ d\lambda - i \int_E (\operatorname{Im} f)^- d\lambda$$

## Medidas reales o complejas



## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \implies \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \quad \implies \quad \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones:  $\mu(\emptyset) = 0$  y, más importante,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu: \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones:  $\mu(\emptyset) = 0$  y, más importante,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación:  $M(\mathcal{A})$  medidas reales o complejas definidas en  $\mathcal{A}$ , espacio vectorial.

$M^+(\mathcal{A})$  medidas positivas y **finitas**

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones:  $\mu(\emptyset) = 0$  y, más importante,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación:  $M(\mathcal{A})$  medidas reales o complejas definidas en  $\mathcal{A}$ , espacio vectorial.

$M^+(\mathcal{A})$  medidas positivas y finitas

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  espacio vectorial ordenado:  $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones:  $\mu(\emptyset) = 0$  y, más importante,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación:  $M(\mathcal{A})$  medidas reales o complejas definidas en  $\mathcal{A}$ , espacio vectorial.

$M^+(\mathcal{A})$  medidas positivas y **finitas**

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  espacio vectorial ordenado:  $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  un retículo vectorial?

## Medidas reales o complejas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible

**Medida real o compleja:** aplicación  $\mu : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{K}$  que es  $\sigma$ -aditiva:

$$A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, \quad A_n \cap A_m = \emptyset \quad (n \neq m) \implies \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

Observaciones:  $\mu(\emptyset) = 0$  y, más importante,  $\sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| < \infty$

Notación:  $M(\mathcal{A})$  medidas reales o complejas definidas en  $\mathcal{A}$ , espacio vectorial.

$M^+(\mathcal{A})$  medidas positivas y **finitas**

$$M^+(\mathcal{A}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \subseteq M(\mathcal{A}, \mathbb{C}) = M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \oplus i M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$$

$M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  espacio vectorial ordenado:  $\mu_1 \leq \mu_2 \Leftrightarrow \mu_2 - \mu_1 \in M^+(\mathcal{A})$

¿Es  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  un retículo vectorial?

¿Podemos definir coherentemente el valor absoluto de una medida real o incluso el módulo de una medida compleja?

## Variación de una medida compleja



## Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$  medida real o compleja.

## Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$  medida real o compleja. Para  $E \in \mathcal{A}$  escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \right\}$$

## Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$  medida real o compleja. Para  $E \in \mathcal{A}$  escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

## Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$  medida real o compleja. Para  $E \in \mathcal{A}$  escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es la **variación** de la medida  $\mu$

## Variación de una medida compleja

$\mu \in M(\mathcal{A})$  medida real o compleja. Para  $E \in \mathcal{A}$  escribimos:

$$\Pi(E) = \left\{ \{A_n\} : E = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n, A_n \in \mathcal{A} \forall n \in \mathbb{N}, A_n \cap A_m = \emptyset (n \neq m) \right\}$$

Entonces:

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(A_n)| : \{A_n\} \in \Pi(E) \right\} \quad (E \in \mathcal{A})$$

$|\mu| : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  es la **variación** de la medida  $\mu$

## Teorema (la propiedad clave de la variación)

La variación de una medida real o compleja es una medida positiva y **finita**:

$$\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$$

## Propiedades de retículo

## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \quad \implies \quad |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$



## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $|\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$

## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $|\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|); \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $|\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|); \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- **Descomposición de Jordan** de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \implies \begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

## Propiedades de retículo

- Si  $\mu \in M(\mathcal{A})$  y  $\nu : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  medida positiva,

$$|\mu(E)| \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A} \implies |\mu|(E) \leq \nu(E) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

- Equivalentemente, caso  $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ :  $|\mu| = \sup\{\operatorname{Re}(e^{i\theta}\mu) : \theta \in \mathbb{R}\}$
- Caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ :  $|\mu| = \sup\{\mu, -\mu\}$
- $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$  es un retículo vectorial:

$$\mu \vee \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu + |\mu - \nu|); \quad \mu \wedge \nu = \frac{1}{2}(\mu + \nu - |\mu - \nu|)$$

- **Descomposición de Jordan** de una medida real:

$$\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R}) \implies \begin{cases} \mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu) = \mu \vee 0 \\ \mu^- = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu) = -(\mu \wedge 0) \end{cases}$$

Propiedades:

$$\mu^+, \mu^- \in M^+(\mathcal{A}), \quad \mu = \mu^+ - \mu^-, \quad |\mu| = \mu^+ + \mu^-$$

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 \quad \text{con} \quad \mu_1, \mu_2 \in M^+(\mathcal{A}) \implies \mu^+ \leq \mu_1, \quad \mu^- \leq \mu_2$$

## Norma de una medida

## Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

se obtiene una norma en  $M(\mathcal{A})$ , “Variación total”

## Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

se obtiene una norma en  $M(\mathcal{A})$ , “Variación total”

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_{\infty} = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

## Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

se obtiene una norma en  $M(\mathcal{A})$ , “Variación total”

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leq \|\mu\| \leq 4\|\mu\|_\infty \quad (\lambda \in M(\mathcal{A}))$$



## Norma de una medida

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible. Definiendo

$$\|\mu\| = |\mu|(\Omega), \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

se obtiene una norma en  $M(\mathcal{A})$ , “Variación total”

Otra norma natural:

$$\|\mu\|_\infty = \sup\{|\mu(E)| : E \in \mathcal{A}\} \quad (\mu \in M(\mathcal{A}))$$

Ambas normas son equivalentes

$$\|\mu\|_\infty \leq \|\mu\| \leq 4\|\mu\|_\infty \quad (\lambda \in M(\mathcal{A}))$$

Y ambas son completas.  $M(\mathcal{A})$  **espacio de Banach** con la norma de la variación total

## Continuidad absoluta

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{A}, \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{A}, \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación:  $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{A}, \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación:  $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

## Teorema de Radon-Nikodým

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{A}, \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación:  $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

## Teorema de Radon-Nikodým

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu \in M(\mathcal{A})$  una medida **absolutamente continua** con respecto a  $\lambda$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

## Continuidad absoluta

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .  $\mu \ll \lambda$  cuando:

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Equivalentemente:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : E \in \mathcal{A}, \lambda(E) < \delta \implies |\mu(E)| < \varepsilon$$

Observación:  $\mu \ll \lambda \iff |\mu| \ll \lambda$

## Teorema de Radon-Nikodým

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu \in M(\mathcal{A})$  una medida **absolutamente continua** con respecto a  $\lambda$ :

$$E \in \mathcal{A}, \lambda(E) = 0 \implies \mu(E) = 0$$

Entonces **existe** una **única**  $f \in L_1(\lambda)$  tal que  $\mu$  es la integral indefinida de  $f$ , es decir,

$$\mu(E) = \int_E f d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$$



## Unicidad

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ . Existe  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ . Existe  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$h$  está determinada  $|\mu|$ -c.p.d. “Descomposición polar”

## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ . Existe  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$h$  está determinada  $|\mu|$ -c.p.d. “Descomposición polar”

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f d\mu = \int_E f h d|\mu| \quad (f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A})$$



## Unicidad

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida  $\sigma$ -finita,  $f \in \mathcal{L}_1(\lambda)$ ,

$$R(f) = \left\{ \frac{1}{\lambda(E)} \int_E f d\lambda : E \in \mathcal{A}, 0 < \lambda(E) < \infty \right\}$$

Entonces  $\lambda(\{x \in \Omega : f(x) \notin \overline{R(f)}\}) = 0$  ( $f(x) \in \overline{R(f)}$  p.c.t.  $x \in \Omega$ )

## Descomposición polar

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A})$ . Existe  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que

$$|h(x)| = 1 \quad \forall x \in \Omega \quad \text{y} \quad \mu(E) = \int_E h d|\mu| \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

$h$  está determinada  $|\mu|$ -c.p.d. “Descomposición polar”

Integral asociada a una medida real o compleja:

$$\int_E f d\mu = \int_E f h d|\mu| \quad (f \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A})$$

Simbólicamente:  $d\mu = h d|\mu|$

## Descomposición de Hahn de una medida real

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real).

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

- $\Omega = A^+ \cup A^-$ ,  $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \Rightarrow \mu(E) \geq 0 \\ E \subseteq A^- \Rightarrow \mu(E) \leq 0 \end{cases}$$

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

- $\Omega = A^+ \cup A^-$ ,  $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \Rightarrow \mu(E) \geq 0 \\ E \subseteq A^- \Rightarrow \mu(E) \leq 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

- $\Omega = A^+ \cup A^-$ ,  $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \Rightarrow \mu(E) \geq 0 \\ E \subseteq A^- \Rightarrow \mu(E) \leq 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$



## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

- $\Omega = A^+ \cup A^-$ ,  $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \Rightarrow \mu(E) \geq 0 \\ E \subseteq A^- \Rightarrow \mu(E) \leq 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$ ,  $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$

## Descomposición de Hahn de una medida real

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu \in M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , descomposición polar  $d\mu = h d|\mu|$   
 $h(x) \in \{-1, 1\} \forall x \in \Omega$ , (**signo** de una medida real). Definimos:

$$A^+ = \{x \in \Omega : h(x) = 1\}; \quad A^- = \{x \in \Omega : h(x) = -1\}$$

El par  $(A^+, A^-)$  es una **descomposición de Hahn** de la medida real  $\mu$

- $\Omega = A^+ \cup A^-$ ,  $A^+ \cap A^- = \emptyset$ ,

$$E \in \mathcal{A} \quad \begin{cases} E \subseteq A^+ \Rightarrow \mu(E) \geq 0 \\ E \subseteq A^- \Rightarrow \mu(E) \leq 0 \end{cases}$$

- $\mu(E) = |\mu|(E \cap A^+) - |\mu|(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $|\mu|(E) = \mu(E \cap A^+) - \mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- $\mu^+(E) = \mu(E \cap A^+)$ ,  $\mu^-(E) = -\mu(E \cap A^-) \quad (E \in \mathcal{A})$
- **Unicidad:** si  $(B^+, B^-)$  es otra descomposición de Hahn,

$$|\mu|[(A^+ \setminus B^+) \cup (B^+ \setminus A^+)] = |\mu|[(A^- \setminus B^-) \cup (B^- \setminus A^-)] = 0$$

## Revisión de la integral indefinida

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando  $h : \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que  $|h(x)| = 1$  y  $f(x) = h(x)|f(x)|$  para casi todo  $x \in \Omega$ , se tiene  $d\mu = h d|\mu|$



## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que  $|h(x)| = 1$  y  $f(x) = h(x)|f(x)|$  para casi todo  $x \in \Omega$ , se tiene  $d\mu = h d|\mu|$
- Integral asociada a  $\mu$ :

$$\int_E g d\mu = \int_E g f d\lambda \quad (g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A})$$

De hecho,  $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$

## Revisión de la integral indefinida

$(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  espacio de medida,  $f \in L_1(\lambda)$ ,  $\mu(E) = \int_E f d\lambda$  ( $E \in \mathcal{A}$ )

- $\mu \in M(\mathcal{A})$ ,  $\mu \ll \lambda$
- $|\mu|(E) = \int_E |f| d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A}$
- $\|\mu\| = |\mu|(\Omega) = \|f\|_1$
- Descomposición polar: tomando  $h: \Omega \rightarrow \mathbb{K}$  medible, tal que  $|h(x)| = 1$  y  $f(x) = h(x)|f(x)|$  para casi todo  $x \in \Omega$ , se tiene  $d\mu = h d|\mu|$
- Integral asociada a  $\mu$ :

$$\int_E g d\mu = \int_E g f d\lambda \quad (g \in L_1(|\mu|), E \in \mathcal{A})$$

De hecho,  $L_1(|\mu|) = \{g \in L_0(\mu) : gf \in L_1(\lambda)\}$

- Si  $f \in L_1(\mu, \mathbb{R})$ :

$$\begin{cases} \text{Jordan: } \mu^+(E) = \int_E f^+ d\lambda, & \mu^-(E) = \int_E f^- d\lambda \quad \forall E \in \mathcal{A} \\ \text{Hahn: } A^+ = \{x \in \Omega : f(x) \geq 0\}, & A^- = \{x \in \Omega : f(x) < 0\} \end{cases}$$

## Ortogonalidad de medidas

## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geq 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geq 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales (o **mutuamente singulares**) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geq 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales (o **mutuamente singulares**) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

## Descomposición de Lebesgue

## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geq 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales (o **mutuamente singulares**) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

## Descomposición de Lebesgue

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu \in M(\mathcal{A})$ .



## Ortogonalidad de medidas

$(\Omega, \mathcal{A})$  espacio medible,  $\mu$  medida en  $\mathcal{A}$  (positiva, real o compleja),  $A \in \mathcal{A}$ :

$$\mu \text{ concentrada en } A \iff \mu(E) = \mu(E \cap A) \quad \forall E \in \mathcal{A}$$

Equivalentemente:

$$\begin{cases} \mu(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \geq 0 \\ |\mu|(\Omega \setminus A) = 0 & \text{si } \mu \in M(\mathcal{A}) \end{cases}$$

$\mu_1$  y  $\mu_2$  son ortogonales (o **mutuamente singulares**) cuando están concentradas en conjuntos disjuntos:

$$\mu_1 \perp \mu_2 \iff \exists A_1, A_2 \in \mathcal{A} : A_1 \cap A_2 = \emptyset, \mu_k \text{ concentrada en } A_k, k = 1, 2$$

## Descomposición de Lebesgue

Sea  $(\Omega, \mathcal{A}, \lambda)$  un espacio de medida  $\sigma$ -finita y  $\mu \in M(\mathcal{A})$ . Entonces  $\mu$  admite una única descomposición de la forma  $\mu = \mu_a + \mu_s$  donde  $\mu_a \ll \lambda$  y  $\mu_s \perp \lambda$

## Resumen

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \forall E \in \mathcal{A}\}$

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$
- (2)  $M(\mathcal{A})$  es un **espacio de Banach** con la norma de la variación total:  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$  ( $\mu \in M(\mathcal{A})$ ). La convergencia es la uniforme en  $\mathcal{A}$

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$
- (2)  $M(\mathcal{A})$  es un **espacio de Banach** con la norma de la variación total:  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$  ( $\mu \in M(\mathcal{A})$ ). La convergencia es la uniforme en  $\mathcal{A}$
- (3)  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , con el orden natural, es también un **retículo vectorial**

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$
- (2)  $M(\mathcal{A})$  es un **espacio de Banach** con la norma de la variación total:  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$  ( $\mu \in M(\mathcal{A})$ ). La convergencia es la uniforme en  $\mathcal{A}$
- (3)  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , con el orden natural, es también un **retículo vectorial**

Fijada ahora una medida  $\sigma$ -finita  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  consideramos dos subespacios de  $M(\mathcal{A})$ :  $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$  y  $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$
- (2)  $M(\mathcal{A})$  es un **espacio de Banach** con la norma de la variación total:  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$  ( $\mu \in M(\mathcal{A})$ ). La convergencia es la uniforme en  $\mathcal{A}$
- (3)  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , con el orden natural, es también un **retículo vectorial**

Fijada ahora una medida  $\sigma$ -finita  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  consideramos dos subespacios de  $M(\mathcal{A})$ :  $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$  y  $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

- (4) Se verifica que  $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$ , suma topológico-directa, ya que  $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$  para cualesquiera  $\mu \in M_a(\lambda)$  y  $\nu \in M_s(\lambda)$



## Resumen

Sea  $(\Omega, \mathcal{A})$  un espacio medible,  $M(\mathcal{A})$  el espacio vectorial de las medidas reales o complejas en  $\mathcal{A}$  y  $M^+(\mathcal{A}) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu(E) \geq 0 \ \forall E \in \mathcal{A}\}$

- (1) La **variación** de una medida real o compleja es una medida positiva y finita:  $\mu \in M(\mathcal{A}) \implies |\mu| \in M^+(\mathcal{A})$
- (2)  $M(\mathcal{A})$  es un **espacio de Banach** con la norma de la variación total:  $\|\mu\| = |\mu|(\Omega)$  ( $\mu \in M(\mathcal{A})$ ). La convergencia es la uniforme en  $\mathcal{A}$
- (3)  $M(\mathcal{A}, \mathbb{R})$ , con el orden natural, es también un **retículo vectorial**

Fijada ahora una medida  $\sigma$ -finita  $\lambda : \mathcal{A} \rightarrow [0, \infty]$  consideramos dos subespacios de  $M(\mathcal{A})$ :  $M_a(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \ll \lambda\}$  y  $M_s(\lambda) = \{\mu \in M(\mathcal{A}) : \mu \perp \lambda\}$

- (4) Se verifica que  $M(\mathcal{A}) = M_a(\lambda) \oplus M_s(\lambda)$ , suma topológico-directa, ya que  $\|\mu + \nu\| = \|\mu\| + \|\nu\|$  para cualesquiera  $\mu \in M_a(\lambda)$  y  $\nu \in M_s(\lambda)$
- (5) Para  $f \in L_1(\lambda)$  sea  $T(f)$  su integral indefinida:

$$[T(f)](E) = \int_E f d\lambda \quad (E \in \mathcal{A})$$

Entonces  $T$  es una biyección lineal isométrica de  $L_1(\lambda)$  **sobre**  $M_a(\lambda)$ . En el caso  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $T$  es también un isomorfismo de retículos

## Tema 6: Teorema de Representación de Riesz

1 Funcionales lineales positivos

2 Regularidad de medidas de Borel

3 Funcionales lineales continuos

## Funciones continuas de soporte compacto

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas



## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

## Funcionales lineales positivos

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

## Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

## Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  **funcional lineal positivo**:

$$f \in C_{00}(L), f \geq 0 \implies \Phi_\mu(f) \geq 0$$



## Funciones continuas de soporte compacto

$L$  espacio topológico de Hausdorff, **localmente compacto**

$C_{00}(L)$ : funciones de  $L$  en  $\mathbb{K}$ , continuas, de **soporte compacto**

$$\text{sop } f = \overline{\{t \in L : f(t) \neq 0\}}$$

## Medidas de Borel localmente finitas

$\mathcal{B}$ :  $\sigma$ -álgebra de Borel de  $L$

Las funciones continuas de  $L$  en  $\mathbb{K}$  son medibles

$\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel **finita en compactos**:

$$K \subseteq L, \quad K \text{ compacto} \implies \mu(K) < \infty$$

Equivalentemente,  $\mu$  es **localmente finita**

$$C_{00}(L) \subset \mathcal{L}_1(\mu)$$

## Funcionales lineales positivos

$$\Phi_\mu(f) = \int_L f d\mu \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_\mu : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  **funcional lineal positivo**:

$$f \in C_{00}(L), \quad f \geq 0 \implies \Phi_\mu(f) \geq 0$$

¡El recíproco también es cierto!: Todo funcional lineal positivo es una integral

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

Entonces **existe** una **única** medida de Borel  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

Entonces **existe** una **única** medida de Borel  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

$$(1) \quad \mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L \} \quad (E \in \mathcal{B})$$

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

Entonces **existe** una **única** medida de Borel  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

- (1)  $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L \} \quad (E \in \mathcal{B})$
- (2)  $\mu(U) = \sup \{ \mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq U \} \quad (U \subseteq L, U \text{ abierto})$

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

Entonces **existe** una **única** medida de Borel  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

- (1)  $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L \}$  ( $E \in \mathcal{B}$ )
- (2)  $\mu(U) = \sup \{ \mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq U \}$  ( $U \subseteq L, U$  abierto)
- (3)  $\mu$  es localmente finita

# Teorema de representación de Riesz para funcionales lineales positivos

## Teorema

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto y  $\Phi : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  un funcional lineal positivo:

$$f \in C_{00}(L), f(t) \geq 0 \quad \forall t \in L \implies \Phi(f) \geq 0$$

Entonces **existe** una **única** medida de Borel  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  verificando:

- (1)  $\mu(E) = \inf \{ \mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L \}$  ( $E \in \mathcal{B}$ )
- (2)  $\mu(U) = \sup \{ \mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq U \}$  ( $U \subseteq L, U$  abierto)
- (3)  $\mu$  es localmente finita

- (4)  $\Phi(f) = \int_L f d\mu$  ( $f \in C_{00}(L)$ )



## Medidas de Borel regulares

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  regular exterior para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella



## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto, } E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto, } K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

## Algunas observaciones

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

## Algunas observaciones

- Si  $\mu$  es una medida de Radon, todo conjunto de Borel  $E \in \mathcal{B}$  que verifique  $\mu(E) < \infty$  es regular interior para  $\mu$ .

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

## Algunas observaciones

- Si  $\mu$  es una medida de Radon, todo conjunto de Borel  $E \in \mathcal{B}$  que verifique  $\mu(E) < \infty$  es regular interior para  $\mu$ . Por tanto, toda medida de Radon finita es regular

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

## Algunas observaciones

- Si  $\mu$  es una medida de Radon, todo conjunto de Borel  $E \in \mathcal{B}$  que verifique  $\mu(E) < \infty$  es regular interior para  $\mu$ . Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si  $X$  es  $\sigma$ -compacto, toda medida de Borel positiva en  $X$ , regular exterior y localmente finita es regular

## Medidas de Borel regulares

$X$  Hausdorff,  $\mathcal{B}$   $\sigma$ -álgebra de Borel,  $\mu : \mathcal{B} \rightarrow [0, \infty]$  medida de Borel,  $E \in \mathcal{B}$ ,

- $E$  **regular exterior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \inf\{\mu(U) : U \text{ abierto}, E \subseteq U \subseteq L\}$
- $E$  **regular interior** para  $\mu$ :  $\mu(E) = \sup\{\mu(K) : K \text{ compacto}, K \subseteq E\}$
- $\mu$  **regular exterior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular exterior para  $\mu$
- $\mu$  **regular interior**: todo  $E \in \mathcal{B}$  es regular interior para  $\mu$
- **regular** = regular exterior e interior
- **Medida de Radon**: medida de Borel positiva, localmente finita, regular exterior y tal que todo conjunto abierto es regular interior para ella

## Algunas observaciones

- Si  $\mu$  es una medida de Radon, todo conjunto de Borel  $E \in \mathcal{B}$  que verifique  $\mu(E) < \infty$  es regular interior para  $\mu$ . Por tanto, toda medida de Radon finita es regular
- Si  $X$  es  $\sigma$ -compacto, toda medida de Borel positiva en  $X$ , regular exterior y localmente finita es regular
- Si  $X$  es localmente compacto y todo abierto de  $X$  es unión numerable de compactos, entonces toda medida de Borel positiva y localmente finita en  $X$  es regular

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

TRR, caso general

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ .

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única **medida de Radon**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$



## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única **medida de Radon**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

### TRR, caso $\sigma$ -compacto

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única **medida de Radon**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

### TRR, caso $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y  **$\sigma$ -compacto**, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ .

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única **medida de Radon**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

### TRR, caso $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y  **$\sigma$ -compacto**, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $L$ , **regular exterior y localmente finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

## Distintas versiones del Teorema de Riesz

### TRR, caso general

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única **medida de Radon**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

### TRR, caso $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y  **$\sigma$ -compacto**, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $L$ , **regular exterior y localmente finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho,  $\mu$  es **regular**

## TRR, caso compacto

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico compacto de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ .

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**



## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**

## Teorema de representación de Riesz, caso localmente $\sigma$ -compacto

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**

## Teorema de representación de Riesz, caso localmente $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de  $L$  puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ .

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**

## Teorema de representación de Riesz, caso localmente $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de  $L$  puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única medida de Borel **localmente finita**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

## TRR, caso compacto

Sea  $K$  un espacio topológico **compacto** de Hausdorff y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C(K)$ . Entonces existe una única medida de Borel  $\mu$  en  $K$ , **regular exterior y finita**, que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**

## Teorema de representación de Riesz, caso localmente $\sigma$ -compacto

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto y tal que todo subconjunto abierto de  $L$  puede obtenerse como unión numerable de compactos, y sea  $\Phi$  un funcional lineal positivo en  $C_{00}(L)$ . Entonces existe una única medida de Borel **localmente finita**  $\mu$  en  $L$  que verifica

$$\int_K f d\mu = \Phi(f) \quad (f \in C_{00}(L))$$

De hecho  $\mu$  es **regular**

## Consecuencias de la regularidad

### Teorema de Lusin

## Consecuencias de la regularidad

### Teorema de Lusin

Sea  $\mu$  una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto  $L$  y sea  $f : L \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq 0\}) < \infty$$

## Consecuencias de la regularidad

### Teorema de Lusin

Sea  $\mu$  una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto  $L$  y sea  $f : L \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq 0\}) < \infty$$

Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  puede encontrarse  $g \in C_{00}(L)$  verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq g(t)\}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_{\infty} \leq \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

## Consecuencias de la regularidad

### Teorema de Lusin

Sea  $\mu$  una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto  $L$  y sea  $f : L \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq 0\}) < \infty$$

Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  puede encontrarse  $g \in C_{00}(L)$  verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq g(t)\}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_{\infty} \leq \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

### Corolario importante



## Consecuencias de la regularidad

### Teorema de Lusin

Sea  $\mu$  una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto  $L$  y sea  $f : L \rightarrow \mathbb{K}$  una función medible verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq 0\}) < \infty$$

Entonces, para cada  $\varepsilon > 0$  puede encontrarse  $g \in C_{00}(L)$  verificando:

$$\mu(\{t \in L : f(t) \neq g(t)\}) < \varepsilon \quad \text{y} \quad \|g\|_{\infty} \leq \sup\{|f(t)| : t \in L\}$$

### Corolario importante

Si  $\mu$  es una medida de Radon en un espacio topológico de Hausdorff localmente compacto  $L$ , entonces  $C_{00}(L)$  es **denso** en  $L_p(\mu)$  para  $0 < p < \infty$

## Motivación

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \implies \exists K, U : \begin{cases} K \text{ compacto, } U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \implies \exists K, U : \begin{cases} K \text{ compacto, } U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \implies \exists K, U : \begin{cases} K \text{ compacto, } U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de  $M(\mathcal{B})$ , luego **espacio de Banach** con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \quad (\lambda \in M(L))$$

## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,

$C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \implies \exists K, U : \begin{cases} K \text{ compacto, } U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de  $M(\mathcal{B})$ , luego **espacio de Banach** con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \quad (\lambda \in M(L))$$

$\lambda \in M(L) \implies C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|)$  y podemos definir  $\Phi_{\lambda} : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$\Phi_{\lambda}(f) = \int_L f d\lambda \quad (f \in C_{00}(L))$$



## Motivación

$L$  espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto,  
 $C_{00}(L)$  espacio normado con

$$\|f\|_{\infty} = \text{máx} \{|f(t)| : t \in L\} \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\lambda \in M(\mathcal{B})$  medida de Borel real o compleja

$\lambda$  será **regular** cuando lo sea su variación:

$$E \in \mathcal{B}, \varepsilon > 0 \implies \exists K, U : \begin{cases} K \text{ compacto, } U \text{ abierto} \\ K \subseteq E \subseteq U \subseteq L \text{ y } |\mu|(U \setminus K) < \varepsilon \end{cases}$$

Medidas de Borel reales o complejas regulares:

$$M(L) = \{\lambda \in M(\mathcal{B}) : \lambda \text{ regular}\}$$

Subespacio cerrado de  $M(\mathcal{B})$ , luego **espacio de Banach** con la norma

$$\|\lambda\| = |\lambda|(L) \quad (\lambda \in M(L))$$

$\lambda \in M(L) \implies C_{00}(L) \subseteq \mathcal{L}_1(|\lambda|)$  y podemos definir  $\Phi_{\lambda} : C_{00}(L) \rightarrow \mathbb{K}$  por

$$\Phi_{\lambda}(f) = \int_L f d\lambda \quad (f \in C_{00}(L))$$

$\Phi_{\lambda}$  es lineal, puede no ser positivo, pero es **continuo**:  $\Phi_{\lambda} \in C_{00}(L)^*$

# Operadores lineales continuos

Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo

# Operadores lineales continuos

## Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$

# Operadores lineales continuos

## Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

$X, Y$  espacios normados,

$L(X, Y)$  espacio vectorial de los operadores lineales continuos de  $X$  en  $Y$ .



## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

$X, Y$  espacios normados,

$L(X, Y)$  espacio vectorial de los operadores lineales continuos de  $X$  en  $Y$ .

$$\begin{aligned}\|T\| &= \min\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}\end{aligned}$$

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

$X, Y$  espacios normados,

$L(X, Y)$  espacio vectorial de los operadores lineales continuos de  $X$  en  $Y$ .

$$\begin{aligned}\|T\| &= \min\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}\end{aligned}$$

**Norma de operadores.**  $L(X, Y)$  espacio normado, **espacio de operadores**

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

$X, Y$  espacios normados,

$L(X, Y)$  espacio vectorial de los operadores lineales continuos de  $X$  en  $Y$ .

$$\begin{aligned}\|T\| &= \min\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}\end{aligned}$$

**Norma de operadores.**  $L(X, Y)$  espacio normado, **espacio de operadores**

Convergencia en  $L(X, Y)$  = Convergencia uniforme en  $B_X$

## Operadores lineales continuos

### Continuidad de operadores lineales entre espacios normados

$X, Y$  espacios normados,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- (1)  $T$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $T$  está acotado en  $B_X$

### Norma de operadores

$X, Y$  espacios normados,

$L(X, Y)$  espacio vectorial de los operadores lineales continuos de  $X$  en  $Y$ .

$$\begin{aligned}\|T\| &= \min\{M \geq 0 : \|Tx\| \leq M\|x\|, \forall x \in X\} = \sup\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|} : x \neq 0\right\} \\ &= \sup\{\|Tu\| : \|u\| = 1\} = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\}\end{aligned}$$

**Norma de operadores.**  $L(X, Y)$  espacio normado, **espacio de operadores**

Convergencia en  $L(X, Y) =$  Convergencia uniforme en  $B_X$

$Y$  completo  $\implies L(X, Y)$  completo

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$



## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

### Norma dual

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

### Norma dual

$X$  espacio normado,  $X^*$  funcionales lineales continuos en  $X$ , espacio de Banach.

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

### Norma dual

$X$  espacio normado,  $X^*$  funcionales lineales continuos en  $X$ , espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

### Norma dual

$X$  espacio normado,  $X^*$  funcionales lineales continuos en  $X$ , espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

**Norma dual.**  $X^*$  espacio dual de  $X$

## Dual de un espacio normado

### Continuidad de funcionales lineales en espacios normados

$X$  espacio normado,  $B_X = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ ,  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal. Equivalen:

- (1)  $f$  es continuo
- (2)  $\exists M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X$
- (3)  $f$  está acotado en  $B_X$
- (4)  $\ker f$  es cerrado en  $X$

### Norma dual

$X$  espacio normado,  $X^*$  funcionales lineales continuos en  $X$ , espacio de Banach.

$$\|f\| = \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M \|x\|, \forall x \in X\} = \sup\{|f(x)| : x \in B_X\}$$

**Norma dual.**  $X^*$  **espacio dual** de  $X$

Para espacios  $X$  concretos, es útil tener descripciones concretas de  $X^*$

## Teorema de representación de Riesz



## Teorema de representación de Riesz

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \cong M(L)$$

## Teorema de representación de Riesz

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \cong M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico  $\Psi$  de  $M(L)$  sobre  $C_{00}(L)^*$  viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f d\lambda \quad (f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L))$$

## Teorema de representación de Riesz

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \cong M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico  $\Psi$  de  $M(L)$  sobre  $C_{00}(L)^*$  viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f d\lambda \quad (f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L))$$

## Caso compacto

## Teorema de representación de Riesz

Sea  $L$  un espacio topológico de Hausdorff, localmente compacto. Entonces,

$$C_{00}(L)^* \cong M(L)$$

Más concretamente, un isomorfismo isométrico  $\Psi$  de  $M(L)$  sobre  $C_{00}(L)^*$  viene dado por:

$$[\Psi(\lambda)](f) = \int_L f d\lambda \quad (f \in C_{00}(L), \lambda \in M(L))$$

## Caso compacto

$$C(K)^* \cong M(K)$$

## Ejemplo

## Ejemplo

Fijada  $g \in L_1[0, 1]$ , para  $f \in C[0, 1]$  se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

## Ejemplo

Fijada  $g \in L_1[0, 1]$ , para  $f \in C[0, 1]$  se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Es claro que  $\varphi \in C[0, 1]^*$ .

## Ejemplo

Fijada  $g \in L_1[0, 1]$ , para  $f \in C[0, 1]$  se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Es claro que  $\varphi \in C[0, 1]^*$ . De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)| dt = \|g\|_1$$



## Ejemplo

Fijada  $g \in L_1[0, 1]$ , para  $f \in C[0, 1]$  se define

$$\varphi(f) = \int_0^1 f(t)g(t) dt$$

Es claro que  $\varphi \in C[0, 1]^*$ . De hecho tenemos

$$\|\varphi\| = \int_0^1 |g(t)| dt = \|g\|_1$$

Obsérvese que estamos viendo

$$L_1[0, 1] \subseteq M[0, 1] \equiv C[0, 1]^*$$

## Tema 7: Espacios Vectoriales Topológicos

- 1 EVT: Ideas básicas
  - Preliminares algebraicos
  - Concepto de EVT
  - Construcción de EVT
- 2 Nociones uniformes
  - Continuidad uniforme
  - Complitud
  - Precompacidad
- 3 Acotación
  - Conjuntos acotados
  - Operadores lineales acotados
- 4 Construcciones con EVT
  - Topologías iniciales
  - Cocientes
  - Homomorfismos
  - Sumas topológico-directas

# Preliminares algebraicos

## Notación

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- $A$  convexo  $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$



## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- $A$  convexo  $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

### Conjuntos absorbentes y equilibrados

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- $A$  convexo  $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

### Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$  es **absorbente** cuando  $X = \mathbb{R}^+ A$

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- $A$  convexo  $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

### Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$  es **absorbente** cuando  $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$  es **equilibrado** cuando  $\mathbb{D}B = B$ , donde  $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$

## Preliminares algebraicos

### Notación

$X$  espacio vectorial (sobre  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  o  $\mathbb{C}$ )

$\Lambda \subset \mathbb{K}$ ,  $\alpha \in \mathbb{K}$ ,  $A, B \subset X$ ,  $x \in X$ ,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- $A$  subespacio de  $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- $A$  convexo  $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

### Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$  es **absorbente** cuando  $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$  es **equilibrado** cuando  $\mathbb{D}B = B$ , donde  $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$   
Para  $A \subset X$ ,  $\mathbb{D}A$  es la **envolvente equilibrada** de  $A$

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

Topología Vectorial:

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$

## Concepto de Espacio Vectorial Topológico

### Definición

#### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$



## Concepto de Espacio Vectorial Topológico

### Definición

#### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

## Concepto de Espacio Vectorial Topológico

### Definición

#### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

$X$  EVT,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  con  $\lambda_0 \neq 0$  y  $x_0 \in X$ . La aplicación  $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$  es un homeomorfismo de  $X$ .

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

$X$  EVT,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  con  $\lambda_0 \neq 0$  y  $x_0 \in X$ . La aplicación  $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$  es un homeomorfismo de  $X$ .

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

$X$  EVT,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  con  $\lambda_0 \neq 0$  y  $x_0 \in X$ . La aplicación  $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$  es un homeomorfismo de  $X$ .

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$\mathcal{B}$  base de entornos de cero en  $X$

↓

$\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cada  $x \in X$

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X$ ,  $(x, y) \mapsto x + y$  ( $x, y \in X$ )
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$ ,  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$  ( $\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$ )

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

$X$  EVT,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  con  $\lambda_0 \neq 0$  y  $x_0 \in X$ . La aplicación  $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$  es un homeomorfismo de  $X$ .

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$\mathcal{B}$  base de entornos de cero en  $X$

↓

$\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cada  $x \in X$

La topología de  $X$  queda **determinada** por  $\mathcal{B}$

# Concepto de Espacio Vectorial Topológico

## Definición

### Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial  $X$  que hace continuas

- La suma:  $X \times X \rightarrow X, (x, y) \mapsto x + y \quad (x, y \in X)$
- El producto por escalares:  $\mathbb{K} \times X \rightarrow X, (\lambda, x) \mapsto \lambda x \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo  $X = \{0\}$ )

**EVT** = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

## Propiedad inmediata: homogeneidad

$X$  EVT,  $\lambda_0 \in \mathbb{K}$  con  $\lambda_0 \neq 0$  y  $x_0 \in X$ . La aplicación  $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$  es un homeomorfismo de  $X$ .

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

$\mathcal{B}$  base de entornos de cero en  $X$

↓

$\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cada  $x \in X$

La topología de  $X$  queda **determinada** por  $\mathcal{B}$

¿Cómo son las bases de entornos de cero para una topología vectorial?



# Construcción de topologías vectoriales

## Entornos de cero

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{ \text{entornos de cero en } X \}$

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . Todo entorno de cero es absorbente

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

$$(a) \forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$$

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

- (a)  $\forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$
- (b)  $U \in \mathcal{B} \implies U$  absorbente



## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

- $\forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$
- $U \in \mathcal{B} \implies U$  absorbente
- $U \in \mathcal{B} \implies U$  equilibrado

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{\text{entornos de cero en } X\}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

- $\forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$
- $U \in \mathcal{B} \implies U$  absorbente
- $U \in \mathcal{B} \implies U$  equilibrado
- $\forall U \in \mathcal{B} \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

## Construcción de topologías vectoriales

### Entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{U} = \{ \text{entornos de cero en } X \}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$ . **Todo entorno de cero es absorbente**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$ . **Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado**
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

### Definición constructiva de EVT

$X$  espacio vectorial,  $\mathcal{B}$  familia de subconjuntos de  $X$  verificando:

- (a)  $\forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$
- (b)  $U \in \mathcal{B} \implies U$  absorbente
- (c)  $U \in \mathcal{B} \implies U$  equilibrado
- (d)  $\forall U \in \mathcal{B} \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Entonces existe una (única) topología vectorial en  $X$  para la cual  $\mathcal{B}$  es base de entornos de cero

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

- (1)  $\nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$
- (2)  $\lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$
- (3)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$



## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu$  pseudonorma en  $X$ ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu$  pseudonorma en  $X$ ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

La familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en  $X$ ,

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu$  pseudonorma en  $X$ ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

La familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en  $X$ , la topología **asociada a la pseudonorma**  $\nu$ , con la que  $X$  es un EVT **pseudonormable** (**seminormable** cuando  $\nu$  es una seminorma)

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ ,  
luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu$  pseudonorma en  $X$ ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

La familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en  $X$ , la topología **asociada a la pseudonorma**  $\nu$ , con la que  $X$  es un EVT **pseudonormable** (**seminormable** cuando  $\nu$  es una seminorma)

Definiendo  $\delta(x, y) = \nu(x - y)$  para  $x, y \in X$ , se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

## Uso de la definición constructiva

### Pseudonormas

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  **pseudonorma** cuando:

$$(1) \quad \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \quad \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$ , luego toda seminorma es una pseudonorma

### Topología asociada a una pseudonorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu$  pseudonorma en  $X$ ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

La familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en  $X$ , la topología **asociada a la pseudonorma**  $\nu$ , con la que  $X$  es un EVT **pseudonormable** (**seminormable** cuando  $\nu$  es una seminorma)

Definiendo  $\delta(x, y) = \nu(x - y)$  para  $x, y \in X$ , se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

Seminormable  $\implies$  Pseudonormable  $\implies$  Semimetrizable

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,



## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\bar{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**
- $X$  es un espacio topológico **regular**

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\bar{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**
- $X$  es un espacio topológico **regular**
- Los axiomas de separación  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_3$  son equivalentes para  $X$ .  
EVT **separado**

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**
- $X$  es un espacio topológico **regular**
- Los axiomas de separación  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_3$  son equivalentes para  $X$ .  
EVT **separado**
- $X$  separado  $\iff \{0\}$  cerrado

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**
- $X$  es un espacio topológico **regular**
- Los axiomas de separación  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_3$  son equivalentes para  $X$ .  
EVT **separado**
- $X$  separado  $\iff \{0\}$  cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma  $\nu$  es **total**:  $x \in X, \nu(x) = 0 \implies x = 0$

## Uso de los entornos de cero

$X$  EVT,  $\mathcal{B}$  base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto  $A \subset X$ :

$$\overline{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\overline{U} : U \in \mathcal{B}\}$  base de entornos de cero **cerrados**
- $X$  es un espacio topológico **regular**
- Los axiomas de separación  $\mathbf{T}_0$ ,  $\mathbf{T}_1$ ,  $\mathbf{T}_2$  y  $\mathbf{T}_3$  son equivalentes para  $X$ .  
EVT **separado**
- $X$  separado  $\iff \{0\}$  cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma  $\nu$  es **total**:  $x \in X, \nu(x) = 0 \implies x = 0$

seminorma total = norma

## Continuidad uniforme



## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de 0 en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de 0 en  $X$ , tal que:

## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de 0 en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de 0 en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de 0 en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de 0 en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de  $0$  en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de  $0$  en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

## Continuidad de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  operador lineal. Equivalen:

### Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de  $0$  en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de  $0$  en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

### Continuidad de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  operador lineal. Equivalen:

- (i)  $T$  es uniformemente continuo en  $X$

### Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de  $0$  en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de  $0$  en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

### Continuidad de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  operador lineal. Equivalen:

- (i)  $T$  es uniformemente continuo en  $X$
- (ii)  $T$  es continuo en  $X$

## Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de  $0$  en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de  $0$  en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

## Continuidad de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  operador lineal. Equivalen:

- (i)  $T$  es uniformemente continuo en  $X$
- (ii)  $T$  es continuo en  $X$
- (iii)  $T$  es continuo en  $0$



### Continuidad uniforme

$X, Y$  EVT,  $A \subset X$ ,  $f: A \rightarrow Y$

$f$  es **uniformemente continua** (en  $A$ ) cuando para cada  $V$  entorno de  $0$  en  $Y$  existe un  $U$ , entorno de  $0$  en  $X$ , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que  $X$  e  $Y$  sean pseudonormables

### Continuidad de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  operador lineal. Equivalen:

- (i)  $T$  es uniformemente continuo en  $X$
- (ii)  $T$  es continuo en  $X$
- (iii)  $T$  es continuo en  $0$

$L(X, Y)$  operadores lineales continuos

EVT: Ideas básicas  
○○○○○

Nociones uniformes  
○●○○

Acotación  
○○

Construcciones con EVT  
○○○○○○

## Redes

## Redes

- **Conjunto dirigido:**  $\Lambda \neq \emptyset$  con relación binaria  $\leq$ , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por “contención”

## Redes

- **Conjunto dirigido:**  $\Lambda \neq \emptyset$  con relación binaria  $\leq$ , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por “contención”

- **Red en un conjunto  $X$ :** Aplicación  $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ , con  $\Lambda$  dirigido. Notación:  $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ ,  $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$ . Ejemplo: sucesión

## Redes

- **Conjunto dirigido:**  $\Lambda \neq \emptyset$  con relación binaria  $\leq$ , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por “contención”

- **Red en un conjunto  $X$ :** Aplicación  $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ , con  $\Lambda$  dirigido. Notación:  $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ ,  $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$ . Ejemplo: sucesión
- **Red convergente:**  $X$  espacio topológico,  $\{x_\lambda\}$  red en  $X$ ,  $x \in X$ :

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leq \lambda\} \subset U$$

## Redes

- **Conjunto dirigido:**  $\Lambda \neq \emptyset$  con relación binaria  $\leq$ , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por "contención"

- **Red en un conjunto  $X$ :** Aplicación  $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ , con  $\Lambda$  dirigido. Notación:  $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ ,  $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$ . Ejemplo: sucesión
- **Red convergente:**  $X$  espacio topológico,  $\{x_\lambda\}$  red en  $X$ ,  $x \in X$ :

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leq \lambda\} \subset U$$

- **Las redes convergentes caracterizan la topología:**

$$x \in \bar{A} \iff \exists \{a_\lambda\} : a_\lambda \in A \quad \forall \lambda \in \Lambda, \{a_\lambda\} \rightarrow x$$

## Redes

- **Conjunto dirigido:**  $\Lambda \neq \emptyset$  con relación binaria  $\leq$ , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{R}$ . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por “contención”

- **Red en un conjunto  $X$ :** Aplicación  $\varphi : \Lambda \rightarrow X$ , con  $\Lambda$  dirigido. Notación:  $x_\lambda = \varphi(\lambda)$ ,  $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$ . Ejemplo: sucesión
- **Red convergente:**  $X$  espacio topológico,  $\{x_\lambda\}$  red en  $X$ ,  $x \in X$ :

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leq \lambda\} \subset U$$

- **Las redes convergentes caracterizan la topología:**

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{a_\lambda\} : a_\lambda \in A \quad \forall \lambda \in \Lambda, \{a_\lambda\} \rightarrow x$$

- Ejemplo: En todo EVT, el cierre de un subespacio es un subespacio

# Complitud

## Red de Cauchy



# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

## Uso de la complitud

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

## Uso de la complitud

- $E$  completo,  $F = \overline{F} \cap E \Rightarrow F$  completo

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

## Uso de la complitud

- $E$  completo,  $F = \overline{F} \cap E \Rightarrow F$  completo
- $X$  separado,  $X \supset E$  completo  $\Rightarrow E = \overline{E}$

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

## Uso de la complitud

- $E$  completo,  $F = \overline{F} \cap E \Rightarrow F$  completo
- $X$  separado,  $X \supset E$  completo  $\Rightarrow E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar

# Complitud

## Red de Cauchy

- En un espacio métrico:  $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT:  $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

## Conjuntos completos

$X$  EVT,  $E \subset X$ .  $E$  **completo** cuando toda red de Cauchy en  $E$  converge a un punto de  $E$ .

## Uso de la complitud

- $E$  completo,  $F = \overline{F} \cap E \Rightarrow F$  completo
- $X$  separado,  $X \supset E$  completo  $\Rightarrow E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar
- **Extensión de funciones:**  $X, Y$  EVT,  $Y$  separado y completo,  $M \subset X$  subespacio denso,  $T \in L(M, Y)$ . Existe única extensión  $\tilde{T} \in L(X, Y)$ . Por tanto  $L(M, Y) \cong L(X, Y)$



# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  precompacto  $\implies \bar{A}$  precompacto

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  precompacto  $\implies \bar{A}$  precompacto
- $A$  precompacto,  $f$  uniformemente continua  $\implies f(A)$  precompacto

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  precompacto  $\implies \bar{A}$  precompacto
- $A$  precompacto,  $f$  uniformemente continua  $\implies f(A)$  precompacto

## Caracterización de la compacidad



# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  precompacto  $\implies \bar{A}$  precompacto
- $A$  precompacto,  $f$  uniformemente continua  $\implies f(A)$  precompacto

## Caracterización de la compacidad

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$$A \text{ compacto} \iff A \text{ precompacto y completo}$$

# Precompacidad

## Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

## Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  precompacto  $\implies \bar{A}$  precompacto
- $A$  precompacto,  $f$  uniformemente continua  $\implies f(A)$  precompacto

## Caracterización de la compacidad

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$$A \text{ compacto} \iff A \text{ precompacto y completo}$$

Por tanto, si  $X$  es completo,

$$A \text{ precompacto} \iff A \text{ relativamente compacto}$$

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+ : A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general,

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas



## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

### Propiedades de los conjuntos acotados

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

### Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto  $\implies$  Acotado

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

### Propiedades de los conjuntos acotados

• Precompacto  $\implies$  Acotado

•  $A$  acotado  $\iff \left[ \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \implies \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \rightarrow 0 \right]$

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

### Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto  $\implies$  Acotado
- $A$  acotado  $\iff \left[ \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \implies \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \rightarrow 0 \right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas

## Conjuntos acotados

### Definición de conjunto acotado

$X$  EVT,  $A \subset X$ ,

$A$  **acotado**  $\iff \forall U$  entorno de cero en  $X$ ,  $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$  :  $A \subset \rho U$

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ :

$A$  acotado  $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

### Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto  $\implies$  Acotado
- $A$  acotado  $\iff \left[ \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \implies \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \rightarrow 0 \right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- $A$  acotado  $\implies \bar{A}$  acotado

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a)  $T$  acotado en un entorno de cero:

$\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo



## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)
- En general, ninguna reversible

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)
- En general, ninguna reversible
- Si  $X$  tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X$  :  $T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)
- En general, ninguna reversible
- Si  $X$  tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si  $Y$  tiene un entorno de cero acotado, (b)  $\implies$  (a)

## Acotación de operadores lineales

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal. Consideramos varias afirmaciones:

- (a)  $T$  acotado en un entorno de cero:  
 $\exists U$  entorno de cero en  $X : T(U)$  acotado en  $Y$
- (b)  $T$  continuo
- (c)  $T$  secuencialmente continuo
- (d)  $T$  acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a)  $\implies$  (b)  $\implies$  (c)  $\implies$  (d)
- En general, ninguna reversible
- Si  $X$  tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si  $Y$  tiene un entorno de cero acotado, (b)  $\implies$  (a)
- Si  $X$  es semimetrizable, (d)  $\implies$  (b)

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).



## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \rightarrow f_i(x) \forall i \in I$$

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \rightarrow f_i(x) \forall i \in I$$

- Criterio de continuidad:  $Y$  espacio topológico,  $f : Y \rightarrow X$ ,

$$f \text{ continua} \iff f_i \circ f \text{ continua} \quad \forall i \in I$$

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \rightarrow f_i(x) \forall i \in I$$

- Criterio de continuidad:  $Y$  espacio topológico,  $f : Y \rightarrow X$ ,

$$f \text{ continua} \iff f_i \circ f \text{ continua} \quad \forall i \in I$$

- Ejemplos: **inducida**, **producto**, **supremo**

## Topologías iniciales

### Topología inicial

$X \neq \emptyset$ ,  $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$  espacios topológicos,  $f_i : X \rightarrow X_i$  ( $i \in I$ ).

**Topología inicial** para  $\{f_i : i \in I\}$ : Mínima que las hace a todas continuas

### Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \rightarrow f_i(x) \forall i \in I$$

- Criterio de continuidad:  $Y$  espacio topológico,  $f : Y \rightarrow X$ ,

$$f \text{ continua} \iff f_i \circ f \text{ continua} \quad \forall i \in I$$

- Ejemplos: **inducida**, **producto**, **supremo**
- **Teorema de Tichonoff**: Un producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto

## EVT con topología inicial

### Topología inicial para aplicaciones lineales



## EVT con topología inicial

### Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.

## EVT con topología inicial

### Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en  $X$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

## EVT con topología inicial

### Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en  $X$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo

## EVT con topología inicial

### Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en  $X$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si  $X_i$  es separado para todo  $i \in I$ ,

$$X \text{ separado} \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$

## EVT con topología inicial

## Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en  $X$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si  $X_i$  es separado para todo  $i \in I$ ,

$$X \text{ separado} \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$

- Acotación y Precompacidad:  $A \subset X$ ,

$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$

## EVT con topología inicial

## Topología inicial para aplicaciones lineales

- $X$  espacio vectorial,  $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT y para cada  $i \in I$ ,  $f_i : X \rightarrow X_i$  lineal. Entonces  $X$  con la topología inicial es un EVT.
- Base de entornos de cero en  $X$ :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo
- Separación: Si  $X_i$  es separado para todo  $i \in I$ ,

$$X \text{ separado} \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$

- Acotación y Precompacidad:  $A \subset X$ ,

$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$

- Complitud:  $\prod_{i \in I} X_i$  completo  $\iff X_i$  completo  $\forall i \in I$

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi : X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$



## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta
- $X/M$  es un EVT

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta
- $X/M$  es un EVT
- $X/M$  separado  $\iff \overline{M} = M$

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta
- $X/M$  es un EVT
- $X/M$  separado  $\iff \overline{M} = M$
- $Y$  espacio topológico,  $f: X/M \rightarrow Y$ ,

$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta
- $X/M$  es un EVT
- $X/M$  separado  $\iff \overline{M} = M$
- $Y$  espacio topológico,  $f: X/M \rightarrow Y$ ,

$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

- Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ , definiendo:

$$\tilde{\nu}(x + M) = \inf\{\nu(x + m) : m \in M\},$$

$\tilde{\nu}$  es una pseudonorma en  $X/M$  que genera la topología cociente.

## Cociente de EVT

### Topología cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ ,  $\pi: X \rightarrow X/M$  aplicación cociente

Definición de la topología cociente:  $G \subset X/M$ ,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

### Hechos básicos

- $\pi$  es continua y abierta
- $X/M$  es un EVT
- $X/M$  separado  $\iff \overline{M} = M$
- $Y$  espacio topológico,  $f: X/M \rightarrow Y$ ,

$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

- Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ , definiendo:

$$\tilde{\nu}(x + M) = \inf\{\nu(x + m) : m \in M\},$$

$\tilde{\nu}$  es una pseudonorma en  $X/M$  que genera la topología cociente. Si  $\nu$  es una seminorma, igual le ocurre a  $\tilde{\nu}$

## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos



## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T: X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos

### Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\tilde{T}} & T(X) \end{array}$$

## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos

### Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\tilde{T}} & T(X) \end{array}$$

### Homomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Homomorfismo** de  $X$  en  $Y$ : Operador lineal continuo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T : X \rightarrow T(X)$  es una aplicación abierta

## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos

### Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\tilde{T}} & T(X) \end{array}$$

### Homomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Homomorfismo** de  $X$  en  $Y$ : Operador lineal continuo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T : X \rightarrow T(X)$  es una aplicación abierta  
Inyectivo  $\Rightarrow$  **Monomorfismo**;

## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos

### Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\tilde{T}} & T(X) \end{array}$$

### Homomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Homomorfismo** de  $X$  en  $Y$ : Operador lineal continuo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T : X \rightarrow T(X)$  es una aplicación abierta  
Inyectivo  $\Rightarrow$  **Monomorfismo**; Sobreyectivo  $\Rightarrow$  **Epimorfismo**

## Homomorfismos de EVT

### Isomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Isomorfismo** de  $X$  sobre  $Y$ : Operador lineal biyectivo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T$  y  $T^{-1}$  son continuos

### Factorización canónica de un operador lineal

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{T} & Y \\ \pi \downarrow & & \uparrow I \\ X/\ker T & \xrightarrow{\tilde{T}} & T(X) \end{array}$$

### Homomorfismo (de EVT)

$X$  e  $Y$  EVT. **Homomorfismo** de  $X$  en  $Y$ : Operador lineal continuo  $T : X \rightarrow Y$  tal que  $T : X \rightarrow T(X)$  es una aplicación abierta

Inyectivo  $\Rightarrow$  **Monomorfismo**; Sobreyectivo  $\Rightarrow$  **Epimorfismo**

Todo homomorfismo ( $T$ ) es composición de un epimorfismo ( $\pi$ ), un isomorfismo ( $\tilde{T}$ ) y un monomorfismo ( $I$ )

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi: Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal



## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi : Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P : X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi : Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P : X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi: Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P: X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi: Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

### Suma topológico-directa

$X$  EVT,  $X = Y \oplus Z$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  siempre son continuas. Son equivalentes:

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi : Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P : X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

### Suma topológico-directa

$X$  EVT,  $X = Y \oplus Z$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  siempre son continuas. Son equivalentes:

- (1)  $\Phi^{-1}$  es continua ( $\Phi$  es un isomorfismo)

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi : Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P : X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

### Suma topológico-directa

$X$  EVT,  $X = Y \oplus Z$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  siempre son continuas. Son equivalentes:

- (1)  $\Phi^{-1}$  es continua ( $\Phi$  es un isomorfismo)
- (2)  $P$  es continua

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi : Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P : X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi : Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

### Suma topológico-directa

$X$  EVT,  $X = Y \oplus Z$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  siempre son continuas. Son equivalentes:

- (1)  $\Phi^{-1}$  es continua ( $\Phi$  es un isomorfismo)
- (2)  $P$  es continua
- (3)  $\Psi^{-1}$  es continua ( $\Psi$  es un isomorfismo)

## Suma topológico-directa

### Suma directa algebraica de dos subespacios

$X$  espacio vectorial,  $Y$  subespacio de  $X$ . Complemento algebraico de  $Y$  en  $X$ : subespacio  $Z$  de  $X$  tal que  $X = Y + Z$ ,  $Y \cap Z = \{0\}$ , es decir  $X = Y \oplus Z$ , suma directa

- $\Phi: Y \times Z \rightarrow X$ ,  $\Phi(y, z) = y + z$  biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$ .  $P: X \rightarrow X$  proyección lineal:  
 $P^2 = P$ ,  $P(X) = Y$ ,  $\ker P = Z$
- $\Psi: Z \rightarrow X/Y$ ,  $\Psi(z) = z + Y$  biyección lineal

### Suma topológico-directa

$X$  EVT,  $X = Y \oplus Z$ ,  $\Phi$  y  $\Psi$  siempre son continuas. Son equivalentes:

- (1)  $\Phi^{-1}$  es continua ( $\Phi$  es un isomorfismo)
- (2)  $P$  es continua
- (3)  $\Psi^{-1}$  es continua ( $\Psi$  es un isomorfismo)

### Suma topológico-directa

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos



## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológica directa  $\implies Y, Z$  cerrados

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológico directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológico directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológica directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

### subespacio complementado

$X$  EVT,  $Y$  subespacio de  $X$

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológico directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

### subespacio complementado

$X$  EVT,  $Y$  subespacio de  $X$

$Y$  **complementado**:  $\exists Z : X = Y \oplus Z$  suma topológico-directa

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológica directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

### subespacio complementado

$X$  EVT,  $Y$  subespacio de  $X$

$Y$  **complementado**:  $\exists Z : X = Y \oplus Z$  suma topológico-directa

Equivalentemente:  $\exists P : X \rightarrow X$  proyección lineal continua,  $P(X) = Y$

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológica directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

### subespacio complementado

$X$  EVT,  $Y$  subespacio de  $X$

$Y$  **complementado**:  $\exists Z : X = Y \oplus Z$  suma topológico-directa

Equivalentemente:  $\exists P : X \rightarrow X$  proyección lineal continua,  $P(X) = Y$

$Z = \ker P$  **complemento topológico** de  $Y$  en  $X$ , isomorfo a  $X/Y$

## Subespacios complementados

### Ejemplos sencillos

- $X$  EVT separado,  $X = Y \oplus Z$ ,  
suma topológica directa  $\implies Y, Z$  cerrados
- $X$  EVT,  $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$  suma topológico-directa  
 $Z$  EVT separado, isomorfo a  $X/\overline{\{0\}}$

### subespacio complementado

$X$  EVT,  $Y$  subespacio de  $X$

$Y$  **complementado**:  $\exists Z : X = Y \oplus Z$  suma topológico-directa

Equivalentemente:  $\exists P : X \rightarrow X$  proyección lineal continua,  $P(X) = Y$

$Z = \ker P$  **complemento topológico** de  $Y$  en  $X$ , isomorfo a  $X/Y$

$X$  EVT separado,  $Y$  subespacio complementado de  $X \implies Y$  cerrado



## Tema 8: Tipos de EVT

- 1 EVT de dimensión finita
  - Teorema de Tychonoff
  - Teorema de Riesz
  - Ejemplos
  
- 2 EVT normables
  - Funcional de Minkowski
  - Criterio de normabilidad
  
- 3 Espacios localmente acotados
  
- 4 Espacios localmente convexos
  
- 5 EVT metrizable
  - Metrizable
  - F-espacios
  - Espacios de Fréchet

EVT de dimensión finita

●○○

EVT normables

○○

Espacios localmente acotados

○

Espacios localmente convexos

○

EVT metrizable

○○○○○

¿Cuántos hay?

Teorema de Tychonoff (1935)

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo



## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es  
(a) Continuo  $\iff$  su núcleo es cerrado

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  - (a) Continuo  $\iff$  su núcleo es cerrado
  - (b) Abierto  $\iff$  es sobreyectivo

## ¿Cuántos hay?

### Teorema de Tychonoff (1935)

Toda biyección lineal entre dos espacios vectoriales topológicos separados de dimensión finita es un isomorfismo

### Consecuencias

- (Hausdorff, 1932) En un espacio vectorial de dimensión finita, todas las normas son equivalentes
- Todo subespacio finito-dimensional de un EVT separado es cerrado
- Todo operador lineal de un EVT separado de dimensión finita en cualquier otro EVT es continuo
- Un operador lineal con valores en un EVT separado de dimensión finita es
  - (a) Continuo  $\iff$  su núcleo es cerrado
  - (b) Abierto  $\iff$  es sobreyectivo
- En un EVT separado, todo subespacio cerrado de codimensión finita está complementado

## ¿Cómo son?

Teorema clásico de Riesz (1918)

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto



## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

### Teorema de Riesz generalizado

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

### Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

### Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $X$  es localmente compacto

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

### Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $X$  es localmente compacto
- (2) Existe en  $X$  un entorno de cero precompacto

## ¿Cómo son?

### Teorema clásico de Riesz (1918)

Para un espacio normado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (a) Todo subconjunto cerrado y acotado de  $X$  es compacto
- (b)  $X$  es localmente compacto
- (c) La bola cerrada unidad de  $X$  es compacta
- (d)  $X$  tiene dimensión finita

### Teorema de Riesz generalizado

Para un EVT separado  $X$ , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- (1)  $X$  es localmente compacto
- (2) Existe en  $X$  un entorno de cero precompacto
- (3)  $X$  tiene dimensión finita

## Espacios $L_p$ de dimensión finita

### Los espacios $l_p^N$

Espacio de medida:  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mu =$  número de elementos



## Espacios $L_p$ de dimensión finita

### Los espacios $l_p^N$

Espacio de medida:  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$\int_{\Omega} x d\mu = \sum_{k=1}^N x(k) \quad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos:  $\mathbb{K}^N$  con la topología producto

Espacios  $L_p$  de dimensión finitaLos espacios  $l_p^N$ Espacio de medida:  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$\int_{\Omega} x d\mu = \sum_{k=1}^N x(k) \quad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos:  $\mathbb{K}^N$  con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^N |x(k)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leq p < \infty)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max\{|x(k)| : 1 \leq k \leq N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

## Espacios $L_p$ de dimensión finita

### Los espacios $l_p^N$

Espacio de medida:  $\Omega = \{1, 2, \dots, N\}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$\int_{\Omega} x d\mu = \sum_{k=1}^N x(k) \quad \mathcal{L}_p(\mu) = L_p(\mu) = \mathbb{K}^N \quad (0 \leq p \leq \infty)$$

Como EVT son todos isomorfos:  $\mathbb{K}^N$  con la topología producto

$$l_p^N = (\mathbb{K}^N, \|\cdot\|_p) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$

$$\|x\|_p = \left( \sum_{k=1}^N |x(k)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in \mathbb{K}^N, 1 \leq p < \infty)$$

$$\|x\|_{\infty} = \max \{|x(k)| : 1 \leq k \leq N\} \quad (x \in \mathbb{K}^N)$$

Desigualdad de Hölder:

$$\sum_{k=1}^N |x(k)||y(k)| \leq \left( \sum_{k=1}^N |x(k)|^p \right)^{1/p} \left( \sum_{k=1}^N |y(k)|^{p^*} \right)^{1/p^*}$$

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$
- Positivamente homogéneo:  $\nu_E(rx) = r\nu_E(x) \quad (x \in X, r \geq 0)$



## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$
- Positivamente homogéneo:  $\nu_E(rx) = r\nu_E(x) \quad (x \in X, r \geq 0)$
- $E$  equilibrado o convexo  $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$
- Positivamente homogéneo:  $\nu_E(rx) = r\nu_E(x) \quad (x \in X, r \geq 0)$
- $E$  equilibrado o convexo  $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- $E$  equilibrado  $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\nu_E(x) \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{K})$

## Funcional de Minkowski

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

### Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$
- Positivamente homogéneo:  $\nu_E(rx) = r\nu_E(x) \quad (x \in X, r \geq 0)$
- $E$  equilibrado o convexo  $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- $E$  equilibrado  $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\nu_E(x) \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{K})$
- $E$  convexo  $\implies \nu_E(x+y) \leq \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$

# Funcional de Minkowski

## Definición

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ ,  $E$  absorbente.

Funcional de Minkowski de  $E$ :

$$\nu_E : X \rightarrow [0, \infty[ \quad \nu_E(x) = \inf \{ \rho > 0 : x \in \rho E \} \quad (x \in X)$$

## Propiedades

- $E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\}$
- Positivamente homogéneo:  $\nu_E(rx) = r\nu_E(x) \quad (x \in X, r \geq 0)$
- $E$  equilibrado o convexo  $\implies \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E$
- $E$  equilibrado  $\implies \nu_E(\lambda x) = |\lambda|\nu_E(x) \quad (x \in X, \lambda \in \mathbb{K})$
- $E$  convexo  $\implies \nu_E(x+y) \leq \nu_E(x) + \nu_E(y) \quad (x, y \in X)$
- $E$  absolutamente convexo (convexo + equilibrado)

$$\implies \begin{cases} \nu_E \text{ seminorma} \\ \{x \in X : \nu_E(x) < 1\} \subseteq E \subseteq \{x \in X : \nu_E(x) \leq 1\} \end{cases}$$

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ .

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

**Envolvente absolutamente convexa:**  $|\text{co}| E = \text{co}(\mathbb{D} E) = \text{co}(\mathbb{T} E)$  mínimo subconjunto convexo y equilibrado de  $X$  que contiene a  $E$ .

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co} E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

**Envolvente absolutamente convexa:**  $|\text{co}| E = \text{co}(\mathbb{D} E) = \text{co}(\mathbb{T} E)$  mínimo subconjunto convexo y equilibrado de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$|\text{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}$$



## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

**Envolvente absolutamente convexa:**  $|\text{co}| E = \text{co}(\mathbb{D}E) = \text{co}(\mathbb{T}E)$  mínimo subconjunto convexo y equilibrado de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$|\text{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}$$

## Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

**Envolvente absolutamente convexa:**  $|\text{co}| E = \text{co}(\mathbb{D}E) = \text{co}(\mathbb{T}E)$  mínimo subconjunto convexo y equilibrado de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$|\text{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}$$

## Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado.

## Envolvente convexa

$X$  espacio vectorial,  $E \subseteq X$ . **Envolvente convexa** de  $E$ : intersección de todos los subconjuntos convexos de  $X$  que contienen a  $E$ , mínimo subconjunto convexo de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$\text{co } E = \left\{ \sum_{k=1}^n \rho_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \rho_1, \dots, \rho_n \geq 0, \sum_{k=1}^n \rho_k = 1 \right\}$$

**Envolvente absolutamente convexa:**  $|\text{co}| E = \text{co}(\mathbb{D}E) = \text{co}(\mathbb{T}E)$  mínimo subconjunto convexo y equilibrado de  $X$  que contiene a  $E$ . Descripción:

$$|\text{co}| E = \left\{ \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k : n \in \mathbb{N}, x_1, \dots, x_n \in E, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}, \sum_{k=1}^n |\lambda_k| \leq 1 \right\}$$

## Criterio de normabilidad (Kolmogorov, 1934)

Un EVT es seminormable si, y sólo si, contiene un entorno de cero convexo y acotado. Por tanto, un EVT es normable si, y sólo si, es separado y contiene un entorno de cero convexo y acotado

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

## EVT localmente acotados

## Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

## Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

- (1)  $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$
- (2)  $\exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :



## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

### Propiedades

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

### Propiedades

- Localmente acotado = Casinormable

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

### Propiedades

- Localmente acotado = Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes

## EVT localmente acotados

### Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

### Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

### Propiedades

- Localmente acotado = Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales,

## EVT localmente acotados

## Definición

Un EVT es **localmente acotado** cuando admite un entorno de cero acotado

## Casinorma

$X$  espacio vectorial,  $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$  casinorma cuando:

$$(1) \nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad (\lambda \in \mathbb{K}, x \in X)$$

$$(2) \exists M > 0 : \nu(x+y) \leq M(\nu(x) + \nu(y)) \quad \forall x, y \in X$$

**Topología asociada a una casinorma  $\nu$ :** Tomando  $U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$ , la familia  $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$  es base de entornos de cero para una única topología vectorial en  $X$

## Propiedades

- Localmente acotado = Casinormable
- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales,

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ localmente acotado} \iff \begin{cases} X_i \text{ localmente acotado } \forall i \in I \\ I \text{ finito} \end{cases}$$

EVT de dimensión finita  
OOO

EVT normables  
OO

Espacios localmente acotados  
O

Espacios localmente convexos  
●

EVT metrizable  
OOOO

## Espacios localmente convexos

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos



## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas:  $X$  espacio vectorial,  $\Phi$  familia de pseudonormas en  $X$ . Cada  $\nu \in \Phi$  genera una topología vectorial  $\mathcal{T}_\nu$ . Topología (vectorial) asociada a  $\Phi$ :

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu : \nu \in \Phi\}$$

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas:  $X$  espacio vectorial,  $\Phi$  familia de pseudonormas en  $X$ . Cada  $\nu \in \Phi$  genera una topología vectorial  $\mathcal{T}_\nu$ . Topología (vectorial) asociada a  $\Phi$ :

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu : \nu \in \Phi\}$$

Si  $\Phi$  es una familia de seminormas,  $\mathcal{T}_\Phi$  es localmente convexa

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas:  $X$  espacio vectorial,  $\Phi$  familia de pseudonormas en  $X$ . Cada  $\nu \in \Phi$  genera una topología vectorial  $\mathcal{T}_\nu$ . Topología (vectorial) asociada a  $\Phi$ :

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu : \nu \in \Phi\}$$

Si  $\Phi$  es una familia de seminormas,  $\mathcal{T}_\Phi$  es localmente convexa

- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.

## Espacios localmente convexos

**Topología localmente convexa:** topología vectorial que admite una base de entornos de cero convexos

**Espacio localmente convexo (ELC):** espacio vectorial dotado de una topología localmente convexa

## Hechos básicos

- Todo ELC tiene una base de entornos de cero formada por conjuntos absolutamente convexos y abiertos (resp. cerrados)
- Estabilidad por topologías iniciales (subespacios, productos y supremos) y por cocientes
- Topología asociada a una familia de pseudonormas:  $X$  espacio vectorial,  $\Phi$  familia de pseudonormas en  $X$ . Cada  $\nu \in \Phi$  genera una topología vectorial  $\mathcal{T}_\nu$ . Topología (vectorial) asociada a  $\Phi$ :

$$\mathcal{T}_\Phi = \sup\{\mathcal{T}_\nu : \nu \in \Phi\}$$

Si  $\Phi$  es una familia de seminormas,  $\mathcal{T}_\Phi$  es localmente convexa

- Recíprocamente: la topología de cualquier ELC es la asociada a una familia de seminormas.
- Todo ELC separado es isomorfo a un subespacio de un producto de espacios normados



## Metrizabilidad

### Criterio de metrabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizable de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

### Consecuencias

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

### Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable



## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

### Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizable de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

### Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizable

## Metrizabilidad

### Criterio de metrizabilidad de Birkhoff-Kakutani (1936)

Si  $X$  es un EVT, equivalen:

- (a)  $X$  es pseudonormable
- (b)  $X$  es semimetrizable
- (c)  $X$  tiene una base numerable de entornos de cero

Un EVT es metrizable si, y sólo si, es separado y tiene una base numerable de entornos de cero

### Consecuencias

- Todo EVT localmente acotado es pseudonormable
- Toda topología vectorial es la asociada a una familia de pseudonormas
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio de un producto de EVT metrizable
- Todo EVT es completamente regular

EVT de dimensión finita  
○○○

EVT normables  
○○

Espacios localmente acotados  
○

Espacios localmente convexos  
○

EVT metrizables  
○●○○○

## EVT metrizables

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## F-espacios

**F-espacio** = EVT completo metrizable



## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## F-espacios

**F-espacio** = EVT completo metrizable

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ ,  $X$  es un F-espacio cuando

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## F-espacios

**F-espacio** = EVT completo metrizable

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ ,  $X$  es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \implies \sum_{n \geq 1} x_n \text{ converge}$$

## EVT metrizable

- Estabilidad por subespacios y cocientes
- $\{X_i : i \in I\}$  familia de EVT no triviales:

$$\prod_{i \in I} X_i \text{ semimetrizable} \iff \begin{cases} X_i \text{ semimetrizable } \forall i \in I \\ I \text{ numerable} \end{cases}$$

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## F-espacios

**F-espacio** = EVT completo metrizable

Si  $X$  tiene la topología asociada a una pseudonorma  $\nu$ ,  $X$  es un F-espacio cuando

$$x_n \in X \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{n=1}^{\infty} \nu(x_n) < \infty \implies \sum_{n \geq 1} x_n \text{ converge}$$

(Toda serie absolutamente convergente es convergente)

EVT de dimensión finita  
○○○

EVT normables  
○○

Espacios localmente acotados  
○

Espacios localmente convexos  
○

EVT metrizables  
○○●○○

## Estabilidad y completación

## Estabilidad y completación

- $X$  EVT metrizable,  $M \subseteq X$  subespacio,  $M = \overline{M}$ :

$X$  F-espacio  $\iff M$  y  $X/M$  F-espacios

## Estabilidad y completación

- $X$  EVT metrizable,  $M \subseteq X$  subespacio,  $M = \overline{M}$ :

$$X \text{ F-espacio} \iff M \text{ y } X/M \text{ F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio

## Estabilidad y completación

- $X$  EVT metrizable,  $M \subseteq X$  subespacio,  $M = \overline{M}$ :

$$X \text{ F-espacio} \iff M \text{ y } X/M \text{ F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio

## Estabilidad y completación

- $X$  EVT metrizable,  $M \subseteq X$  subespacio,  $M = \overline{M}$ :

$$X \text{ F-espacio} \iff M \text{ y } X/M \text{ F-espacios}$$

- Todo producto numerable de F-espacios es un F-espacio
- Todo EVT metrizable es isomorfo a un subespacio denso de un (único) F-espacio
- Todo EVT separado es isomorfo a un subespacio denso de un (único) EVT separado y completo



## Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet = F-espacio localmente convexo  
= ELC completo metrizable

## Espacios de Fréchet

Espacio de Fréchet = F-espacio localmente convexo  
= ELC completo metrizable

## Hechos básicos

## Espacios de Fréchet

**Espacio de Fréchet** = F-espacio localmente convexo  
= ELC completo metrizable

## Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable  $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$  de seminormas

## Espacios de Fréchet

**Espacio de Fréchet** = F-espacio localmente convexo  
= ELC completo metrizable

## Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable  $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$  de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

## Espacios de Fréchet

**Espacio de Fréchet** = F-espacio localmente convexo  
= ELC completo metrizable

## Hechos básicos

- Un ELC es semimetrizable cuando su topología es la asociada a una familia numerable  $\{\nu_n : n \in \mathbb{N}\}$  de seminormas

$$\nu(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\nu_n(x(n))}{1 + \nu_n(x(n))}$$

- La clase de los espacios de Fréchet es estable por subespacios cerrados, cocientes separados y productos numerables

EVT de dimensión finita  
○○○

EVT normables  
○○

Espacios localmente acotados  
○

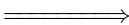
Espacios localmente convexos  
○

EVT metrizable  
○○○○●

ESPACIO DE DIMENSIÓN FINITA



SEMINORMABLE (seminorma)



LOCALMENTE ACOTADO (casinorma)



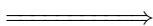
ELC SEMIMETRIZABLE  
(familia numerable de seminormas)



SEMIMETRIZABLE (pseudonorma)



ELC (familia de seminormas)



EVT (familia de pseudonormas)



## Tema 9: Ejemplos de EVT

- 1 Espacios de sucesiones
- 2 Familias sumables
- 3 Espacios de familias sumables
- 4 Otros espacios
- 5 Espacios de Hilbert



Espacios de sucesiones

●○○○○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Espacios $l_p$

## Espacios $l_p$

Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

Espacios  $l_p$ Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

Espacios  $l_p$ Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} = l_p \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios  $l_p$ Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} = l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

Espacios  $l_p$ Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} = l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_{\infty}(\mu) = \mathcal{L}_{\infty}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} = l_{\infty}$$

Espacios  $l_p$ Espacio de medida:  $\Omega = \mathbb{N}$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\mathbb{N})$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \mathbb{N} \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} = l_p \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\mathbb{N}} x d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)$$

$$L_{\infty}(\mu) = \mathcal{L}_{\infty}(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\} = l_{\infty}$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \omega$$

## El espacio $l_\infty$



## El espacio $l_\infty$

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

## El espacio $l_\infty$

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

## El espacio $l_\infty$

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

**Espacio de Banach** con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

**Convergencia uniforme** en  $\mathbb{N}$ :  $x_n \in l_\infty \forall n \in \mathbb{N}, x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

## El espacio $l_\infty$

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en  $\mathbb{N}$ :  $x_n \in l_\infty \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \text{uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

## El espacio $l_\infty$

$$l_\infty = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en  $\mathbb{N}$ :  $x_n \in l_\infty \forall n \in \mathbb{N}, x \in l_\infty$

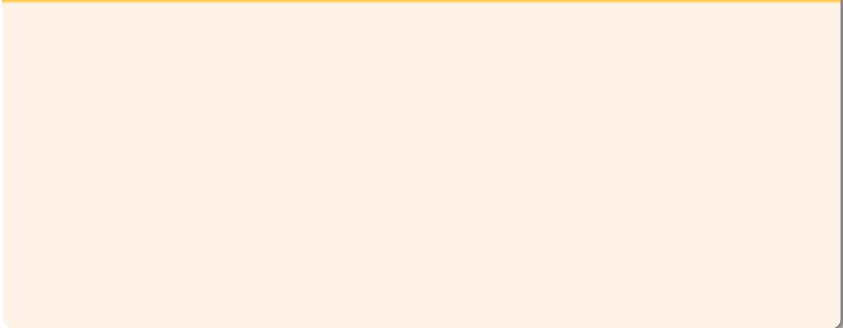
$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

$l_\infty$  no es separable:  $E, F \subseteq \mathbb{N}, E \neq F \Rightarrow \|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$

## Subespacios destacados de $l_\infty$



## Subespacios destacados de $l_\infty$

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$



Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \{x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0\}$$

Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}u \quad (u(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N})$$

Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}u \quad (u(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N})$$

## Observaciones

Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}u \quad (u(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N})$$

## Observaciones

- $c_0$  y  $c$  son espacios de Banach (subespacios cerrados de  $l_\infty$ )

Subespacios destacados de  $l_\infty$ 

Vectores unidad:  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ ,  $e_n(n) = 1$ ,  $e_n(k) = 0 \forall k \neq n$

$$c_{00} = \text{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^N \lambda_k e_k : N \in \mathbb{N}, \lambda_1, \dots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \exists \lim_{n \rightarrow \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}u \quad (u(n) = 1 \forall n \in \mathbb{N})$$

## Observaciones

- $c_0$  y  $c$  son espacios de Banach (subespacios cerrados de  $l_\infty$ )

- $c_{00}$  es denso en  $c_0$ :  $x \in c_0 \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$

Serie incondicionalmente convergente en  $c_0$ . Los vectores unidad forman una **base de Schauder**, de hecho una **base incondicional**, de  $c_0$

Espacios de sucesiones

○○●○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$



Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  tiene la topología asociada a:

Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**

Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**
- O mejor, la **casinorma**:  $\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$  que le convierte en un **espacio casi-Banach**

Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**

- O mejor, la **casinorma**:  $\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$  que le convierte en un **espacio casi-Banach**

$$\|x + y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\|_p + \|y\|_p) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Espacios  $l_p$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**

- O mejor, la **casinorma**:  $\|x\|_p = \left( \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$  que le convierte en un **espacio casi-Banach**

$$\|x + y\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}-1} (\|x\|_p + \|y\|_p) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p$  **no es localmente convexo**

## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}$  es un subespacio denso en  $l_p$ :

$$x \in l_p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

serie (incondicionalmente) convergente en  $l_p$ . Los vectores unidad forman una base (incondicional) de  $l_p$

## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}$  es un subespacio denso en  $l_p$ :

$$x \in l_p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

serie (incondicionalmente) convergente en  $l_p$ . Los vectores unidad forman una base (incondicional) de  $l_p$

- Dependencia de  $p$ :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p \Rightarrow x \in l_q, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$



## Espacios $l_p$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}$  es un subespacio denso en  $l_p$ :

$$x \in l_p \Rightarrow x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n) e_n$$

serie (incondicionalmente) convergente en  $l_p$ . Los vectores unidad forman una base (incondicional) de  $l_p$

- Dependencia de  $p$ :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p \Rightarrow x \in l_q, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

La inclusión  $l_p \subseteq l_q$  es estricta y el operador  $Id: l_p \rightarrow l_q$  es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

## Caso $p = 0$

Caso  $p = 0$ 

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

Caso  $p = 0$ 

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en  $\omega$  es la puntual:

$$[x_n - x]_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Caso  $p = 0$ 

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en  $\omega$  es la puntual:

$$[x_n - x]_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\omega$  es un **espacio de Fréchet** no normable

Caso  $p = 0$ 

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en  $\omega$  es la puntual:

$$[x_n - x]_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\omega$  es un **espacio de Fréchet** no normable

- $c_{00}$  es denso en  $\omega$  y  $\omega$  es separable

Caso  $p = 0$ 

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ , la topología producto es la asociada a la **pseudonorma**

$$[x]_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \quad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en  $\omega$  es la puntual:

$$[x_n - x]_0 \rightarrow 0 \Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(k) = x(k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$\omega$  es un **espacio de Fréchet** no normable

- $c_{00}$  es denso en  $\omega$  y  $\omega$  es separable
- Para  $0 < p < q < \infty$ , como espacios vectoriales:

$$c_{00} \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_{\infty} \subset \omega$$

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)



## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  **sumable**  $\iff \{S_J\}$  convergente

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable  $\iff \{S_J\}$  convergente

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \rightarrow x$$

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable  $\iff \{S_J\}$  convergente

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \rightarrow x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) : J \in \mathcal{F}(\Lambda), J \supseteq J_0 \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

## Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$  conjunto dirigido (por inclusión)

$X$  EVT separado,  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \quad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable  $\iff \{S_J\}$  convergente

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \rightarrow x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) : J \in \mathcal{F}(\Lambda), J \supseteq J_0 \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Condición de Cauchy:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) : K \in \mathcal{F}(\Lambda), K \cap J_0 = \emptyset \Rightarrow \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \in U$$

Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○●○○

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Hechos básicos

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud



## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nullos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores:  $X, Y$  EVT separados,  $T \in L(X, Y)$ ,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores:  $X, Y$  EVT separados,  $T \in L(X, Y)$ ,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores:  $X, Y$  EVT separados,  $T \in L(X, Y)$ ,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

(1) Subfamilias:  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \implies \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$  Cauchy

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores:  $X, Y$  EVT separados,  $T \in L(X, Y)$ ,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

- (1) Subfamilias:  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \implies \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$  Cauchy
- (2)  $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$  finito

## Hechos básicos

- Inmediatos: Sumas finitas, unicidad, sumandos nulos, complitud

- Linealidad: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda \in \Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda \in \Lambda} b_\lambda$$

- Incondicionalidad:  $\sigma : I \rightarrow \Lambda$  biyectiva,

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores:  $X, Y$  EVT separados,  $T \in L(X, Y)$ ,

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \text{ en } X \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda) \text{ en } Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:

- (1) Subfamilias:  $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \implies \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$  Cauchy
- (2)  $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$  finito
- (3) Si  $X$  es metrizable:  $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$  es numerable

Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○●○

Espacios de familias sumables  
○○○○○○

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
○○○○○

## Relación con las series



## Relación con las series

- $X$  EVT separado,  $\Lambda$  numerable. Para  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$  equivalen:
  - (a)  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable

## Relación con las series

- $X$  EVT separado,  $\Lambda$  numerable. Para  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$  equivalen:

(a)  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable

(b)  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$  biyectiva  $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$  converge.

Si se cumplen (a) y (b): 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

## Relación con las series

- $X$  EVT separado,  $\Lambda$  numerable. Para  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$  equivalen:

(a)  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable

(b)  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda$  biyectiva  $\Rightarrow \sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$  converge.

Si se cumplen (a) y (b): 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$$

- $X$  EVT metrizable. Para  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$  equivalen:

(a)  $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  sumable

(b)  $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$  es numerable y para cualquier biyección  $\sigma : \mathbb{N} \rightarrow \Lambda_1$  la serie  $\sum_{n \geq 1} x_{\sigma(n)}$  converge

Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○○●

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Sumabilidad absoluta

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

 $X$  EVT metrizable, con pseudonorma  $\nu$ :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

$X$  EVT metrizable, con pseudonorma  $\nu$ :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

## Sumabilidad y sumabilidad absoluta



## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

$X$  EVT metrizable, con pseudonorma  $\nu$ :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

## Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- $X$  F-espacio  $\iff$  toda familia absolutamente sumable es sumable

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

$X$  EVT metrizable, con pseudonorma  $\nu$ :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

## Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- $X$  F-espacio  $\iff$  toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable

## Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0, \infty[ \quad \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda = \sup \left\{ \sum_{\lambda \in J} \rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda) \right\}$$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \rho_\lambda < \infty$$

$X$  EVT metrizable, con pseudonorma  $\nu$ :

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda \in \Lambda} \nu(x_\lambda) < \infty$$

## Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- $X$  F-espacio  $\iff$  toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable
- **Teorema de Dvoretzky-Rogers (1950):** En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente, equivalentemente una familia sumable que no es absolutamente sumable

Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

●○○○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

Espacios  $l_p^\Lambda$

## Espacios $l_p^\Lambda$

Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu = \text{número de elementos}$

## Espacios $l_p^\Lambda$

Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

Espacios  $l_p^\Lambda$ 

Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios  $l_p^\Lambda$ Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$



Espacios  $l_p^\Lambda$ Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\} = l_\infty^\Lambda$$

Espacios  $l_p^\Lambda$ Espacio de medida:  $\Omega = \Lambda \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Lambda)$ ,  $\mu =$  número de elementos

$$x : \Lambda \rightarrow [0, \infty] \quad \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} = l_p^\Lambda \quad (0 < p < \infty)$$

$$x \in l_1 \implies \int_{\Lambda} x d\mu = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)$$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu) = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty \right\} = l_\infty^\Lambda$$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu) = \mathbb{K}^\Lambda$$

Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○○○

Espacios de familias sumables  
○●○○○○

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
○○○○○

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

**Espacio de Banach** con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

**Espacio de Banach** con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

**Convergencia uniforme** en  $\Lambda$ :  $x_n \in l_\infty^\Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

**Espacio de Banach** con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

**Convergencia uniforme** en  $\Lambda$ :  $x_n \in l_\infty^\Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

**Subespacio denso:**

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

## El espacio $l_\infty^\Lambda$

$$l_\infty^\Lambda = \{x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\}$$

**Espacio de Banach** con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

**Convergencia uniforme** en  $\Lambda$ :  $x_n \in l_\infty^\Lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \rightarrow 0 \iff \lim_{n \rightarrow \infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

**Subespacio denso:**

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\text{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

$\Lambda$  infinito  $\implies l_\infty^\Lambda$  **no es separable:**  $l_\infty \subseteq l_\infty^\Lambda$



Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

○○●○○○

Otros espacios

○○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Subespacios destacados de $l_\infty^\Lambda$

## Subespacios destacados de $l_\infty^\Lambda$

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

## Subespacios destacados de $l_\infty^\Lambda$

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Subespacios destacados de  $l_\infty^\Lambda$ 

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Subespacios destacados de  $l_\infty^\Lambda$ 

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \quad (u(\lambda) = 1 \forall \lambda \in \Lambda)$$

Subespacios destacados de  $l_\infty^\Lambda$ 

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \quad (u(\lambda) = 1 \forall \lambda \in \Lambda)$$

## Observaciones

## Subespacios destacados de $l_\infty^\Lambda$

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \quad (u(\lambda) = 1 \forall \lambda \in \Lambda)$$

## Observaciones

- $c_0(\Lambda)$  y  $c(\Lambda)$  son espacios de Banach (subespacios cerrados de  $l_\infty^\Lambda$ )

Subespacios destacados de  $l_\infty^\Lambda$ 

Vectores unidad:  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$ ,  $e_\lambda(\lambda) = 1$ ,  $e_\lambda(\delta) = 0 \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \text{Lin} \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \quad (u(\lambda) = 1 \forall \lambda \in \Lambda)$$

## Observaciones

- $c_0(\Lambda)$  y  $c(\Lambda)$  son espacios de Banach (subespacios cerrados de  $l_\infty^\Lambda$ )
- $c_{00}(\Lambda)$  es denso en  $c_0(\Lambda)$ :  $x \in c_0(\Lambda) \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$

Los vectores unidad forman una **base**, de  $c_0(\Lambda)$



Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○○○

Espacios de familias sumables  
○○○●○○

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
○○○○○

Espacios  $l_p^\Lambda$  con  $0 < p < \infty$

## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Espacios  $l_p^\Lambda$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p^\Lambda$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Espacios  $l_p^\Lambda$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p^\Lambda$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p^\Lambda$  tiene la topología asociada a:

Espacios  $l_p^\Lambda$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p^\Lambda$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p^\Lambda$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**

Espacios  $l_p^\Lambda$  con  $0 < p < \infty$ 

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p^\Lambda$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p^\Lambda$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**
- O la **casinorma**:  $\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$  que le convierte en un **espacio casi-Banach**

## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para  $1 \leq p < \infty$ ,  $l_p^\Lambda$  es un **espacio de Banach** con la **norma**:

$$\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \quad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para  $0 < p < 1$ ,  $l_p^\Lambda$  tiene la topología asociada a:

- La **pseudonorma**:  $[x]_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$  que le convierte en un **F-espacio**

- O la **casinorma**:  $\|x\|_p = \left( \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$  que le convierte en un **espacio casi-Banach**

Si  $\Lambda$  es infinito y  $0 < p < 1$ ,  $l_p^\Lambda$  **no es localmente convexo**

## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$



## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$  es un subespacio denso en  $l_p^\Lambda$ :

$$x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de  $l_p^\Lambda$

## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$  es un subespacio denso en  $l_p^\Lambda$ :

$$x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de  $l_p^\Lambda$

- Dependencia de  $p$ :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x \in l_q^\Lambda, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

## Espacios $l_p^\Lambda$ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$  es un subespacio denso en  $l_p^\Lambda$ :

$$x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

Los vectores unidad forman una base de  $l_p^\Lambda$

- Dependencia de  $p$ :

$$0 < p < q \leq \infty, x \in l_p^\Lambda \Rightarrow x \in l_q^\Lambda, \|x\|_q \leq \|x\|_p$$

Si  $\Lambda$  es infinito, la inclusión  $l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda$  es estricta y el operador  $Id: l_p^\Lambda \rightarrow l_q^\Lambda$  es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○○○

Espacios de familias sumables  
○○○○○●

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
○○○○○

## Caso $p = 0$

## Caso $p = 0$

- En  $\mathbb{K}^\Lambda$  es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si  $\Lambda$  no es numerable,  $\mathbb{K}^\Lambda$  **no es metrizable**

## Caso $p = 0$

- En  $\mathbb{K}^\Lambda$  es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si  $\Lambda$  no es numerable,  $\mathbb{K}^\Lambda$  **no es metrizable**
- Convergencia puntual:  $\{x_i\}$  red en  $\mathbb{K}^\Lambda$ ,  $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \rightarrow x \iff \{x_i(\lambda)\} \rightarrow x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Caso  $p = 0$ 

- En  $\mathbb{K}^\Lambda$  es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si  $\Lambda$  no es numerable,  $\mathbb{K}^\Lambda$  **no es metrizable**
- Convergencia puntual:  $\{x_i\}$  red en  $\mathbb{K}^\Lambda$ ,  $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \rightarrow x \iff \{x_i(\lambda)\} \rightarrow x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$  es denso en  $\mathbb{K}^\Lambda$ :

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

## Caso $p = 0$

- En  $\mathbb{K}^\Lambda$  es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si  $\Lambda$  no es numerable,  $\mathbb{K}^\Lambda$  **no es metrizable**
- Convergencia puntual:  $\{x_i\}$  red en  $\mathbb{K}^\Lambda$ ,  $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \rightarrow x \iff \{x_i(\lambda)\} \rightarrow x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$  es denso en  $\mathbb{K}^\Lambda$ :

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$  tiene la **propiedad de Heine-Borel**: todo subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{K}^\Lambda$  es compacto



## Caso $p = 0$

- En  $\mathbb{K}^\Lambda$  es natural considerar la topología producto, que le convierte en un **ELC separado y completo**. Si  $\Lambda$  no es numerable,  $\mathbb{K}^\Lambda$  **no es metrizable**
- Convergencia puntual:  $\{x_i\}$  red en  $\mathbb{K}^\Lambda$ ,  $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \rightarrow x \iff \{x_i(\lambda)\} \rightarrow x(\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$  es denso en  $\mathbb{K}^\Lambda$ :

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$  tiene la **propiedad de Heine-Borel**: todo subconjunto cerrado y acotado de  $\mathbb{K}^\Lambda$  es compacto
- Para  $0 < p < q < \infty$ , como espacios vectoriales:

$$c_{00}(\Lambda) \subseteq l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda \subseteq c_0(\Lambda) \subseteq c(\Lambda) \subseteq l_\infty^\Lambda \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$$

Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

●○

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Otros espacios

- ④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

## Otros espacios

- ④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.
  - Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

## Otros espacios

④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

- Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

- Llamamos  $C(\Omega)$  al espacio de las funciones continuas en  $\Omega$  y lo dotamos de la pseudonorma

$$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$

que lo convierte en un [espacio de Fréchet](#).

## Otros espacios

④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

- Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

- Llamamos  $C(\Omega)$  al espacio de las funciones continuas en  $\Omega$  y lo dotamos de la pseudonorma

$$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$

que lo convierte en un **espacio de Fréchet**.

- La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.

## Otros espacios

④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

- Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

- Llamamos  $C(\Omega)$  al espacio de las funciones continuas en  $\Omega$  y lo dotamos de la pseudonorma

$$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$

que lo convierte en un **espacio de Fréchet**.

- La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
- ② Para  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto, escribimos  $\mathcal{H}(\Omega)$  para denotar el espacio de las funciones holomorfas en  $\Omega$ .

## Otros espacios

④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

- Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

- Llamamos  $C(\Omega)$  al espacio de las funciones continuas en  $\Omega$  y lo dotamos de la pseudonorma

$$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$

que lo convierte en un **espacio de Fréchet**.

- La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
- ② Para  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto, escribimos  $\mathcal{H}(\Omega)$  para denotar el espacio de las funciones holomorfas en  $\Omega$ .
- Es un subespacio de  $C(\Omega)$  y lo dotamos entonces de la topología inducida.



## Otros espacios

④  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{K_n\}$  sucesión exhaustiva de compactos.

- Para cada  $f \in C(K_n)$ , notamos

$$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| : x \in K_n\}.$$

- Llamamos  $C(\Omega)$  al espacio de las funciones continuas en  $\Omega$  y lo dotamos de la pseudonorma

$$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1 + \|f\|_n}$$

que lo convierte en un **espacio de Fréchet**.

- La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
- ② Para  $\Omega \subset \mathbb{C}$  abierto, escribimos  $\mathcal{H}(\Omega)$  para denotar el espacio de las funciones holomorfas en  $\Omega$ .
- Es un subespacio de  $C(\Omega)$  y lo dotamos entonces de la topología inducida.
  - Así,  $\mathcal{H}(\Omega)$  se convierte en un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.

Espacios de sucesiones

○○○○○○

Familias sumables

○○○○

Espacios de familias sumables

○○○○○○

Otros espacios

○●

Espacios de Hilbert

○○○○○

## Otros espacios II

## Otros espacios II

- ③  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $C^\infty(\Omega)$  espacio de las funciones de clase  $C^\infty$  dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.

## Otros espacios II

- ③  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $C^\infty(\Omega)$  espacio de las funciones de clase  $C^\infty$  dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.
- ④  $K$  compacto en  $\Omega$ , llamamos  $\mathcal{D}(K)$  al subespacio de  $C^\infty(\Omega)$  formado por las funciones cuyo soporte está en  $\Omega$ . Con la topología inducida, es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.

## Otros espacios II

- 3  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $C^\infty(\Omega)$  espacio de las funciones de clase  $C^\infty$  dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.
- 4  $K$  compacto en  $\Omega$ , llamamos  $\mathcal{D}(K)$  al subespacio de  $C^\infty(\Omega)$  formado por las funciones cuyo soporte está en  $\Omega$ . Con la topología inducida, es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.
- 5 El **espacio de las funciones test** es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

## Otros espacios II

- ③  $\Omega$  abierto de  $\mathbb{R}^d$ ,  $C^\infty(\Omega)$  espacio de las funciones de clase  $C^\infty$  dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.
- ④  $K$  compacto en  $\Omega$ , llamamos  $\mathcal{D}(K)$  al subespacio de  $C^\infty(\Omega)$  formado por las funciones cuyo soporte está en  $\Omega$ . Con la topología inducida, es un **espacio de Fréchet** que verifica la **propiedad de Heine-Borel**.
- ⑤ El **espacio de las funciones test** es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \text{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

- **¿Qué topología le asociamos que lo haga completo?** el supremo de las topologías localmente convexas que hacen continuas todas las inclusiones  $\mathcal{D}(K) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$  (“límite inductivo de espacios de Fréchet”).
- ⑥ El espacio de las distribuciones,  $\mathcal{D}'(\Omega)$ , es el “espacio dual” de  $\mathcal{D}(\Omega)$ .

Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○○○

Espacios de familias sumables  
○○○○○○

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
●○○○○

## Espacio pre-hilbertiano



## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**:

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**:  
aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**:  
aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

(1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**:  
aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**:  
aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
 $(x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )



## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )

## Norma de un espacio pre-hilbertiano

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )

## Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X)$$

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )

## Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X)$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz:**

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )

## Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X)$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

**Espacio de Hilbert** cuando la norma es completa

## Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial  $X$  con un **producto escalar**: aplicación de  $X \times X$  en  $\mathbb{K}$ ,  $(x, y) \mapsto (x|y)$ , verificando:

- (1) Lineal en la primera variable:  $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$
- (2) Conjugado-lineal en la segunda:  $(x|\alpha y + z) = \bar{\alpha}(x|y) + (x|z)$   
 ((1) + (2) = **forma sesquilineal**; si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  **bilineal**)
- (3) **Hermítica**:  $(y|x) = \overline{(x|y)}$  (**simétrica** si  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ )  
 ( $x \mapsto (x|x)$ , de  $X$  en  $\mathbb{R}$  **forma cuadrática**)
- (4) **Definida positiva**:  $(x|x) > 0$  ( $x \neq 0$ )

## Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \quad (x \in X)$$

**Desigualdad de Cauchy-Schwartz**:

$$|(x|y)| \leq \|x\| \|y\|$$

**Espacio de Hilbert** cuando la norma es completa

**Polarización**:  $\operatorname{Re}(x|y) = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$ ;  $\operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy)$

## Teorema de Jordan-von Neumann

## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica

## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$



## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

## Ejemplos

## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

## Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida no trivial:

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, 0 < \mu(A) < \infty, 0 < \mu(B) < \infty$$

## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

## Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida no trivial:

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, 0 < \mu(A) < \infty, 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu) \text{ Espacio de Hilbert} \iff p = 2$$

## Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado  $(X, \|\cdot\|)$  es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la **identidad del paralelogramo**:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x, y \in X$$

## Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida no trivial:

$$\exists A, B \in \mathcal{A} : A \cap B = \emptyset, 0 < \mu(A) < \infty, 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu) \text{ Espacio de Hilbert} \iff p = 2$$

Producto escalar en  $L_2(\mu)$ :

$$(f|g) = \int_{\Omega} f \bar{g} d\mu \quad (f, g \in L_2(\mu)); \quad (x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda) \overline{y(\lambda)} \quad (x, y \in l_2^{\Lambda})$$

## Teorema de la Proyección Ortogonal

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si  $M$  es un subespacio cerrado:  $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$ ,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$



## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si  $M$  es un subespacio cerrado:  $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M,$

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$  suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in X)$$

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si  $M$  es un subespacio cerrado:  $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$ ,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$  suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in X)$$

- **Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado**

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si  $M$  es un subespacio cerrado:  $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$ ,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$  suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in X)$$

- **Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado**

## Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

## Teorema de la Proyección Ortogonal

- **Aproximación óptima.** Hilbert  $H \supseteq C$  convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists! P_C(x) \in C : \|x - P_C(x)\| = \min \{\|x - y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$  se caracteriza por:  $\operatorname{Re}(x - P_C(x)|y - P_C(x)) \leq 0 \quad \forall y \in C$
- Si  $M$  es un subespacio cerrado:  $(x - P_M(x)|m) = 0 \quad \forall m \in M$ ,

$$x - P_M(x) \in M^\perp := \{z \in H : (z|m) = 0 \quad \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^\perp$  suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \quad (x \in X)$$

- **Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado**

## Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Un espacio de Banach  $X$  es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, todo subespacio cerrado de  $X$  está complementado en  $X$ .

Espacios de sucesiones  
○○○○○○

Familias sumables  
○○○○

Espacios de familias sumables  
○○○○○○

Otros espacios  
○○

Espacios de Hilbert  
○○●○

## Sistemas y bases ortonormales

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  sistema ortonormal:

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además,  $X = \overline{\text{Lin}(E)}$



## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  **sistema ortonormal**:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

**Base ortonormal** cuando, además,  $X = \overline{\text{Lin}(E)}$

## Propiedades de los sistemas ortonormales

$H$  Hilbert,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$  ortonormal,  $M = \overline{\text{Lin}(E)}$ ,  $x \in H$ .

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  **sistema ortonormal**:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

**Base ortonormal** cuando, además,  $X = \overline{\text{Lin}(E)}$

## Propiedades de los sistemas ortonormales

$H$  Hilbert,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$  ortonormal,  $M = \overline{\text{Lin}(E)}$ ,  $x \in H$ .

- **Desigualdad de Bessel**: 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x | e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2$$

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  **sistema ortonormal**:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

**Base ortonormal** cuando, además,  $X = \overline{\text{Lin}(E)}$

## Propiedades de los sistemas ortonormales

$H$  Hilbert,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$  ortonormal,  $M = \overline{\text{Lin}(E)}$ ,  $x \in H$ .

- **Desigualdad de Bessel:** 
$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2$$
- **Proyección ortogonal sobre  $M$ :** 
$$P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda$$

## Sistemas y bases ortonormales

$X$  espacio pre-hilbertiano,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$  **sistema ortonormal**:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \quad \|e_\lambda\| = 1 \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

**Base ortonormal** cuando, además,  $X = \overline{\text{Lin}(E)}$

## Propiedades de los sistemas ortonormales

$H$  Hilbert,  $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$  ortonormal,  $M = \overline{\text{Lin}(E)}$ ,  $x \in H$ .

- **Desigualdad de Bessel:**  $\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leq \|x\|^2$
- **Proyección ortogonal sobre  $M$ :**  $P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda$
- $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$



## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Clasificación de los espacios de Hilbert

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: **dimensión hilbertiana**.

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: **dimensión hilbertiana**.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana

## Bases ortonormales

$H$  espacio de Hilbert,  $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$  base ortonormal:

- **Igualdad de Bessel:**  $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- **Igualdad de Parseval:**  $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- **Desarrollo de Fourier:**  $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen:  $H \equiv l_2^\Lambda$

## Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: **dimensión hilbertiana**.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana
- Salvo isomorfismos isométricos, los únicos espacios de Hilbert separables son  $l_2^N$  con  $N \in \mathbb{N}$  y  $l_2$

## Tema 10: El Teorema de Hahn-Banach

## 1 Versión analítica

- Enunciado del teorema
- Consecuencias
- Sistemas ecuaciones lineales
- Aplicaciones

## 2 Versión geométrica

- Separación de convexos
- Teoremas Generales de Separación
- Hiperplanos de soporte
- Separación fuerte
- Aplicación: La integral de Pettis



## Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

### Funcional sublineal

$X$  espacio vectorial,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $x \in X$ .

## Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

### Funcional sublineal

$X$  espacio vectorial,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $x \in X$ .

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

## Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

### Funcional sublineal

$X$  espacio vectorial,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $x \in X$ .

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

### Teorema de Hahn-Banach, 1929

$X$  e.v.  $p$  funcional sublineal en  $X$ .

Si  $M$  es un subespacio de  $X$  y  $g \in M^\sharp$  verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leq p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe  $f \in X^\sharp$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$  y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leq p(x) \quad (x \in X).$$

## Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

### Funcional sublineal

$X$  espacio vectorial,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $x \in X$ .

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

### Teorema de Hahn-Banach, 1929

$X$  e.v.  $p$  funcional sublineal en  $X$ .

Si  $M$  es un subespacio de  $X$  y  $g \in M^\sharp$  verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leq p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe  $f \in X^\sharp$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$  y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leq p(x) \quad (x \in X).$$

★ En otras palabras, todo funcional lineal en  $M$  dominado por  $p$  se puede extender a un funcional lineal en  $X$  que sigue estando dominado por  $p$ .

## Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

### Funcional sublineal

$X$  espacio vectorial,  $p: X \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

- $p(x+y) \leq p(x) + p(y)$  para  $x, y \in X$ .
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$  para  $\alpha \geq 0$  y  $x \in X$ .

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

### Teorema de Hahn-Banach, 1929

$X$  e.v.  $p$  funcional sublineal en  $X$ .

Si  $M$  es un subespacio de  $X$  y  $g \in M^\sharp$  verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leq p(m) \quad (m \in M),$$

entonces existe  $f \in X^\sharp$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$  y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leq p(x) \quad (x \in X).$$

★ En otras palabras, todo funcional lineal en  $M$  dominado por  $p$  se puede extender a un funcional lineal en  $X$  que sigue estando dominado por  $p$ .

★ Si  $p$  es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leq p(x) \quad (x \in X).$$

# Consecuencias en espacios normados

## Consecuencias en espacios normados

### Teorema de Hahn, 1927

$X$  un espacio normado,  $Y$  subespacio de  $X$  y  $g \in Y^*$ . entonces existe  $f \in X^*$  con  $\|f\| = \|g\|$  y tal que  $f(y) = g(y)$  para todo  $y \in Y$ .

## Consecuencias en espacios normados

### Teorema de Hahn, 1927

$X$  un espacio normado,  $Y$  subespacio de  $X$  y  $g \in Y^*$ . entonces existe  $f \in X^*$  con  $\|f\| = \|g\|$  y tal que  $f(y) = g(y)$  para todo  $y \in Y$ .

### Corolario

$X$  un espacio normado,  $Y$  subespacio cerrado de  $X$ . Si  $x_0 \in X \setminus Y$ , entonces existe  $f \in S_{X^*}$  tal que  $f(x_0) = \text{dist}(x_0, Y)$  e  $Y \subseteq \ker(f)$ .



## Consecuencias en espacios normados

### Teorema de Hahn, 1927

$X$  un espacio normado,  $Y$  subespacio de  $X$  y  $g \in Y^*$ . entonces existe  $f \in X^*$  con  $\|f\| = \|g\|$  y tal que  $f(y) = g(y)$  para todo  $y \in Y$ .

### Corolario

$X$  un espacio normado,  $Y$  subespacio cerrado de  $X$ . Si  $x_0 \in X \setminus Y$ , entonces existe  $f \in S_{X^*}$  tal que  $f(x_0) = \text{dist}(x_0, Y)$  e  $Y \subseteq \ker(f)$ .

### Corolario

$X$  un espacio normado no trivial. Entonces, para cada  $x \in X \setminus \{0\}$  existe  $f \in S_{X^*}$  tal que  $f(x) = \|x\|$ . Equivalentemente, se tiene la siguiente expresión para la norma de  $X$ :

$$\|x\| = \text{máx}\{|f(x)| : f \in S_{X^*}\} \quad (x \in X).$$

# Consecuencias en EVT

# Consecuencias en EVT

## Observaciones

$X$  EVT.

## Consecuencias en EVT

### Observaciones

$X$  EVT.

- Si  $f \in X^* \setminus \{0\}$ ,

$$\varphi(x) = |f(x)| \quad (x \in X)$$

es una seminorma continua en  $X$ .

## Consecuencias en EVT

### Observaciones

$X$  EVT.

- Si  $f \in X^* \setminus \{0\}$ ,

$$\varphi(x) = |f(x)| \quad (x \in X)$$

es una seminorma continua en  $X$ .

- Si  $\varphi \neq 0$  es cualquier seminorma continua en  $X$ , el conjunto

$$U = \{x \in X : \varphi(x) < 1\}$$

es un entorno convexo de cero en  $X$  y  $U \neq X$ .

## Consecuencias en EVT

### Observaciones

$X$  EVT.

- Si  $f \in X^* \setminus \{0\}$ ,

$$\varphi(x) = |f(x)| \quad (x \in X)$$

es una seminorma continua en  $X$ .

- Si  $\varphi \neq 0$  es cualquier seminorma continua en  $X$ , el conjunto

$$U = \{x \in X : \varphi(x) < 1\}$$

es un entorno convexo de cero en  $X$  y  $U \neq X$ .

- **Consecuencia del T<sup>a</sup> de Hahn-Banach:**

Si  $U$  es un entorno de cero convexo en  $X$ ,  $U \neq X$ , y  $x_0 \notin U$ , entonces existe  $f \in X^*$  tal que

$$\operatorname{Re} f(x) \leq 1 \quad (x \in U) \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} f(x_0) \geq 1.$$

## Consecuencias en EVT. II

## Consecuencias en EVT. II

### Proposition

$X$  EVT. Equivalen:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- Para cada  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  existe una seminorma continua  $\varphi$  en  $X$  tal que  $\varphi(x_0) \neq 0$ .
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en  $X$  es  $\{0\}$ .



## Consecuencias en EVT. II

### Proposition

$X$  EVT. Equivalen:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- Para cada  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  existe una seminorma continua  $\varphi$  en  $X$  tal que  $\varphi(x_0) \neq 0$ .
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en  $X$  es  $\{0\}$ .

### Corolario

$X$  ELC. Son equivalentes:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- $X$  es separado.

## Consecuencias en EVT. II

### Proposition

$X$  EVT. Equivalen:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- Para cada  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  existe una seminorma continua  $\varphi$  en  $X$  tal que  $\varphi(x_0) \neq 0$ .
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en  $X$  es  $\{0\}$ .

### Corolario

$X$  ELC. Son equivalentes:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- $X$  es separado.

### Ejemplos

- Para  $0 < p < 1$ ,  $\ell_p$  no es localmente convexo aunque  $\ell_p^*$  separa puntos.
- Para  $0 < p < 1$ , el espacio  $L_p[0,1]$  tiene dual  $\{0\}$ .

## Consecuencias en EVT. II

### Proposition

$X$  EVT. Equivalen:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- Para cada  $x_0 \in X \setminus \{0\}$  existe una seminorma continua  $\varphi$  en  $X$  tal que  $\varphi(x_0) \neq 0$ .
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en  $X$  es  $\{0\}$ .

### Corolario

$X$  ELC. Son equivalentes:

- $X^*$  separa los puntos de  $X$ .
- $X$  es separado.

### Ejemplos

- Para  $0 < p < 1$ ,  $\ell_p$  no es localmente convexo aunque  $\ell_p^*$  separa puntos.
- Para  $0 < p < 1$ , el espacio  $L_p[0,1]$  tiene dual  $\{0\}$ .

La teoría de dualidad se ha desarrollado tradicionalmente en el ambiente de los ELC separados.

## Consecuencias en EVT. III

## Consecuencias en EVT. III

### Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

$X$  un ELC,  $M$  un subespacio de  $X$  y  $g \in M^*$ . Existe  $f \in X^*$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$ .

## Consecuencias en EVT. III

### Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

$X$  un ELC,  $M$  un subespacio de  $X$  y  $g \in M^*$ . Existe  $f \in X^*$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$ .

$X$  ELC,  $A \subseteq X$ , el **anulador** de  $A$  es

$$A^\perp := \{f \in X^* : f(A) = 0\}.$$

## Consecuencias en EVT. III

### Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

$X$  un ELC,  $M$  un subespacio de  $X$  y  $g \in M^*$ . Existe  $f \in X^*$  cuya restricción a  $M$  coincide con  $g$ .

$X$  ELC,  $A \subseteq X$ , el **anulador** de  $A$  es

$$A^\perp := \{f \in X^* : f(A) = 0\}.$$

### Corolario: caracterización dual del cierre de un subespacio

Sea  $X$  un ELC y  $M$  un subespacio de  $X$ . Se verifica que:

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \ker f.$$

En particular,  $M$  es denso en  $X$  si, y sólo si,  $M^\perp = \{0\}$ .

## Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio



## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

Como espacios vectoriales:  $M^* \cong X^*/M^\perp$

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

Como espacios vectoriales:  $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Si  $X$  es un espacio normado la identificación anterior es **isométrica**

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

Como espacios vectoriales:  $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Si  $X$  es un espacio normado la identificación anterior es **isométrica**

### Dual de un cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ . Como espacios vectoriales:

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

Como espacios vectoriales:  $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Si  $X$  es un espacio normado la identificación anterior es **isométrica**

### Dual de un cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ . Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^\perp$$

## Duales de subespacios y cocientes

### Dual de un subespacio

$X$  ELC,  $M$  subespacio de  $X$ ,  $M^\perp = \{f \in X^* : f(M) = \{0\}\}$

Como espacios vectoriales:  $M^* \equiv X^*/M^\perp$

Si  $X$  es un espacio normado la identificación anterior es **isométrica**

### Dual de un cociente

$X$  EVT,  $M$  subespacio vectorial de  $X$ . Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^\perp$$

Si  $X$  es un espacio normado la identificación anterior es **isométrica**

# Sistemas de ecuaciones lineales. I



# Sistemas de ecuaciones lineales. I

## Teorema de Hahn, 1927

$X$  espacio normado,  $A = \{z_i : i \in I\} \subset X$  y  $\{c_i : i \in I\} \subset \mathbb{K}$ . Equivalen:

- Existe  $f$  en  $X^*$  tal que  $f(z_i) = c_i$  para todo  $i \in I$ .
- Existe  $M \geq 0$  verificando

$$|\alpha_1 c_{i_1} + \cdots + \alpha_n c_{i_n}| \leq M \|\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}\|$$

para cualquier combinación lineal  $\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}$  de elementos de  $A$ .

En este caso, se puede elegir  $f$  de forma que  $\|f\| \leq M$ .

## Sistemas de ecuaciones lineales. II

## Sistemas de ecuaciones lineales. II

### Teorema de Helly, 1921

$X$  espacio normado,  $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$  y  $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ . Equivalen:

- Existe  $x$  en  $X$  tal que  $f_k(x) = c_k$  para  $k = 1, 2, \dots, n$ .
- Existe  $M \geq 0$  tal que

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k c_k \right| \leq M \left\| \sum_{k=1}^n a_k f_k \right\|$$

para cualesquiera  $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ .

En este caso,  $\forall \varepsilon > 0$  se puede elegir  $x$  tal que  $\|x\| \leq M + \varepsilon$ .

## Límites generalizados

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**



## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal
- (2)  $\inf \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq f(x) \leq \sup \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in l_\infty$

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal
- (2)  $\inf \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq f(x) \leq \sup \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in l_\infty$
- (3)  $f(x^{(k)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ , donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal
- (2)  $\inf \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq f(x) \leq \sup \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in l_\infty$
- (3)  $f(x^{(k)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ , donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que  $f \in l_\infty^*$ ,  $\|f\| = 1$  y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq f(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

## Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ,  $l_\infty$  espacio de Banach:  $\|x\|_\infty = \sup \{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\}$  ( $x \in l_\infty$ )

$c$  subespacio de  $l_\infty$ . Funcional:  $g(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n)$  ( $y \in c$ )

$g \in c^*$ ,  $\|g\| = 1$ . Por tanto:  $\exists h \in l_\infty^* : \|h\| = 1, h(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que  $h$  es un **límite generalizado**

## Límites de Banach

Existe un funcional  $f : l_\infty \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal
- (2)  $\inf \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leq f(x) \leq \sup \{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in l_\infty$
- (3)  $f(x^{(k)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty, \forall k \in \mathbb{N}$ , donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que  $f \in l_\infty^*$ ,  $\|f\| = 1$  y

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} x(n) \leq f(x) \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

En particular  $f(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} y(n) \quad \forall y \in c$ . Se dice que  $f$  es un **límite de Banach**

## Medias invariantes



## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_{\infty}^{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_{\infty}^{\Lambda} \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que  $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$  con  $\|f\| = 1$

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que  $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$  con  $\|f\| = 1$

## Medidas finitamente aditivas

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que  $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$  con  $\|f\| = 1$

## Medidas finitamente aditivas

Existe una función  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  que verifica las siguientes condiciones:

## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

- (1)  $f$  es lineal
- (2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$
- (3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que  $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$  con  $\|f\| = 1$

## Medidas finitamente aditivas

Existe una función  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  que verifica las siguientes condiciones:

- (a) Es **finitamente aditiva**:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$



## Medias invariantes

$(\Lambda, +)$  semigrupo abeliano. Existe un funcional  $f : l_\infty^\Lambda \rightarrow \mathbb{R}$  verificando:

(1)  $f$  es lineal

(2)  $\inf \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leq f(x) \leq \sup \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3)  $f(x^{(\gamma)}) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty^\Lambda, \forall \gamma \in \Lambda$  donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda + \gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que  $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$  con  $\|f\| = 1$

## Medidas finitamente aditivas

Existe una función  $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, 1]$  que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es **finitamente aditiva**:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(b) Es **invariante por traslaciones**:

$$A \subset \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R} \implies \mu(A + x) = \mu(A)$$

# Separación de conjuntos convexos

## Planteamiento del problema

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

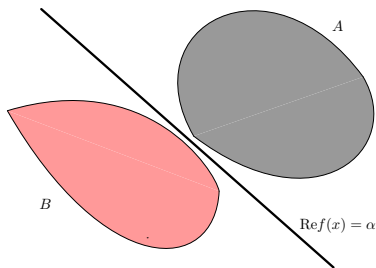
$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$





## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$

### Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$

### Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$ ,  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  vectores unidad,  $B = \{0\}$ ,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \alpha_N > 0 \right\}$$

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$

### Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$ ,  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  vectores unidad,  $B = \{0\}$ ,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \alpha_N > 0 \right\}$$

$A$  y  $B$  son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de  $c_{00}$  pero

## Separación de conjuntos convexos

### Planteamiento del problema

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal, con  $f \neq 0$ , y  $\alpha \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B?$$

Equivalentemente:  $\sup \operatorname{Re} f(A) \leq \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien:  $\operatorname{Re} f(a) \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$

En caso afirmativo  $f$  **separa**  $A$  y  $B$ .

El hiperplano afín (real) de ecuación  $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$  también **separa**  $A$  y  $B$

### Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$ ,  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  vectores unidad,  $B = \{0\}$ ,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^N \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \alpha_N > 0 \right\}$$

$A$  y  $B$  son subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de  $c_{00}$  pero

$$f : c_{00} \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal, } f \neq 0 \implies f(A) = \mathbb{R}$$

# Teoremas de Separación

## Separación en espacios vectoriales

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$



## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

### Separación en EVT

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

### Separación en EVT

$X$  EVT,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos.

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

### Separación en EVT

$X$  EVT,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos.

Supongamos que  $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ , que  $B \neq \emptyset$  y que  $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$ .

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

### Separación en EVT

$X$  EVT,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos.

Supongamos que  $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ , que  $B \neq \emptyset$  y que  $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$ .

Entonces existen  $f \in X^*$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

## Teoremas de Separación

### Separación en espacios vectoriales

$X$  espacio vectorial,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe  $a_0 \in A$  tal que  $A - a_0$  es absorbente.

Entonces podemos separar  $A$  y  $B$ : existen  $f : X \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

### Separación en EVT

$X$  EVT,  $A$  y  $B$  subconjuntos convexos.

Supongamos que  $\operatorname{int} A \neq \emptyset$ , que  $B \neq \emptyset$  y que  $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$ .

Entonces existen  $f \in X^*$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

De hecho, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \quad \forall x \in \operatorname{int} A$$

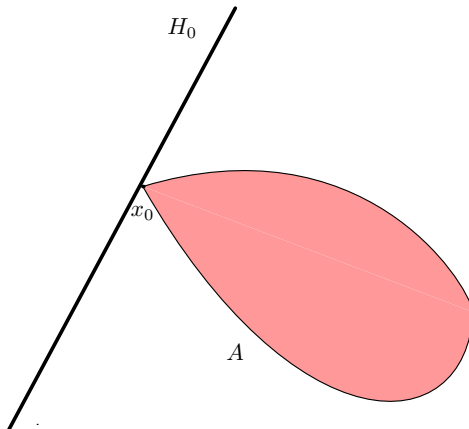
## Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .



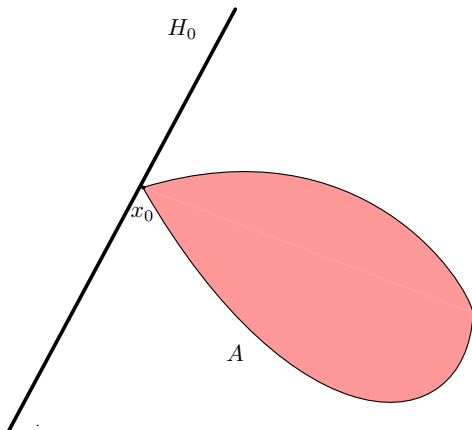
## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$





## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx } \{\text{Re } f(a) : a \in A\}$$

### Versión geométrica del THB

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

Existe un hiperplano cerrado  $H \subset X$  tal que  $M \subset H$  y  $A \cap H = \emptyset$

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

Existe un hiperplano cerrado  $H \subset X$  tal que  $M \subset H$  y  $A \cap H = \emptyset$

### Separación en dimensión finita

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

Existe un hiperplano cerrado  $H \subset X$  tal que  $M \subset H$  y  $A \cap H = \emptyset$

### Separación en dimensión finita

$A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de  $\mathbb{K}^N$ .

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

Existe un hiperplano cerrado  $H \subset X$  tal que  $M \subset H$  y  $A \cap H = \emptyset$

### Separación en dimensión finita

$A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de  $\mathbb{K}^N$ .

Existen  $f : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\text{Re } f(a) \leq \gamma \leq \text{Re } f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

## Primeras consecuencias

### Funcionales de soporte

$X$  EVT,  $A$  subconjunto convexo,  $\text{int } A \neq \emptyset$ ,  $x_0 \in \partial A$ .

Existe  $f \in X^*$ ,  $f \neq 0$ , tal que:

$$\text{Re } f(x_0) = \text{máx} \{ \text{Re } f(a) : a \in A \}$$

### Versión geométrica del THB

$X$  EVT,  $A$  subconjunto no vacío, abierto y convexo,  $M$  variedad afín tal que  $A \cap M = \emptyset$ .

Existe un hiperplano cerrado  $H \subset X$  tal que  $M \subset H$  y  $A \cap H = \emptyset$

### Separación en dimensión finita

$A$  y  $B$  subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de  $\mathbb{K}^N$ .

Existen  $f : \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}$  lineal,  $f \neq 0$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\text{Re } f(a) \leq \gamma \leq \text{Re } f(b) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

Equivalentemente, existen  $u \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$  y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que

$$\text{Re}(a|u) \leq \gamma \leq \text{Re}(b|u) \quad \forall a \in A, \forall b \in B$$

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC



## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto.

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto.

Existen  $f \in X^*$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto.

Existen  $f \in X^*$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

### Separación fuerte en espacios normados

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto.

Existen  $f \in X^*$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

### Separación fuerte en espacios normados

$X$  espacio normado,  $A, B$  subconjuntos no vacíos, convexos.

## Separación fuerte

### Separación fuerte en ELC

$X$  ELC,  $A, B$  subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que  $A$  es cerrado y  $B$  es compacto.

Existen  $f \in X^*$  y  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  tales que:

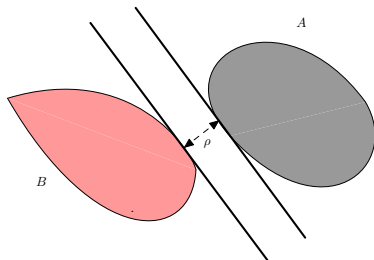
$$\operatorname{Re} f(a) \leq \alpha < \beta \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

### Separación fuerte en espacios normados

$X$  espacio normado,  $A, B$  subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que  $A$  y  $B$  están a distancia positiva:  $d(A, B) = \rho > 0$ .

## Separación fuerte



### Separación fuerte en espacios normados

$X$  espacio normado,  $A, B$  subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que  $A$  y  $B$  están a distancia positiva:  $d(A, B) = \rho > 0$ .

Entonces, existen  $f \in X^*$ , con  $\|f\| = 1$ , y  $\gamma \in \mathbb{R}$  tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leq \gamma < \gamma + \rho \leq \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

# Integral de Pettis

## Integración débil



# Integral de Pettis

## Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $X$  ELC separado,  $\varphi : \Omega \rightarrow X$ .

# Integral de Pettis

## Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $X$  ELC separado,  $\varphi : \Omega \rightarrow X$ .

- $\varphi$  débilmente medible  $\iff f \circ \varphi$  medible  $\forall f \in X^*$
- $\varphi$  débilmente integrable  $\iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu) \forall f \in X^*$

# Integral de Pettis

## Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $X$  ELC separado,  $\varphi : \Omega \rightarrow X$ .

- $\varphi$  débilmente medible  $\iff f \circ \varphi$  medible  $\forall f \in X^*$
- $\varphi$  débilmente integrable  $\iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu) \forall f \in X^*$
- $\varphi$  es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe  $x \in X$  tal que

$$f(x) = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) d\mu \quad \forall f \in X^*$$

# Integral de Pettis

## Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  espacio de medida,  $X$  ELC separado,  $\varphi : \Omega \rightarrow X$ .

- $\varphi$  **débilmente medible**  $\iff f \circ \varphi$  medible  $\forall f \in X^*$
- $\varphi$  **débilmente integrable**  $\iff f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu) \forall f \in X^*$
- $\varphi$  es **integrable en el sentido de Pettis** cuando es débilmente integrable y existe  $x \in X$  tal que

$$f(x) = \int_{\Omega} (f \circ \varphi) d\mu \quad \forall f \in X^*$$

El vector  $x$  es único, se le llama **integral de Pettis** de  $\varphi$  con respecto a  $\mu$ :

$$x = \int_{\Omega} \varphi d\mu$$

# Integral de Pettis

## Existencia de la integral

# Integral de Pettis

## Existencia de la integral

$X$  ELC separado y **completo**

# Integral de Pettis

## Existencia de la integral

$X$  ELC separado y **completo**

$K$  espacio topológico **compacto** de Hausdorff

## Integral de Pettis

### Existencia de la integral

$X$  ELC separado y **completo**

$K$  espacio topológico **compacto** de Hausdorff

$\mu$  medida de Borel positiva y **finita** en  $K$



## Integral de Pettis

### Existencia de la integral

$X$  ELC separado y **completo**

$K$  espacio topológico **compacto** de Hausdorff

$\mu$  medida de Borel positiva y **finita** en  $K$

Toda función **continua** de  $K$  en  $X$  es integrable en el sentido de Pettis.

## Integral de Pettis

### Existencia de la integral

$X$  ELC separado y **completo**

$K$  espacio topológico **compacto** de Hausdorff

$\mu$  medida de Borel positiva y **finita** en  $K$

Toda función **continua** de  $K$  en  $X$  es integrable en el sentido de Pettis.

Suponiendo, sin perder generalidad,  $\mu(K) = 1$ , para toda función continua  $\varphi : K \rightarrow X$  se tiene:

$$\int_K \varphi d\mu \in \overline{\text{co } \varphi(K)}$$

## Tema 11: Teoremas de la Aplicación Abierta y Gráfica Cerrada

- 1 Lema de Categoría de Baire
  - Nociones de categoría
  - Lema de Baire y primeras aplicaciones
  
- 2 Teorema de la Aplicación Abierta
  - Esquema de la demostración
  - Versiones del Teorema
  - Aplicación a series de Fourier
  - Aplicación a ecuaciones diferenciales
  
- 3 Teorema de la Gráfica Cerrada
  - Enunciado del Teorema
  - Ejemplos de aplicación

## Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$



## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

(1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^{\text{a}}$  categoría en  $E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de 2ª categoría en  $E$
- (2)  $A$  de 1ª categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^{\text{a}}$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^{\text{a}}$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^{\text{a}}$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^{\text{a}}$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$
- (4)  $G_n = \text{ int } G_n, \overline{G_n} = E \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^a$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^a$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } (\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$
- (4)  $G_n = \text{ int } G_n, \overline{G_n} = E \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Se dice que  $E$  es un **espacio de Baire** cuando las verifica. En particular, un espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo



## Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire



## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)



## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

- “Abundan” las funciones continuas no derivables así como las de clase  $C^\infty$  no analíticas

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

- “Abundan” las funciones continuas no derivables así como las de clase  $C^\infty$  no analíticas
- La dimensión de un F-espacio (en particular, de un espacio de Banach) es finita o no numerable

## Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)



## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$$T \text{ casi-abierta} \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y, Y \text{ F-espacio}$$

## Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

## Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio



## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de 2ª categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de 2ª categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$



## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = \overline{T(X)} \implies T$  homomorfismo

# Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema



# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?

- Lema de Riemann-Lebesgue:  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0 \quad (\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}))$

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?

- Lema de Riemann-Lebesgue:  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0 \quad (\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}))$
- Teorema de unicidad:  $f, g \in L_1, \hat{f} = \hat{g} \implies f = g$  (c.p.d.)

## Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos



## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo
- Luego  $T(L_1)$  es de 1ª categoría en  $c_0(\mathbb{Z})$

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo
- Luego  $T(L_1)$  es de 1ª categoría en  $c_0(\mathbb{Z})$
- Entre las series trigonométricas con coeficientes tendiendo a cero las series de Fourier son “atípicas”. El lema de Riemann-Lebesgue está muy lejos de caracterizar las series de Fourier.

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$     (CC):  $x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única



## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coefficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coefficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo
- Problema bien planteado  $\iff T$  biyectivo

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo
- Problema bien planteado  $\iff T$  biyectivo
- Teorema de los isomorfismos de Banach: si el problema está bien planteado, la solución depende de manera continua de los datos

# Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$



## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$f$  continua  $\implies$  Gr  $f$  cerrada

El recíproco está lejos de ser cierto

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$f$  continua  $\implies$  Gr  $f$  cerrada

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$f$  continua  $\implies$  Gr  $f$  cerrada

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal,  $\text{Gr } T$  cerrada  $\implies T$  continuo

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal,  $\text{Gr } T$  cerrada  $\implies T$  continuo

Por tanto, para asegurar que  $T$  es continuo basta probar:

$$\{x_n\} \rightarrow 0, \{T x_n\} \rightarrow y \implies y = 0$$



## Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo} \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$



## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo} \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0, 1]$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $E = L_0[0, 1]$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo} \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0, 1]$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $E = L_0[0, 1]$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$
- $Y = C[0, 1], E = \mathbb{K}^{[0, 1]}$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$

## Tema 12: Teorema de Banach-Steinhaus

- 1 Teorema de Banach-Steinhaus
- 2 Aplicaciones en Análisis Funcional
  - Teorema de cierre de Steinhaus
  - Aplicaciones bilineales continuas
- 3 Una aplicación a las series de Fourier

# Motivación

## Motivación

### Problema motivador

$X, Y$  espacios normados,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada  $x \in X$ ,  $\{T_n(x)\}$  converge y llamemos  $T(x)$  a límite. Entonces,  $T$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$  obviamente lineal.



## Motivación

### Problema motivador

$X, Y$  espacios normados,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada  $x \in X$ ,  $\{T_n(x)\}$  converge y llamemos  $T(x)$  a límite. Entonces,  $T$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$  obviamente lineal.

¿Es continua?

## Motivación

### Problema motivador

$X, Y$  espacios normados,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos. Supongamos que para cada  $x \in X$ ,  $\{T_n(x)\}$  converge y llamemos  $T(x)$  a límite. Entonces,  $T$  es una aplicación de  $X$  en  $Y$  obviamente lineal.

¿Es continua?

### Ejemplo

En  $c_{00}$  definimos  $T_n \in L(c_{00}, \mathbb{K})$  por

$$T_n(x) = \sum_{k=1}^n x(k) \quad (x \in X).$$

Es claro que

$$T_n(x) \longrightarrow T(x) := \sum_{k=1}^{\infty} x(k) \quad (x \in c_{00})$$

pero el operador (lineal)  $T$  no es continuo.

# Principio de Acotación Uniforme

## Tipos de acotación

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

### Principio de acotación uniforme



## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

### Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

## Principio de Acotación Uniforme

### Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

### Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

$\mathcal{F}$  familia de funciones **continuas** de  $X$  en  $\mathbb{R}$

# Principio de Acotación Uniforme

## Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

## Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

$\mathcal{F}$  familia de funciones **continuas** de  $X$  en  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  puntualmente acotada



# Principio de Acotación Uniforme

## Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

## Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

$\mathcal{F}$  familia de funciones **continuas** de  $X$  en  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  puntualmente acotada



$\mathcal{F}$  uniformemente acotada en un abierto no vacío  $B \subset X$

# Principio de Acotación Uniforme

## Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

## Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

$\mathcal{F}$  familia de funciones **continuas** de  $X$  en  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  puntualmente acotada

↓

$\mathcal{F}$  uniformemente acotada en un abierto no vacío  $B \subset X$

Basta considerar:  $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n \quad \forall f \in E\} \quad (n \in \mathbb{N})$

# Principio de Acotación Uniforme

## Tipos de acotación

$X \neq \emptyset$ ,  $E \subset \mathbb{R}^X$  familia de funciones de  $X$  en  $\mathbb{R}$

- $E$  **acotada** en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{|f(x_0)| : f \in E\} < \infty$
- $E$  **puntualmente acotada**:  $\sup \{|f(x)| : f \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  **uniformemente acotada** en  $B \subset X$ :  $\sup \{|f(x)| : f \in E, x \in B\} < \infty$

## Principio de acotación uniforme

$X$  espacio topológico **de 2ª categoría** en sí mismo

$\mathcal{F}$  familia de funciones **continuas** de  $X$  en  $\mathbb{R}$

$\mathcal{F}$  puntualmente acotada

⇓

$\mathcal{F}$  uniformemente acotada en un abierto no vacío  $B \subset X$

Basta considerar:  $F_n = \{x \in X : |f(x)| \leq n \quad \forall f \in E\} \quad (n \in \mathbb{N})$

**Lema de Baire:**  $\implies$  Como  $X$  se puede tomar cualquier subconjunto abierto de un espacio métrico completo

## Teorema de Banach-Steinhaus

Acotación para familias de operadores

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos



## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $E \subset L(X, Y)$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $E \subset L(X, Y)$

$A = \{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\}$ . Son equivalentes:

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $E \subset L(X, Y)$

$A = \{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\}$ . Son equivalentes:

- (a)  $A$  es de  $2^a$  categoría en  $X$



## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $E \subset L(X, Y)$

$A = \{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\}$ . Son equivalentes:

- (a)  $A$  es de  $2^a$  categoría en  $X$
- (b)  $A = X$ , es decir,  $E$  está puntualmente acotada:  
 $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$

## Teorema de Banach-Steinhaus

### Acotación para familias de operadores

$X, Y$  espacios normados,  $E \subset L(X, Y)$  familia de operadores lineales continuos

- $E$  acotada en  $x_0 \in X$ :  $\sup \{\|Tx_0\| : T \in E\} < \infty$
- $E$  puntualmente acotada:  $\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$
- $E$  uniformemente acotada en  $B \subset X$ :  $\sup \{\|T(x)\| : T \in E, x \in B\} < \infty$
- $E$  uniformemente acotada en la bola unidad:  $\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$

### Teorema de Banach-Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $E \subset L(X, Y)$

$A = \{x \in X : \sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty\}$ . Son equivalentes:

- $A$  es de  $2^a$  categoría en  $X$
- $A = X$ , es decir,  $E$  está puntualmente acotada:  
$$\sup \{\|Tx\| : T \in E\} < \infty \quad \forall x \in X$$
- $E$  está acotada en norma:  
$$\sup \{\|T\| : T \in E\} < \infty$$

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

Entonces  $T \in L(X, Y)$

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

Entonces  $T \in L(X, Y)$

### Caracterización dual de la acotación

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

Entonces  $T \in L(X, Y)$

### Caracterización dual de la acotación

$X$  espacio normado,  $E \subset X$



## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

Entonces  $T \in L(X, Y)$

### Caracterización dual de la acotación

$X$  espacio normado,  $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

## Primeras aplicaciones

### Teorema de cierre de Steinhaus

$X$  espacio de Banach,  $Y$  espacio normado,  $\{T_n : n \in \mathbb{N}\} \subset L(X, Y)$  sucesión de operadores lineales continuos.

Supongamos que  $\{T_n\}$  converge puntualmente en  $X$ :

$$\{T_n x\} \rightarrow T x \quad \forall x \in X$$

Entonces  $T \in L(X, Y)$

### Caracterización dual de la acotación

$X$  espacio normado,  $E \subset X$

$$E \text{ acotado} \iff f(E) \text{ acotado} \quad \forall f \in X^*$$

Explícitamente:

$$\sup \{\|x\| : x \in E\} < \infty \iff \sup \{|f(x)| : x \in E\} < \infty \quad \forall f \in X^*$$

## Aplicaciones bilineales continuas

## Aplicaciones bilineales continuas

### Teorema

Sea  $X$  un espacio de Banach,  $Y$  y  $Z$  espacios normados y  $T : X \times Y \rightarrow Z$  una aplicación **bilineal**.

## Aplicaciones bilineales continuas

### Teorema

Sea  $X$  un espacio de Banach,  $Y$  y  $Z$  espacios normados y  $T : X \times Y \rightarrow Z$  una aplicación **bilineal**. Equivalen:

- Existe  $M \geq 0$  tal que  $\|T(x, y)\| \leq M\|x\| \|y\| \quad \forall x \in X, \forall y \in Y,$
- $T$  es continua en  $X \times Y$  (con la topología producto),
- $T$  es separadamente continua: para cada  $x_0 \in X, y_0 \in Y$ , las aplicaciones lineales

$$y \mapsto T(x_0, y) \quad (y \in Y), \quad x \mapsto T(x, y_0) \quad (x \in X)$$

son continuas.

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$



## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow$$

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

## Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

## Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi : ]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in ]-\pi, \pi] \quad \text{biyectiva}$$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

## Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi : ]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in ]-\pi, \pi] \quad \text{biyectiva}$$

$$E \subset \mathbb{T} \text{ medible} \iff \phi^{-1}(E) \text{ medible-Lebesgue en } \mathbb{R}$$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

## Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi : ]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in ]-\pi, \pi] \quad \text{biyectiva}$$

$$E \subset \mathbb{T} \text{ medible} \iff \phi^{-1}(E) \text{ medible-Lebesgue en } \mathbb{R}$$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi} \lambda(\phi^{-1}(E))$$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Funciones en la circunferencia y funciones periódicas

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}$$

Función definida en la circunferencia  $g : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f(t) = g(e^{it}) \quad \Downarrow \quad \Uparrow \quad g(z) = f(\text{Arg } z)$$

Función  $2\pi$ -periódica  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$

## Medida de Lebesgue normalizada en la circunferencia

$$\phi : ]-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{T} \quad \phi(t) = e^{it} \quad \forall t \in ]-\pi, \pi] \quad \text{biyectiva}$$

$$E \subset \mathbb{T} \text{ medible} \iff \phi^{-1}(E) \text{ medible-Lebesgue en } \mathbb{R}$$

$$m(E) := \frac{1}{2\pi} \lambda(\phi^{-1}(E))$$

$$L_p(\mathbb{T}) = L_p(m) \quad (1 \leq p \leq \infty)$$



## Espacios $L_p(\mathbb{T})$

## Espacios $L_p(\mathbb{T})$

- $L_p(\mathbb{T})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) “Funciones” medibles  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|g\|_p : \left( \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

Espacios  $L_p(\mathbb{T})$ 

- $L_p(\mathbb{T})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) “Funciones” medibles  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|g\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

- o bien, “funciones” medibles  $2\pi$ -periódicas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

Espacios  $L_p(\mathbb{T})$ 

- $L_p(\mathbb{T})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) “Funciones” medibles  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|g\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

o bien, “funciones” medibles  $2\pi$ -periódicas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$ . “Funciones” medibles y esencialmente acotadas  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , o bien, “funciones” medibles,  $2\pi$ -periódicas y esencialmente acotadas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup } |g| = \text{ess sup } |f| = \|f\|_\infty \quad (g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T}))$$

Espacios  $L_p(\mathbb{T})$ 

- $L_p(\mathbb{T})$  ( $1 \leq p < \infty$ ) “Funciones” medibles  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|g\|_p := \left( \int_{\mathbb{T}} |g(z)|^p dm(z) \right)^{1/p} < \infty$$

o bien, “funciones” medibles  $2\pi$ -periódicas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  tales que

$$\|f\|_p := \left( \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p dt \right)^{1/p} < \infty$$

- $L_\infty(\mathbb{T})$ . “Funciones” medibles y esencialmente acotadas  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , o bien, “funciones” medibles,  $2\pi$ -periódicas y esencialmente acotadas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ .

$$\|g\|_\infty = \text{ess sup } |g| = \text{ess sup } |f| = \|f\|_\infty \quad (g \equiv f \in L_\infty(\mathbb{T}))$$

- $C(\mathbb{T})$ . Funciones continuas  $g: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{C}$ , o bien, funciones continuas y  $2\pi$ -periódicas  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  con

$$\|g\|_\infty = \text{máx } \{|g(z)| : z \in \mathbb{T}\} = \text{máx } \{|f(t)| : t \in \mathbb{R}\} \quad (g \equiv f \in C(\mathbb{T}))$$

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

Relación entre los espacios  $L_p(\mathbb{T})$

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador  $Id : L_q(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$  es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leq \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:



## Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

### Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador  $Id : L_q(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$  es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leq \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leq p < \infty)$$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador  $Id : L_q(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$  es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leq \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leq p < \infty)$$

## Series de Fourier

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador  $Id : L_q(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$  es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leq \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leq p < \infty)$$

## Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$ . Coeficientes de Fourier de  $f$ :

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \int_{\mathbb{T}} g(z) z^{-n} dm(z) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

# Espacios de Banach para el estudio de Series de Fourier

## Relación entre los espacios $L_p(\mathbb{T})$

Para  $1 \leq p \leq q \leq \infty$  se tiene

$$C(\mathbb{T}) \subset L_\infty(\mathbb{T}) \subset L_q(\mathbb{T}) \subset L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$$

El operador  $Id : L_q(\mathbb{T}) \rightarrow L_p(\mathbb{T})$  es lineal y continuo, de hecho

$$\|g\|_p \leq \|g\|_q \quad \forall g \in L_q(\mathbb{T})$$

pero no es un monomorfismo:

$$\text{Lusin} \implies \overline{C(\mathbb{T})} = L_p(\mathbb{T}) \quad (1 \leq p < \infty)$$

## Series de Fourier

$f \equiv g \in L_1(\mathbb{T})$ . Coeficientes de Fourier de  $f$ :

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) e^{-int} dt = \int_{\mathbb{T}} g(z) z^{-n} dm(z) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

Serie de Fourier de  $f$ :  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int} \equiv \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) z^n$

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:** ¿ $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ?

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ?    ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?



## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ?    ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:** ¿ $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ?    ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

Riesz:  $1 < p < \infty, f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mathbb{T})$ :

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

Riesz:  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mathbb{T})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^p dt = 0$$

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

Riesz:  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mathbb{T})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^p dt = 0$$

### Convergencia puntual

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

Riesz:  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mathbb{T})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^p dt = 0$$

### Convergencia puntual

Para  $f \in C(\mathbb{T})$  tiene sentido preguntar:

$$\{S_n(f, t)\} \rightarrow f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

## Convergencia de series de Fourier

### Planteamiento general

$f \in L_1(\mathbb{T})$ . Sucesión de sumas parciales de la serie de Fourier de  $f$ :

$$S_n(f, t) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) e^{ikt} \quad (t \in \mathbb{R}, n = 0, 1, 2, \dots)$$

**Problema:**  $\{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$ ? ¿Cuándo y en qué sentido podemos decir que la serie de Fourier de una función converge a dicha función?

### Convergencia en norma

Riesz:  $1 < p < \infty$ ,  $f \in L_p(\mathbb{T}) \implies \{S_n(f, \cdot)\} \rightarrow f$  en  $L_p(\mathbb{T})$ :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |S_n(f, t) - f(t)|^p dt = 0$$

### Convergencia puntual

Para  $f \in C(\mathbb{T})$  tiene sentido preguntar:

$$\{S_n(f, t)\} \rightarrow f(t) \quad \forall t \in \mathbb{R}?$$

La respuesta es negativa (DuBois-Reymond) pero no es fácil dar ejemplos

## Punto de vista “funcional”

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:



## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$S_n(f, 0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k)$$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$S_n(f, 0) = \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt$$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt \end{aligned}$$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \varphi_n(f) \end{aligned}$$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \varphi_n(f) \end{aligned}$$

Recordemos:  $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \varphi_n(f) \end{aligned}$$

Recordemos:  $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \cong C(\mathbb{T})^*$

Luego  $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$  con  $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

## Punto de vista “funcional”

Para  $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  fijo, tenemos:

$$\begin{aligned} S_n(f, 0) &= \sum_{k=-n}^n \widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left( \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} \right) dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n(t) dt = \varphi_n(f) \end{aligned}$$

Recordemos:  $L_1(\mathbb{T}) \subset M(\mathbb{T}) \equiv C(\mathbb{T})^*$

Luego  $\varphi_n \in C(\mathbb{T})^*$  con  $\|\varphi_n\| = \|D_n\|_1$

Ahora un poco de cálculo:

$$D_n(t) = \sum_{k=-n}^n e^{-ikt} = \frac{\operatorname{sen}((2n+1)t/2)}{\operatorname{sen}(t/2)} \quad (0 < |t| \leq \pi) \quad D_n(0) = 2n+1$$

y se comprueba sin mucha dificultad que  $\{\|D_n\|_1\} \rightarrow +\infty$

## Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus



## Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$  no está acotado en norma.

## Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$  no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\}$$

es de 1ª categoría en  $C(\mathbb{T})$ .

En otras palabras,

## Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$  no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\} \equiv \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f, 0)| < \infty \right\}$$

es de 1ª categoría en  $C(\mathbb{T})$ .

En otras palabras,

### Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones  $f \in C(\mathbb{T})$  tales que la sucesión  $\{S_n(f, 0)\}$  está acotada es de 1ª categoría en  $C(\mathbb{T})$ .

## Lo que hizo famoso al Teorema de Banach-Steinhaus

Por tanto...

$\{\varphi_n\} \subset C(\mathbb{T})^*$  no está acotado en norma. Por tanto, el conjunto

$$\left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |\varphi_n(f)| < \infty \right\} \equiv \left\{ f \in C(\mathbb{T}) : \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(f, 0)| < \infty \right\}$$

es de 1ª categoría en  $C(\mathbb{T})$ .

En otras palabras,

### Aplicación a las series de Fourier

El conjunto de las funciones  $f \in C(\mathbb{T})$  tales que la sucesión  $\{S_n(f, 0)\}$  está acotada es de 1ª categoría en  $C(\mathbb{T})$ . Así pues, la convergencia puntual de la serie de Fourier de una función continua es "atípica"

## Tema 13: Teoría de dualidad

- 1 Pares duales. Topologías débiles
  - Primeras definiciones
  - Topologías débil y débil-\* de un ELC
  
- 2 Topologías débiles en espacios normados
  - Primeros resultados
  - Bidual. Reflexividad. Compacidad débil
  - Topologías débiles y sucesiones
  - Tercer dual
  
- 3 Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman
  - Teorema de Krein-Milman
  - Aplicaciones
  - El Teorema de Choquet

Pares duales. Topologías débiles

oooooooo

Topologías débiles en espacios normados

oooooooo

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

oooooooo

## Notación

## Notación

### Dual de un espacio normado

$X$  normado,  $L(X, \mathbb{K}) = X^*$  funcionales lineales continuos,  $f \in X^*$ :

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\ &= \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}\end{aligned}$$

$X^*$  es siempre un espacio de Banach, el **dual** de  $X$ .



## Notación

### Dual de un espacio normado

$X$  normado,  $L(X, \mathbb{K}) = X^*$  funcionales lineales continuos,  $f \in X^*$ :

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\ &= \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}\end{aligned}$$

$X^*$  es siempre un espacio de Banach, el **dual** de  $X$ .

### Dual algebraico y dual topológico

★  $X$  espacio vectorial

$$X^\# = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal}\}$$

**dual algebraico** de  $X$ .

## Notación

### Dual de un espacio normado

$X$  normado,  $L(X, \mathbb{K}) = X^*$  funcionales lineales continuos,  $f \in X^*$ :

$$\begin{aligned}\|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X, \|x\| \leq 1\} \\ &= \min\{M \geq 0 : |f(x)| \leq M\|x\| \quad \forall x \in X\}\end{aligned}$$

$X^*$  es siempre un espacio de Banach, el **dual** de  $X$ .

### Dual algebraico y dual topológico

★  $X$  espacio vectorial

$$X^\# = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal}\}$$

**dual algebraico** de  $X$ .

★  $(X, \tau)$  EVT ( $X$  espacio vectorial,  $\tau$  topología vectorial)

$$(X, \tau)^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal y } \tau\text{-continuo}\}$$

**dual topológico** de  $(X, \tau)$ . Si  $\tau$  se sobrentiende, escribimos  $X^*$ .

Pares duales. Topologías débiles

●○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Par dual

## Par dual

### Par dual

$X$  espacio vectorial,  $Y \leq X^\sharp$  que separa los puntos de  $X$ .

Escribimos  $\langle x, y \rangle$  para denotar la acción de  $y \in Y \leq X^\sharp$  sobre  $x \in X$ .

- $(X, Y)$  es un **par dual**.
- Como  $X$  separa los puntos de  $Y$  y  $X \leq (Y)^\sharp$ ,  $(Y, X)$  es también un par dual.
- Si  $(X, \mathcal{T})$  un ELC separado, el dual topológico  $X^* = (X, \mathcal{T})^*$  separa los puntos de  $X$  (Teorema de Hahn-Banach), luego  $(X, X^*)$  es un par dual.

Una topología localmente convexa  $\tau$  es **compatible con el par dual**  $(X, Y)$  si  $(X, \tau)^* = Y$ . Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología  $\tau$  es compatible.

## Par dual

### Par dual

$X$  espacio vectorial,  $Y \leq X^\sharp$  que separa los puntos de  $X$ .

Escribimos  $\langle x, y \rangle$  para denotar la acción de  $y \in Y \leq X^\sharp$  sobre  $x \in X$ .

- $(X, Y)$  es un **par dual**.
- Como  $X$  separa los puntos de  $Y$  y  $X \leq (Y)^\sharp$ ,  $(Y, X)$  es también un par dual.
- Si  $(X, \mathcal{T})$  un ELC separado, el dual topológico  $X^* = (X, \mathcal{T})^*$  separa los puntos de  $X$  (Teorema de Hahn-Banach), luego  $(X, X^*)$  es un par dual.

Una topología localmente convexa  $\tau$  es **compatible con el par dual**  $(X, Y)$  si  $(X, \tau)^* = Y$ . Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología  $\tau$  es compatible.

Siempre existen topologías en  $X$  compatibles con el par dual  $(X, Y)$ :

## Topología débil asociada a un par dual

## Topología débil asociada a un par dual

### Topología débil asociada a un par dual

$(X, Y)$  par dual. La topología inicial en  $X$  para los elementos de  $Y$  se denota por  $\sigma(X, Y)$  y se llama **topología débil en  $X$  asociada al par dual  $(X, Y)$** .

## Topología débil asociada a un par dual

### Topología débil asociada a un par dual

$(X, Y)$  par dual. La topología inicial en  $X$  para los elementos de  $Y$  se denota por  $\sigma(X, Y)$  y se llama **topología débil en  $X$  asociada al par dual  $(X, Y)$** .

- $\sigma(X, Y)$  es una topología localmente convexa separada en  $X$ .
- Es la topología asociada a la familia de seminormas

$$\varphi_y(x) = |\langle x, y \rangle| \quad (x \in X, y \in Y).$$

- Es la menor topología en  $X$  que hace continuos a los elementos de  $Y$ .
- Los conjuntos de la forma

$$U(J, \varepsilon) = \{x \in X : |\langle x, y \rangle| \leq \varepsilon \quad \forall y \in J\}$$

donde  $J$  es un subconjunto finito de  $Y$  y  $\varepsilon > 0$ , forman una base de entornos de cero para  $\sigma(X, Y)$ .

- Es la topología en  $X$  de la convergencia puntual sobre los elementos de  $Y$ .



Pares duales. Topologías débiles

○○●○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Topología débil. II

## Topología débil. II

### Propiedad importante

Sea  $(X, Y)$  un par dual.

- Un funcional lineal  $f$  en  $X$  es  $\sigma(X, Y)$ -continuo si, y sólo si, existe un  $y_0 \in Y$  tal que

$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle \quad (x \in X).$$

- La topología  $\sigma(X, Y)$  es compatible con el par dual  $(X, Y)$  (esto es,  $(X, \sigma(X, Y))^* = Y$  y es la mínima topología en  $X$  con esta propiedad.

Pares duales. Topologías débiles

○○●○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○

## Polares absolutos

## Polares absolutos

### Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual  $(X, Y)$  y un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$ , el **polar absoluto** de  $A$  es

$$A^\circ = \{y \in Y : |\langle a, y \rangle| \leq 1 \quad \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío  $B$  de  $Y$  se define su **polar absoluto** por

$$B^\circ = \{x \in X : |\langle x, b \rangle| \leq 1 \quad \forall b \in B\}.$$

Para  $A \subset X$  tiene sentido el **bipolar**  $A^{\circ\circ}$ , que vuelve a ser subconjunto de  $X$ .

## Polares absolutos

### Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual  $(X, Y)$  y un subconjunto no vacío  $A$  de  $X$ , el **polar absoluto** de  $A$  es

$$A^\circ = \{y \in Y : |\langle a, y \rangle| \leq 1 \quad \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío  $B$  de  $Y$  se define su **polar absoluto** por

$$B^\circ = \{x \in X : |\langle x, b \rangle| \leq 1 \quad \forall b \in B\}.$$

Para  $A \subset X$  tiene sentido el **bipolar**  $A^{\circ\circ}$ , que vuelve a ser subconjunto de  $X$ .

### Observación

Si  $(X, Y)$  es un par dual, la familia de conjuntos  $\{J^\circ : J \subset Y, J \text{ finito}\}$  es base de entornos de cero para la topología  $\sigma(X, Y)$ .

Pares duales. Topologías débiles

○○○○●○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○○

## Teorema del bipolar

## Teorema del bipolar

### Teorema del bipolar

$(X, Y)$  par dual,  $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$

(cierre en cualquier topología en  $X$  compatible con el par dual  $(X, Y)$ ).

## Teorema del bipolar

### Teorema del bipolar

$(X, Y)$  par dual,  $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$   
(cierre en cualquier topología en  $X$  compatible con el par dual  $(X, Y)$ ).

### Consecuencia 1

$(X, Y)$  par dual,  $\tau_1$  topología compatible en  $X$ ,  $\tau_2$  topología compatible en  $Y$ .  
Entonces la aplicación  $M \mapsto M^\circ$  es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios  $\tau_1$ -cerrados de  $X$  en el retículo de los subespacios  $\tau_2$ -cerrados de  $Y$ . En particular,  $(\bigcap_{i \in I} M_i)^\circ = \overline{\sum_{i \in I} M_i^\circ}$ .



## Teorema del bipolar

### Teorema del bipolar

$(X, Y)$  par dual,  $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\text{co}}(\mathbb{D}A)$   
 (cierre en cualquier topología en  $X$  compatible con el par dual  $(X, Y)$ ).

### Consecuencia 1

$(X, Y)$  par dual,  $\tau_1$  topología compatible en  $X$ ,  $\tau_2$  topología compatible en  $Y$ .  
 Entonces la aplicación  $M \mapsto M^\circ$  es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios  $\tau_1$ -cerrados de  $X$  en el retículo de los subespacios  $\tau_2$ -cerrados de  $Y$ . En particular,  $(\bigcap_{i \in I} M_i)^\circ = \overline{\sum_{i \in I} M_i^\circ}$ .

### Consecuencia 2

$(X, X_1), (Y, Y_1)$  pares duales,  $T : X \rightarrow Y$  lineal. Equivalen:

- $T$  es  $\sigma(X, X_1) - \sigma(Y, Y_1)$  continua,
- Existe  $S : Y_1 \rightarrow X_1$  tal que

$$\langle Tx, v \rangle = \langle x, Sv \rangle \quad (x \in X, v \in Y_1).$$

En este caso,  $S$  es única ( $S = T^*$ ), lineal,  $\sigma(Y_1, Y) - \sigma(X_1, X)$  continua y  $T^{**} = T$ .

Pares duales. Topologías débiles

○ ○ ○ ○ ○ ● ○ ○

Topologías débiles en espacios normados

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

## Topologías débil y débil-\* de un ELC

## Topologías débil y débil-\* de un ELC

### Topología débil y topología débil-\* de un ELC

$X$  ELC separado,  $(X, X^*)$  par dual.

- $\sigma(X, X^*)$  es LA topología débil de  $X$ .
  - Es la menor topología en  $X$  que hace continuos a los elementos de  $X^*$ .
  - En particular,  $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$ .
  - Es la topología en  $X$  de la convergencia puntual sobre los elementos de  $X^*$ .
  - Esto es, topología en  $X$  de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de  $X^*$ .
- $\sigma(X^*, X)$  es la topología débil-\* de  $X^*$  como dual de  $X$  (o asociada al par dual  $(X, X^*)$ ).
  - Es la menor topología en  $X^*$  que hace continuos a los elementos de  $X$ .
  - En particular,  $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X$ .
  - Es la topología en  $X^*$  de la convergencia puntual sobre los elementos de  $X$ .
  - Esto es, topología en  $X^*$  de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de  $X$ .

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○●●○

## Observaciones

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Observaciones

### Observaciones

$X$  ELC separado.

- En general, en  $X^*$  puede que no tengamos ninguna topología destacada.

## Observaciones

### Observaciones

$X$  ELC separado.

- En general, en  $X^*$  puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología  $\sigma(X^*, X)$ .

### Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto,  $\mathcal{D}(\Omega)$  funciones test (ELC con su topología natural).

- ★ En  $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$  se considera la topología  $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ .
- ★  $(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))$  es un ELC separado **secuencialmente completo**.
- ★  $(\mathcal{D}'(\Omega), \beta(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))$  es un ELC separado **completo** y con la **propiedad de Heine-Borel**.

## Observaciones

### Observaciones

$X$  ELC separado.

- En general, en  $X^*$  puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología  $\sigma(X^*, X)$ .
- Este es sólo el comienzo de la teoría de dualidad, podemos considerar otras topologías en  $X^*$ :
  - **Topología de Mackey  $\tau(X^*, X)$** : supremo de todas las topologías compatibles y topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos y  $\sigma(X, X^*)$ -compactos de  $X$ .
  - **Topología fuerte  $\beta(X^*, X)$** : topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de  $X$ .

### Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$  abierto,  $\mathcal{D}(\Omega)$  funciones test (ELC con su topología natural).

- ★ En  $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$  se considera la topología  $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ .
- ★  $(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))$  es un ELC separado **secuencialmente completo**.
- ★  $(\mathcal{D}'(\Omega), \beta(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)))$  es un ELC separado **completo** y con la **propiedad de Heine-Borel**.

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○●

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○

## Algunos resultados



## Algunos resultados

### Teorema de Mazur

$(X, \tau)$  ELC separado,  $M \subset X$  convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

## Algunos resultados

### Teorema de Mazur

$(X, \tau)$  ELC separado,  $M \subset X$  convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

### Topología débil de un subespacio

$X$  ELC separado,  $Y$  subespacio de  $X$ . Entonces la topología débil  $\sigma(Y, Y^*)$  de  $Y$  coincide con la restricción a  $Y$  de la topología débil  $\sigma(X, X^*)$  de  $X$ .

## Algunos resultados

### Teorema de Mazur

$(X, \tau)$  ELC separado,  $M \subset X$  convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

### Topología débil de un subespacio

$X$  ELC separado,  $Y$  subespacio de  $X$ . Entonces la topología débil  $\sigma(Y, Y^*)$  de  $Y$  coincide con la restricción a  $Y$  de la topología débil  $\sigma(X, X^*)$  de  $X$ .

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-\*

## Algunos resultados

### Teorema de Mazur

$(X, \tau)$  ELC separado,  $M \subset X$  convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

### Topología débil de un subespacio

$X$  ELC separado,  $Y$  subespacio de  $X$ . Entonces la topología débil  $\sigma(Y, Y^*)$  de  $Y$  coincide con la restricción a  $Y$  de la topología débil  $\sigma(X, X^*)$  de  $X$ .

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-\*

### Teorema de Alaoglu-Bourbaki

Sea  $X$  un ELC separado y  $U$  un entorno de cero en  $X$ . Entonces  $U^\circ$  es un subconjunto  $\sigma(X^*, X)$ -compacto de  $X^*$ .

## Algunos resultados en espacios normados

## Algunos resultados en espacios normados

### Observación

$X$  espacio normado.

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\} = \varepsilon \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^\circ$$

moviendo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $f_1, \dots, f_n \in S_{X^*}$ , es base de entornos de cero para la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon, i = 1, 2, \dots, n\} = \varepsilon \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^\circ$$

moviendo  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\varepsilon > 0$  y  $x_1, \dots, x_n \in S_X$ , es base de entornos de cero para la topología  $\sigma(X^*, X)$ .

## Algunos resultados en espacios normados. II

## Algunos resultados en espacios normados. II

### Proposición

$X$  espacio normado de **dimensión infinita**.

- Los subconjuntos  $\sigma(X, X^*)$ -abiertos de  $X$  y los subconjunto  $\sigma(X^*, X)$ -abiertos de  $X^*$  no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X, X^*)} = B_X$     y     $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*, X)} = B_{X^*}$ .
- En consecuencia, las aplicaciones

$$x \mapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \mapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-\* (resp.) pero no son continuas.

- (T<sup>a</sup> de Mazur)  $M \subset X$  convexo, entonces  $\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$ .



## Algunos resultados en espacios normados. II

### Proposición

$X$  espacio normado de **dimensión infinita**.

- Los subconjuntos  $\sigma(X, X^*)$ -abiertos de  $X$  y los subconjunto  $\sigma(X^*, X)$ -abiertos de  $X^*$  no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X, X^*)} = B_X$     y     $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*, X)} = B_{X^*}$ .
- En consecuencia, las aplicaciones

$$x \mapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \mapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-\* (resp.) pero no son continuas.

- (T<sup>a</sup> de Mazur)  $M \subset X$  convexo, entonces  $\overline{M}^{\sigma(X, X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$ .

### Teorema de Banach-Alaoglu

$X$  espacio normado:  $B_{X^*}$  es  $\sigma(X^*, X)$ -compacto. Por tanto, todo subconjunto de  $X^*$  acotado en norma y  $\sigma(X^*, X)$ -cerrado es compacto.

## Bidual. Espacios reflexivos

## Bidual. Espacios reflexivos

### Bidual. Espacio reflexivo

$X$  espacio normado,  $X^{**} = (X^*)^*$  **bidual** de  $X$ .

Definimos  $J_X : X \rightarrow X^{**}$  por

$$[J_X(x)](x^*) = x^*(x) \quad (x^* \in X^*, x \in X)$$

**inclusión canónica** de  $X$  en  $X^{**}$ , isométrica por el Teorema de Hahn-Banach.

- ★ En  $X^{**}$  podemos considerar la topología  $\sigma(X^{**}, X^*)$  que al restringirla a  $X = J_X(X)$  nos queda  $\sigma(X, X^*)$ .
- ★ Es claro (THB) que  $X$  es  $\sigma(X^{**}, X)$  denso en  $X^{**}$ .
- ★  $X$  es **reflexivo** si  $J_X$  es sobreyectiva (equivalentemente, si  $J_X(B_X) = B_{X^{**}}$ ).

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○●○○○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Algunos resultados importantes

## Algunos resultados importantes

### Teorema de Goldstine

$X$  espacio normado,  $J_X(B_X)$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -denso en  $B_{X^{**}}$ .

## Algunos resultados importantes

### Teorema de Goldstine

$X$  espacio normado,  $J_X(B_X)$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -denso en  $B_{X^{**}}$ .

### Teorema de Dieudonné

$X$  espacio normado.  $X$  reflexivo  $\iff B_X$   $\sigma(X, X^*)$ -compacta.

## Algunos resultados importantes

### Teorema de Goldstine

$X$  espacio normado,  $J_X(B_X)$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -denso en  $B_{X^{**}}$ .

### Teorema de Dieudonné

$X$  espacio normado.  $X$  reflexivo  $\iff B_X$   $\sigma(X, X^*)$ -compacta.

### Consecuencia

$X$  reflexivo  $\implies$  todo conjunto  $\sigma(X, X^*)$ -cerrado y acotado es  $\sigma(X, X^*)$ -compacto.

## Convergencia débil y débil-\*



## Convergencia débil y débil-\*

### Convergencia

$X$  espacio normado,  $\{x_n\}$  sucesión en  $X$ ,  $\{f_n\}$  sucesión en  $X^*$ .

- $\{x_n\}$  converge a  $x \in X$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$  si  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$  para cada  $f \in X^*$ .
  - ★ En este caso,  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.
- $\{f_n\}$  converge a  $f \in X^*$  en la topología  $\sigma(X^*, X)$  si  $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$  para cada  $x \in X$ .
  - ★ Si  $X$  es completo, en este caso,  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.

## Convergencia débil y débil-\*

### Convergencia

$X$  espacio normado,  $\{x_n\}$  sucesión en  $X$ ,  $\{f_n\}$  sucesión en  $X^*$ .

- $\{x_n\}$  converge a  $x \in X$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$  si  $\{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$  para cada  $f \in X^*$ .
  - ★ En este caso,  $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.
- $\{f_n\}$  converge a  $f \in X^*$  en la topología  $\sigma(X^*, X)$  si  $\{f_n(x)\} \rightarrow f(x)$  para cada  $x \in X$ .
  - ★ Si  $X$  es completo, en este caso,  $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  está acotado.

### Algunos casos particulares

Para las topologías

$$\sigma(c_0, \ell_1), \quad \sigma(\ell_1, c_0), \quad \sigma(\ell_\infty, \ell_1) \quad \text{y} \quad \sigma(\ell_p, \ell_q) \quad (1 < p, q < \infty),$$

la convergencia de una sucesión  $\{x_n\}$  es equivalente a la acotación en norma y la convergencia coordenada a coordenada.

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○●○○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Metrizabilidad de las topologías débiles

## Metrizabilidad de las topologías débiles

### Observación

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita.

Entonces ni  $\sigma(X, X^*)$  ni  $\sigma(X^*, X)$  son metrizable.

## Metrizabilidad de las topologías débiles

### Observación

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita.

Entonces ni  $\sigma(X, X^*)$  ni  $\sigma(X^*, X)$  son metrizables.

### Proposición

- Si  $X$  es separable  $\implies (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  es metrizable.
- Si  $X^*$  es separable  $\implies (B_X, \sigma(X, X^*))$  es metrizable.

## Metrizabilidad de las topologías débiles

### Observación

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita.  
Entonces ni  $\sigma(X, X^*)$  ni  $\sigma(X^*, X)$  son metrizables.

### Proposición

- Si  $X$  es separable  $\implies (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  es metrizable.
- Si  $X^*$  es separable  $\implies (B_X, \sigma(X, X^*))$  es metrizable.

### Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach **separable** admite una subsucesión débil-\*mente convergente.

## Metrizabilidad de las topologías débiles

### Observación

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita.  
Entonces ni  $\sigma(X, X^*)$  ni  $\sigma(X^*, X)$  son metrizables.

### Proposición

- Si  $X$  es separable  $\implies (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$  es metrizable.
- Si  $X^*$  es separable  $\implies (B_X, \sigma(X, X^*))$  es metrizable.

### Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach **separable** admite una subsucesión débil- $*$ -mente convergente.

### Teorema de Banach-Mazur

Todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de  $C[0, 1]$ .

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○●○○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Algunos teoremas importantes



## Algunos teoremas importantes

### Lema de Schur

Toda **sucesión** de vectores en  $\ell_1$  que sea  $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ -convergente es convergente en norma.

## Algunos teoremas importantes

### Lema de Schur

Toda **sucesión** de vectores en  $\ell_1$  que sea  $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ -convergente es convergente en norma.

### Teorema de Josefson-Nissenzweig

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una **sucesión** en  $S_{X^*}$  que es  $\sigma(X^*, X)$ -convergente a cero.

## Algunos teoremas importantes

### Lema de Schur

Toda **sucesión** de vectores en  $\ell_1$  que sea  $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ -convergente es convergente en norma.

### Teorema de Josefson-Nissenzweig

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una **sucesión** en  $S_{X^*}$  que es  $\sigma(X^*, X)$ -convergente a cero.

### Rosenthal–Odell

$X$  espacio de Banach **separable**. Equivalen

- $X$  no contiene (un subespacio isomorfo) a  $\ell_1$
- $B_X$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -**secuencialmente** densa en  $B_{X^{**}}$ .

## Algunos teoremas importantes

### Lema de Schur

Toda **sucesión** de vectores en  $\ell_1$  que sea  $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$ -convergente es convergente en norma.

### Teorema de Josefson-Nissenzweig

$X$  espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una **sucesión** en  $S_{X^*}$  que es  $\sigma(X^*, X)$ -convergente a cero.

### Rosenthal–Odell

$X$  espacio de Banach **separable**. Equivalen

- $X$  no contiene (un subespacio isomorfo) a  $\ell_1$
- $B_X$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -**secuencialmente** densa en  $B_{X^{**}}$ .

### Observaciones

- La topología  $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$  no es metrizable en  $B_{\ell_1}$ .
- Para  $X = \ell_1$ ,  $B_X$  es  $\sigma(X^{**}, X^*)$ -**secuencialmente** cerrada.

Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○●○

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Compacidad débil y sucesiones

## Compacidad débil y sucesiones

### Teorema de Eberlein-Smulian

$X$  espacio normado,  $A \subset X$ . Equivalen:

- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$ -compacto.
- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$  secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de  $A$  puede extraerse una subsucesión  $\sigma(X, X^*)$ -convergente a un elemento de  $A$ ).

## Compacidad débil y sucesiones

### Teorema de Eberlein-Smulian

$X$  espacio normado,  $A \subset X$ . Equivalen:

- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$ -compacto.
- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$  secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de  $A$  puede extraerse una subsucesión  $\sigma(X, X^*)$ -convergente a un elemento de  $A$ ).

### Corolario

Si  $X$  es reflexivo, cualquier sucesión acotada en norma admite una subsucesión  $\sigma(X, X^*)$  convergente.

## Compacidad débil y sucesiones

### Teorema de Eberlein-Smulian

$X$  espacio normado,  $A \subset X$ . Equivalen:

- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$ -compacto.
- $A$  es  $\sigma(X, X^*)$  secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de  $A$  puede extraerse una subsucesión  $\sigma(X, X^*)$ -convergente a un elemento de  $A$ ).

### Corolario

Si  $X$  es reflexivo, cualquier sucesión acotada en norma admite una subsucesión  $\sigma(X, X^*)$  convergente.

Como hemos visto, esto último se puede demostrar sin usar el Teorema de Eberlein-Smulian



Pares duales. Topologías débiles

○○○○○○○○

Topologías débiles en espacios normados

○○○○○○○○●

Puntos extremos. Teorema de Krein-Milman

○○○○○○○

## Tercer dual. Teorema de Dixmier

## Tercer dual. Teorema de Dixmier

$X$  espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \quad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \quad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces  $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$  es una proyección con  $\|P_X\| = 1$  y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

## Tercer dual. Teorema de Dixmier

$X$  espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \quad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \quad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces  $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$  es una proyección con  $\|P_X\| = 1$  y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

### Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^\perp$  y la suma es topológica directa.

## Tercer dual. Teorema de Dixmier

$X$  espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \quad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \quad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces  $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$  es una proyección con  $\|P_X\| = 1$  y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

### Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^\perp$  y la suma es topológico directa.

Recíprocamente, si  $Y$  es un espacio de Banach y existe una proyección  $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$  con  $\|P\| = 1$  y tal que  $\ker P$  es  $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ -cerrado, entonces existe un espacio  $X$  tal que  $Y \equiv X^*$ .

## Tercer dual. Teorema de Dixmier

$X$  espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \quad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \quad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces  $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$  es una proyección con  $\|P_X\| = 1$  y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

### Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^\perp$  y la suma es topológico directa.

Recíprocamente, si  $Y$  es un espacio de Banach y existe una proyección  $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$  con  $\|P\| = 1$  y tal que  $\ker P$  es  $\sigma(Y^{**}, Y^*)$ -cerrado, entonces existe un espacio  $X$  tal que  $Y \equiv X^*$ .

### Ejemplo

$X = c_0, X^* = \ell_1, X^{**} = \ell_\infty. \implies X^{***} = \ell_\infty^* \equiv \ell_1 \oplus c_0^\perp.$

Esto es,  $c_0$  es un  $M$ -ideal en  $\ell_\infty$ .

## Puntos extremos y subconjuntos extremales

## Puntos extremos y subconjuntos extremales

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ .

★  $\emptyset \neq E \subset A$  es **subconjunto extremal** de  $A$  si

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty \in E \quad \implies \quad x, y \in E.$$

★  $a \in A$  es un **punto extremo** de  $A$  cuando  $\{a\}$  es un subconjunto extremal de  $A$ , es decir,

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty = a \quad \implies \quad x = y = a.$$

★  $\text{ext}(A)$  conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de  $A$ .

## Puntos extremos y subconjuntos extremales

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ .

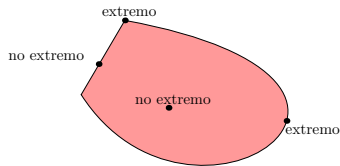
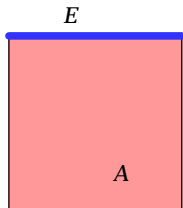
★  $\emptyset \neq E \subset A$  es **subconjunto extremal** de  $A$  si

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty \in E \quad \implies \quad x, y \in E.$$

★  $a \in A$  es un **punto extremo** de  $A$  cuando  $\{a\}$  es un subconjunto extremal de  $A$ , es decir,

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty = a \quad \implies \quad x = y = a.$$

★  $\text{ext}(A)$  conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de  $A$ .



$E$  es un subconjunto extremal de  $A$



## Teorema de Minkowski-Carathéodory

## Teorema de Minkowski-Carathéodory

### Teorema de Minkowski-Carathéodory

$K \subset \mathbb{R}^N$  compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, cada  $x \in K$  se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo,  $n + 1$  puntos extremos de  $K$ .

En particular,

$$K = \text{co}(\text{ext}(K)).$$

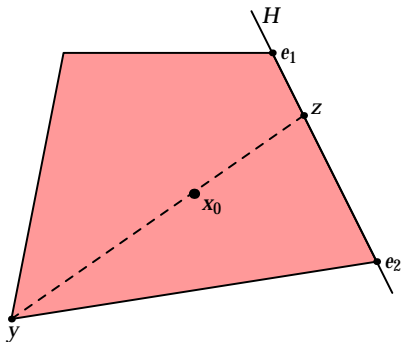
## Teorema de Minkowski-Carathéodory

### Teorema de Minkowski-Carathéodory

$K \subset \mathbb{R}^N$  compacto y convexo de  $\mathbb{R}^n$ . Entonces, cada  $x \in K$  se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo,  $n + 1$  puntos extremos de  $K$ .

En particular,

$$K = \text{co}(\text{ext}(K)).$$



## Teorema de Krein-Milman

## Teorema de Krein-Milman

### Lema

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ ,  $f \in X^\#$  tal que  $\operatorname{Re} f$  alcanza su máximo en  $A$ .  
Entonces,

$$E = \{x \in A : \operatorname{Re} f(x) = \max \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de  $A$ .

## Teorema de Krein-Milman

### Lema

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ ,  $f \in X^\#$  tal que  $\operatorname{Re} f$  alcanza su máximo en  $A$ .  
Entonces,

$$E = \{x \in A : \operatorname{Re} f(x) = \max \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de  $A$ .

### Teorema

$X$  EVT tal que  $X^*$  separa puntos,  $\emptyset \neq A \subset X$  compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de  $A$  contiene un punto extremo de  $A$ . En particular,  $A$  tiene puntos extremos.

## Teorema de Krein-Milman

### Lema

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ ,  $f \in X^\#$  tal que  $\operatorname{Re} f$  alcanza su máximo en  $A$ .  
Entonces,

$$E = \{x \in A : \operatorname{Re} f(x) = \max \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de  $A$ .

### Teorema

$X$  EVT tal que  $X^*$  separa puntos,  $\emptyset \neq A \subset X$  compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de  $A$  contiene un punto extremo de  $A$ . En particular,  $A$  tiene puntos extremos.

### Teorema de Krein-Milman para ELC

$X$  ELC separado,  $A \subset X$  compacto. Entonces  $A \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext}(A))$ . Si  $A$  es convexo, se da la igualdad.

## Teorema de Krein-Milman

### Lema

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$ ,  $f \in X^\#$  tal que  $\operatorname{Re} f$  alcanza su máximo en  $A$ .  
Entonces,

$$E = \{x \in A : \operatorname{Re} f(x) = \max \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de  $A$ .

### Teorema

$X$  EVT tal que  $X^*$  separa puntos,  $\emptyset \neq A \subset X$  compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de  $A$  contiene un punto extremo de  $A$ . En particular,  $A$  tiene puntos extremos.

### Teorema de Krein-Milman para ELC

$X$  ELC separado,  $A \subset X$  compacto. Entonces  $A \subseteq \overline{\operatorname{co}}(\operatorname{ext}(A))$ . Si  $A$  es convexo, se da la igualdad.

### Teorema de Krein-Milman revertido

$X$  ELC separado,  $\emptyset \neq C \subset X$  convexo y compacto,  $E \subset C$  tal que  $C = \overline{\operatorname{co}}(E)$ .  
Entonces,  $\operatorname{ext}(C) \subseteq \overline{E}$ .



## Principio del máximo de Bauer

## Principio del máximo de Bauer

### Lema

$K$  compacto  $T_2$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinua superiormente

$\implies f$  alcanza máximo en  $K$

## Principio del máximo de Bauer

### Lema

$K$  compacto  $T_2$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinua superiormente

$\implies f$  alcanza máximo en  $K$

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$  convexo,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es **casi-convexa** si

$$f((1-t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (x, y \in A, t \in [0, 1]).$$

## Principio del máximo de Bauer

### Lema

$K$  compacto  $T_2$ ,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  semicontinua superiormente

$\implies f$  alcanza máximo en  $K$

### Definición

$X$  espacio vectorial,  $A \subset X$  convexo,  $f : A \rightarrow \mathbb{R}$  es **casi-convexa** si

$$f((1-t)x + ty) \leq \max\{f(x), f(y)\} \quad (x, y \in A, t \in [0, 1]).$$

### Principio del máximo de Bauer

$X$  EVT tal que  $X^*$  separa puntos,  $K \subset X$  convexo y compacto,  $f : K \rightarrow \mathbb{R}$  casi-convexa y semicontinua superiormente.

$\implies f$  alcanza su máximo en un punto extremo de  $K$

## Teorema clásico de Banach-Stone

## Teorema clásico de Banach-Stone

### Teorema de Arens-Kelley

$K$  compacto  $T_2$ . Entonces  $\text{ext}(B_{C(K)^*}) = \{\lambda \delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$ .

## Teorema clásico de Banach-Stone

### Teorema de Arens-Kelley

$K$  compacto  $T_2$ . Entonces  $\text{ext}(B_{C(K)^*}) = \{\lambda\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$ .

### Teorema clásico de Banach-Stone

$H$  y  $K$  compactos y  $\Phi : C(H) \rightarrow C(K)$  isomorfismo isométrico. Entonces, existe  $\sigma : K \rightarrow H$  homeomorfismo y  $\theta \in C(K)$  con  $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$  tales que

$$[\Phi(x)](t) = \theta(t)x(\sigma(t)) \quad (t \in K, x \in C(H))$$

En particular,  $K$  y  $H$  son homeomorfos.

## Teorema clásico de Banach-Stone

### Teorema de Arens-Kelley

$K$  compacto  $T_2$ . Entonces  $\text{ext}(B_{C(K)^*}) = \{\lambda \delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$ .

### Teorema clásico de Banach-Stone

$H$  y  $K$  compactos y  $\Phi : C(H) \rightarrow C(K)$  isomorfismo isométrico. Entonces, existe  $\sigma : K \rightarrow H$  homeomorfismo y  $\theta \in C(K)$  con  $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$  tales que

$$[\Phi(x)](t) = \theta(t)x(\sigma(t)) \quad (t \in K, x \in C(H))$$

En particular,  $K$  y  $H$  son homeomorfos.

### Observación (Milyutin)

$K$  y  $H$  compactos **metrizables no numerables**

$\implies C(K)$  y  $C(H)$  son isomorfos



## Una extensión: el Teorema de Choquet

## Una extensión: el Teorema de Choquet

### Teorema de Choquet

$X$  ELC separado,  $K \subset X$  convexo, compacto y **metrizable**. Entonces para cada  $x_0 \in K$ , existe una medida de probabilidad  $\mu_{x_0}$  en  $K$  tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k) d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \quad \mu_{x_0}(\text{ext}(K)) = 1.$$

## Una extensión: el Teorema de Choquet

### Teorema de Choquet

$X$  ELC separado,  $K \subset X$  convexo, compacto y **metrizable**. Entonces para cada  $x_0 \in K$ , existe una medida de probabilidad  $\mu_{x_0}$  en  $K$  tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k) d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \quad \mu_{x_0}(\text{ext}(K)) = 1.$$

### Se puede aplicar a . . .

- $X$  separable,  $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ .
- $X$  reflexivo separable,  $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$ .

## Una extensión: el Teorema de Choquet

### Teorema de Choquet

$X$  ELC separado,  $K \subset X$  convexo, compacto y **metrizable**. Entonces para cada  $x_0 \in K$ , existe una medida de probabilidad  $\mu_{x_0}$  en  $K$  tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k) d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \quad \mu_{x_0}(\text{ext}(K)) = 1.$$

### Se puede aplicar a . . .

- $X$  separable,  $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ .
- $X$  reflexivo separable,  $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$ .

### Corolario (Teorema de Rainwater)

$X$  espacio normado,  $(x_n)$  sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Si  $(x_n)$  está acotada en norma y  $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$  para cada  $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ , entonces  $(x_n) \rightarrow x$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

## Teorema de Rainwater

### Corolario (Teorema de Rainwater)

$X$  espacio normado,  $(x_n)$  sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Si  $(x_n)$  está acotada en norma y  $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$  para cada  $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ , entonces  $(x_n) \rightarrow x$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

## Teorema de Rainwater

### Corolario (Teorema de Rainwater)

$X$  espacio normado,  $(x_n)$  sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Si  $(x_n)$  está acotada en norma y  $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$  para cada  $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ , entonces  $(x_n) \rightarrow x$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

Es una extensión del siguiente resultado:

## Teorema de Rainwater

### Corolario (Teorema de Rainwater)

$X$  espacio normado,  $(x_n)$  sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Si  $(x_n)$  está acotada en norma y  $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$  para cada  $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ , entonces  $(x_n) \rightarrow x$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

Es una extensión del siguiente resultado:

### Proposición

$K$  espacio topológico compacto,  $\{f_n\}$  sucesión en  $C(K)$ ,  $f \in C(K)$ .

Equivalen:

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en la topología  $\sigma(C(K), C(K)^*)$ ,
- $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  acotado y  $\{f_n(t)\} \rightarrow f(t)$  para cada  $t \in K$ .

## Teorema de Rainwater

### Corolario (Teorema de Rainwater)

$X$  espacio normado,  $(x_n)$  sucesión en  $X$  y  $x \in X$ . Si  $(x_n)$  está acotada en norma y  $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$  para cada  $x^* \in \text{ext}(B_{X^*})$ , entonces  $(x_n) \rightarrow x$  en la topología  $\sigma(X, X^*)$ .

Es una extensión del siguiente resultado:

### Proposición

$K$  espacio topológico compacto,  $\{f_n\}$  sucesión en  $C(K)$ ,  $f \in C(K)$ .

Equivalenten:

- $\{f_n\} \rightarrow f$  en la topología  $\sigma(C(K), C(K)^*)$ ,
  - $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$  acotado y  $\{f_n(t)\} \rightarrow f(t)$  para cada  $t \in K$ .
- 
- Si conocemos que  $C(K)^* \equiv M(K)$ , este resultado es consecuencia inmediata del **Teorema del Convergencia dominada de Lebesgue**.
  - Si no conocemos ninguna representación de  $C(K)^*$ , el resultado es consecuencia del **Teorema de Rainwater** y la **descripción de los puntos extremos** de la bola unidad de  $C(K)^*$  como deltas de Dirac.



## Tema 14: El Teorema Espectral

1 Operadores en espacios de Hilbert

2 Operadores compactos

3 Ejemplos

4 Teorema espectral

Operadores en espacios de Hilbert

●○○

Operadores compactos

○○

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○○

## Operador adjunto (I)

## Operador adjunto (I)

Existencia del operador adjunto

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas



## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y, X)$ ,  $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y, X)$ ,  $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$
- $(T+S)^* = T^* + S^* \quad \forall S \in L(X, Y)$

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y, X)$ ,  $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$
- $(T+S)^* = T^* + S^* \quad \forall S \in L(X, Y)$
- $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$

## Operador adjunto (I)

### Existencia del operador adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ . Existe  $T^* : Y \rightarrow X$  verificando:

$$(Tx|y) = (x|T^*y) \quad \forall x \in X, \quad \forall y \in Y$$

Se dice que  $T^*$  es el **operador adjunto** de  $T$ .

### Propiedades inmediatas

- $T^{**} = T$
- $T^* \in L(Y, X)$ ,  $\|T^*\| = \|T\| = \|T^*T\|^{1/2}$
- $(T+S)^* = T^* + S^* \quad \forall S \in L(X, Y)$
- $(\lambda T)^* = \bar{\lambda}T^* \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}$
- $Z$  Hilbert,  $S \in L(Y, Z) \implies (ST)^* = T^*S^*$

Operadores en espacios de Hilbert

○●○

Operadores compactos

○○

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○○

## Operador adjunto (II)

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .



## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo,

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  
 $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  
 $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales



## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales

$H$  espacio de Hilbert,  $T \in L(H)$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales

$H$  espacio de Hilbert,  $T \in L(H)$

- $T$  es **autoadjunto** cuando  $T^* = T$ .

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales

$H$  espacio de Hilbert,  $T \in L(H)$

- $T$  es **autoadjunto** cuando  $T^* = T$ . Entonces:

$$\|T\| = \sup \{ |(Tx|x)| : \|x\| = 1 \}$$

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales

$H$  espacio de Hilbert,  $T \in L(H)$

- $T$  es **autoadjunto** cuando  $T^* = T$ . Entonces:

$$\|T\| = \sup \{ |(Tx|x)| : \|x\| = 1 \}$$

- $T$  es **normal** cuando  $T^*T = TT^*$ .

## Operador adjunto (II)

### Relaciones entre un operador y su adjunto

$X, Y$  espacios de Hilbert,  $T \in L(X, Y)$ .

- $\ker T = T^*(Y)^\perp$
- $T$  inyectivo  $\Leftrightarrow T^*(Y)$  denso en  $X$
- $T$  isomorfismo  $\Leftrightarrow T^*$  isomorfismo, en cuyo caso,  $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$
- $T$  isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$
- $T$  isomorfismo isométrico  $\Leftrightarrow T^*T = I_X$  y  $TT^* = I_Y \Leftrightarrow T^* = T^{-1}$

Se dice entonces que  $T$  es un operador **unitario**

### Operadores autoadjuntos y operadores normales

$H$  espacio de Hilbert,  $T \in L(H)$

- $T$  es **autoadjunto** cuando  $T^* = T$ . Entonces:

$$\|T\| = \sup \{ |(Tx|x)| : \|x\| = 1 \}$$

- $T$  es **normal** cuando  $T^*T = TT^*$ . Equivalentemente:

$$\|Tx\| = \|T^*x\| \quad \forall x \in H$$

Operadores en espacios de Hilbert

○○●

Operadores compactos

○○

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○○

## Operador adjunto (III)

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:



## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

### Caso complejo

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

### Caso complejo

$H$  espacio de Hilbert **complejo**,  $T \in L(H)$ .

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

### Caso complejo

$H$  espacio de Hilbert **complejo**,  $T \in L(H)$ .

- $(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H \implies T = 0$

## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

### Caso complejo

$H$  espacio de Hilbert **complejo**,  $T \in L(H)$ .

- $(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H \implies T = 0$
- $T = T^* \iff (Tx|x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$



## Operador adjunto (III)

### Idempotentes

$H$  espacio de Hilbert,  $P \in L(H)$ ,  $P^2 = P$ . Equivalen:

- (i)  $P$  es autoadjunto:  $P^* = P$
- (ii)  $P$  es normal:  $P^*P = PP^*$
- (iii)  $P$  es la proyección ortogonal de  $H$  sobre  $P(H)$

Se dice simplemente que  $P$  es una **proyección**

### Caso complejo

$H$  espacio de Hilbert **complejo**,  $T \in L(H)$ .

- $(Tx|x) = 0 \quad \forall x \in H \implies T = 0$
- $T = T^* \iff (Tx|x) \in \mathbb{R} \quad \forall x \in H$
- $T$  se expresa de manera única como  $T = A + iB$  con  $A = A^*$  y  $B = B^*$ .

Por tanto  $T$  es normal si, y sólo si,  $AB = BA$ .

Operadores en espacios de Hilbert

○○○

Operadores compactos

●○

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○○

## Operadores de rango finito

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$



## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv, [u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv, [u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$ ,  $[u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

$$F(H) = \{T \in L(H) : \dim(T(H)) < \infty\}$$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$ ,  $[u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

$$F(H) = \{T \in L(H) : \dim(T(H)) < \infty\}$$

$$\bullet T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k$$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$ ,  $[u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

$$F(H) = \{T \in L(H) : \dim(T(H)) < \infty\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k$
- $F(H)$  subespacio vectorial de  $L(H)$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$ ,  $[u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

$$F(H) = \{T \in L(H) : \dim(T(H)) < \infty\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k$
- $F(H)$  subespacio vectorial de  $L(H)$
- $T \in F(H) \implies T^* \in F(H)$

## Operadores de rango finito

### Operadores de rango uno

$H$  espacio de Hilbert,  $u, v \in H$ .

$$[u \otimes v](x) = (x|u)v \quad \forall x \in H$$

- $u \otimes v \in L(H)$ ,  $[u \otimes v](H) \subset \mathbb{K}v$
- $T \in L(H)$ ,  $\dim T(H) \leq 1 \implies T = u \otimes v$  con  $u, v \in H$
- $\|u \otimes v\| = \|u\| \|v\|$
- $[u \otimes v]^* = v \otimes u$
- $S \in L(H) \implies S[u \otimes v] = u \otimes Sv$ ,  $[u \otimes v]S = S^*u \otimes v$

### Operadores de rango finito

$$F(H) = \{T \in L(H) : \dim(T(H)) < \infty\}$$

- $T \in F(H) \implies T = \sum_{k=1}^n u_k \otimes v_k$
- $F(H)$  subespacio vectorial de  $L(H)$
- $T \in F(H) \implies T^* \in F(H)$
- $T \in F(H)$ ,  $S \in L(H) \implies ST, TS \in F(H)$



Operadores en espacios de Hilbert

○○○

Operadores compactos

○●

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○○

# Operadores compactos

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ .

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :  
Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas



## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T: H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T: H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T: H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$  es separable.

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$  es separable. Sea  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  base ortonormal de  $\overline{T(H)}$  y  $P_n$  la proyección ortogonal sobre  $\text{Lin}\{e_k : k \leq n\}$ . Entonces  $\{\|P_n T - T\|\} \rightarrow 0$ . Por tanto:

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$  es separable. Sea  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  base ortonormal de  $\overline{T(H)}$  y  $P_n$  la proyección ortogonal sobre  $\text{Lin}\{e_k : k \leq n\}$ . Entonces  $\{\|P_n T - T\|\} \rightarrow 0$ . Por tanto:
- $K(H) = \overline{F(H)}$

## Operadores compactos

### Definición de operador compacto

$H$  espacio de Hilbert,  $B_H = \{x \in H : \|x\| \leq 1\}$ . **Operador compacto** en  $H$ :

Aplicación lineal  $T : H \rightarrow H$  tal que

$\overline{T(B_H)}$  es **compacto**

equivalentemente, tal que  $T(B_H)$  es **precompacto**

### Propiedades básicas

$$K(H) = \{ \text{operadores compactos en } H \}$$

- $K(H) \subset L(H)$ , subespacio **cerrado**
- $F(H) \subset K(H)$
- $T \in K(H), S \in L(H) \implies ST, TS \in K(H)$
- $T \in K(H) \implies \overline{T(H)}$  es separable. Sea  $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$  base ortonormal de  $\overline{T(H)}$  y  $P_n$  la proyección ortogonal sobre  $\text{Lin}\{e_k : k \leq n\}$ . Entonces  $\{\|P_n T - T\|\} \rightarrow 0$ . Por tanto:
- $K(H) = \overline{F(H)}$
- $T \in K(H) \implies T^* \in K(H)$



## Ejemplos (I)

## Ejemplos (I)

### Matrices

## Ejemplos (I)

### Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$



## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$ ,  $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$  ( $t \in \Omega$ )

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$ ,  $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$  ( $t \in \Omega$ )
- $M_\phi$  siempre es normal

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$ ,  $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$  ( $t \in \Omega$ )
- $M_\phi$  siempre es normal
- $M_\phi$  autoadjunto  $\iff \overline{\phi} = \phi$  c.p.d.

## Ejemplos (I)

## Matrices

$X, Y$  espacios de Hilbert con bases ortonormales  $\{x_i : i \in I\}$ ,  $\{y_j : j \in J\}$ .

$$T \in L(X, Y) \longrightarrow \alpha : I \times J \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha(i, j) = (Tx_i | y_j)$$

$$Tx = \sum_{i \in I} (x | x_i) \sum_{j \in J} \alpha(i, j) y_j$$

$$T^* \longrightarrow \alpha^*(i, j) = \overline{\alpha(j, i)}$$

## Operadores de multiplicación

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$  medida  $\sigma$ -finita,  $H = L_2(\mu)$ ,  $\phi \in L_\infty(\mu)$

$$M_\phi(f) = \phi f \quad \forall f \in L_2(\mu)$$

- $M_\phi \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|M_\phi\| = \|\phi\|_\infty$
- $M_{\phi\psi} = M_\phi M_\psi$
- $M_\phi^* = M_{\phi^*}$ ,  $\phi^*(t) = \overline{\phi(t)}$  ( $t \in \Omega$ )
- $M_\phi$  siempre es normal
- $M_\phi$  autoadjunto  $\iff \overline{\phi} = \phi$  c.p.d.
- $M_\phi$  unitario  $\iff |\phi| = 1$  c.p.d.

Operadores en espacios de Hilbert

○○○

Operadores compactos

○○

Ejemplos

○●

Teorema espectral

○○○○○

## Ejemplos(II)



## Ejemplos(II)

Operadores de multiplicación, caso particular

## Ejemplos(II)

### Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

## Ejemplos(II)

### Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

Operador integral de núcleo  $k$ :

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$



## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu)), \quad \|T_k\| \leq \|k\|_2$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho,  $T_k \in K(H)$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho,  $T_k \in K(H)$

Ejemplo (**operador de Volterra**):

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho,  $T_k \in K(H)$

Ejemplo (**operador de Volterra**):  $\mu =$  medida de Lebesgue en  $[0,1]$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho,  $T_k \in K(H)$

Ejemplo (**operador de Volterra**):  $\mu =$  medida de Lebesgue en  $[0,1]$

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t \geq s \end{cases}$$

## Ejemplos(II)

## Operadores de multiplicación, caso particular

$$\Omega = \mathbb{N}, \quad L_2(\mu) = l_2, \quad \phi \equiv \{\alpha_n\}$$

$$[M_\phi(x)](n) = \alpha_n x(n)$$

$$M_\phi \in K(l_2) \iff \{\alpha_n\} \rightarrow 0$$

## Operadores integrales

$$(\Omega, \mathcal{A}, \mu) \text{ medida } \sigma\text{-finita}, \quad H = L_2(\mu), \quad k \in L_2(\mu \otimes \mu)$$

**Operador integral de núcleo**  $k$ :  $[T_k f](s) = \int_{\Omega} k(s,t) f(t) d\mu(t)$

- $T_k \in L(L_2(\mu))$ ,  $\|T_k\| \leq \|k\|_2$
- $T_k^* = T_{k^*}$ ,  $k^*(s,t) = \overline{k(t,s)}$
- De hecho,  $T_k \in K(H)$

Ejemplo (**operador de Volterra**):  $\mu =$  medida de Lebesgue en  $[0,1]$

$$k(s,t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t < s \\ 0 & \text{si } t \geq s \end{cases} \quad [T_k f](s) = \int_0^s f(t) dt$$

## Planteamiento del problema



## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \quad \longrightarrow \quad \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases}$$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i),$$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i), \quad Te_i = \alpha_i e_i$$



## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i), \quad Te_i = \alpha_i e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$  **autovalor** de  $T$  cuando  $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i), \quad Te_i = \alpha_i e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$  **autovalor** de  $T$  cuando  $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$$\sigma_p(T) = \{ \text{autovalores del operador } T \}$$

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i), \quad Te_i = \alpha_i e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$  **autovalor** de  $T$  cuando  $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$$\sigma_p(T) = \{ \text{autovalores del operador } T \}$$

$\ker(T - \alpha I)$  **subespacio propio**, formado por los **vectores propios**

## Planteamiento del problema

¿Se puede diagonalizar un operador?

$H$  espacio de Hilbert con base ortonormal  $\{e_i : i \in I\}$ ,  $T \in L(H)$

$$T \longrightarrow \alpha_T : I \times I \rightarrow \mathbb{K}, \quad \alpha_T(i, j) = (Te_j | e_i)$$

$$(Tx | e_i) = \sum_{j \in I} \alpha_T(i, j) (x | e_j)$$

¿Se puede elegir  $\{e_i\}$  de forma que  $\alpha_T$  sea diagonal?

$$\alpha_T(i, j) = \begin{cases} \alpha_i & \text{si } j = i \\ 0 & \text{si } j \neq i \end{cases} \quad (Tx | e_i) = \alpha_i (x | e_i), \quad Te_i = \alpha_i e_i$$

$\alpha \in \mathbb{K}$  **autovalor** de  $T$  cuando  $\ker(T - \alpha I) \neq \{0\}$

$$\sigma_p(T) = \{ \text{autovalores del operador } T \}$$

$\ker(T - \alpha I)$  **subespacio propio**, formado por los **vectores propios**

Un operador es diagonalizable si, y sólo si,  
admite una base ortonormal formada por vectores propios.

Operadores en espacios de Hilbert  
○○○

Operadores compactos  
○○

Ejemplos  
○○

Teorema espectral  
○●○○○

## Teorema espectral para operadores compactos

# Teorema espectral para operadores compactos

## Observaciones

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$



## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$

es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$

es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores

$S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)

$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$

es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores

$S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores

- El operador  $V$  de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores.  $V$  no es normal.

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)  
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores  
 $S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador  $V$  de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores.  $V$  no es normal.

### Teorema espectral para operadores compactos

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)  
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores  
 $S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador  $V$  de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores.  $V$  no es normal.

### Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador **compacto y normal**

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)  
 $[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$   
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores  
 $S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador  $V$  de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores.  $V$  no es normal.

### Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador **compacto y normal**  
en un espacio de Hilbert **complejo**

## Teorema espectral para operadores compactos

### Observaciones

- Todo operador diagonalizable es normal
- El operador de desplazamiento (bilateral)  
$$[Sx](n) = x(n+1) \quad (n \in \mathbb{Z}, x \in l_2^{\mathbb{Z}})$$
es unitario, luego normal, pero no tiene autovalores  
 $S + S^*$  es autoadjunto y tampoco tiene autovalores
- El operador  $V$  de Volterra es compacto, pero no tiene autovalores.  $V$  no es normal.

### Teorema espectral para operadores compactos

Todo operador **compacto y normal**  
en un espacio de Hilbert **complejo**  
es **diagonalizable**

## Esquema de la demostración



## Esquema de la demostración

Existencia de autovalores

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

(1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$



## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$
- (3)  $\exists \alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| = \|T\|$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$
- (3)  $\exists \alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| = \|T\|$
- (4)  $\alpha \in \sigma_p(T), \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$
- (3)  $\exists \alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| = \|T\|$
- (4)  $\alpha \in \sigma_p(T), \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$
- (5)  $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$
- (3)  $\exists \alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| = \|T\|$
- (4)  $\alpha \in \sigma_p(T), \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$
- (5)  $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$
- (6)  $\forall \varepsilon > 0, \{\alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| \geq \varepsilon\}$  es finito

## Esquema de la demostración

### Existencia de autovalores

$H$  espacio de Hilbert (real o complejo),  $S \in K(H)$ ,  $S^* = S$ . Entonces:

$$\sigma_p(S) \subset \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \exists \alpha \in \sigma_p(S) : |\alpha| = \|S\|$$

### Pasos sucesivos de la demostración

$H$  espacio de Hilbert complejo,  $T \in K(H)$ ,  $TT^* = T^*T$ .

Para  $\alpha \in \mathbb{C}$  sea  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$  y  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$  proyección

- (1)  $\sigma_p(T) \neq \emptyset$
- (2)  $E_\alpha = \ker(T^* - \bar{\alpha}I) \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$  luego  $\sigma_p(T^*) = \{\bar{\alpha} : \alpha \in \sigma_p(T)\}$
- (3)  $\exists \alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| = \|T\|$
- (4)  $\alpha \in \sigma_p(T), \alpha \neq 0 \implies \dim(E_\alpha) < \infty$
- (5)  $\alpha, \beta \in \sigma_p(T), \alpha \neq \beta \implies E_\alpha \subset E_\beta^\perp, P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$
- (6)  $\forall \varepsilon > 0, \{\alpha \in \sigma_p(T) : |\alpha| \geq \varepsilon\}$  es finito
- (7)  $\sigma_p(T)$  es numerable y 0 su único posible punto de acumulación.

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$



## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\Delta = \sigma_p(T), \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I), \quad P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$$

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\Delta = \sigma_p(T), \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I), \quad P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$$

Primera versión: Resolución espectral (canónica)

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\Delta = \sigma_p(T), \quad E_\alpha = \ker(T - \alpha I), \quad P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta, \alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

### Segunda versión: Diagonalización

## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

### Segunda versión: Diagonalización

Existe un sistema ortonormal numerable  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  y  $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}$  tales que

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma e_\gamma \otimes e_\gamma \quad Tx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma (x|e_\gamma) e_\gamma$$



## Las dos primeras versiones del Teorema Espectral

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$   
 $\Delta = \sigma_p(T)$ ,  $E_\alpha = \ker(T - \alpha I)$ ,  $P_\alpha : H \rightarrow E_\alpha$

### Primera versión: Resolución espectral (canónica)

$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_\alpha, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_\alpha$$

- Convergencia en la norma de operadores
- $\alpha \in \Delta \setminus \{0\} \implies \dim E_\alpha < \infty$
- $\alpha, \beta \in \Delta$ ,  $\alpha \neq \beta \implies P_\alpha P_\beta = P_\beta P_\alpha = 0$

### Segunda versión: Diagonalización

Existe un sistema ortonormal numerable  $\{e_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$  y  $\{\alpha_\gamma : \gamma \in \Gamma\} \subset \mathbb{C}$  tales que

$$T = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma e_\gamma \otimes e_\gamma \quad Tx = \sum_{\gamma \in \Gamma} \alpha_\gamma (x|e_\gamma) e_\gamma$$

es decir,  $T$  es diagonalizable. Así pues, un operador compacto en un espacio de Hilbert complejo es diagonalizable si, y sólo si, es normal.

Operadores en espacios de Hilbert

○○○

Operadores compactos

○○

Ejemplos

○○

Teorema espectral

○○○○●

## Tercera versión

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

Resolución espectral:  $T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}$  ,  $I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

Resolución espectral: 
$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha} , \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

## Cálculo funcional acotado

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

Resolución espectral: 
$$T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)



## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de  $l_{\infty}^{\Delta}$  en  $L(H)$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de  $l_{\infty}^{\Delta}$  en  $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras:  $(\varphi\psi)[T] = \varphi[T]\psi[T]$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de  $l_{\infty}^{\Delta}$  en  $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras:  $(\varphi\psi)[T] = \varphi[T]\psi[T]$
- De hecho un  $*$ -homomorfismo:  $\overline{\varphi}[T] = \varphi[T]^*$

## Tercera versión

$T$  operador compacto y normal en un espacio de Hilbert complejo  $H$

$$\text{Resolución espectral: } T = \sum_{\alpha \in \Delta} \alpha P_{\alpha}, \quad I = \sum_{\alpha \in \Delta} P_{\alpha}$$

### Cálculo funcional acotado

Para cada función acotada  $\varphi \in l_{\infty}^{\Delta}$  escribimos

$$\varphi[T] = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} \quad \varphi[T]x = \sum_{\alpha \in \Delta} \varphi(\alpha) P_{\alpha} x$$

La aplicación  $\varphi \mapsto \varphi[T]$  es el **cálculo funcional acotado** en el operador  $T$

### Tercera versión: Cálculo funcional (canónico)

El cálculo funcional acotado es:

- Una aplicación lineal isométrica de  $l_{\infty}^{\Delta}$  en  $L(H)$
- Un homomorfismo de álgebras:  $(\varphi\psi)[T] = \varphi[T]\psi[T]$
- De hecho un  $*$ -homomorfismo:  $\overline{\varphi}[T] = \varphi[T]^*$
- $\varphi_0[T] = I$ ,  $\varphi_1[T] = T$  donde  $\varphi_0(\alpha) = 1$ ,  $\varphi_1(\alpha) = \alpha \quad \forall \alpha \in \Delta$