Cálculo de funciones de una variable

Licenciatura en Matemáticas (plan 2000)

Miguel Martín Suárez & Javier Pérez González

Granada, 2001

Índice general

Capítulo 1

Números y funciones. Continuidad y límite funcional.

1.1. Desarollo teórico

Números reales: propiedades algebraicas, desigualdades.

Como todos sabéis se distinguen distintas clases de números:

Los números naturales 1,2,3,... . El conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{N}$.

Los números enteros ...,-2,-1,0,1,2,... cuyo conjunto se representa por $\mathbb{Z}$.

Los números racionales que son cocientes de la forma p/q donde $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$, cuyo conjunto representamos por $\mathbb{Q}$.

También conocéis otros números como $\sqrt{2}$, π, o el número e que no son números racionales y que se llaman, con una expresión no demasiado afortunada, "números irracionales". Pues bien, el conjunto formado por todos los números racionales e irracionales se llama conjunto de los números reales y se representa por $\mathbb{R}$.

Es claro que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$.

Aunque los números que no son racionales pueden parecer un poco raros, no merece la pena, al menos por ahora, preocuparse por cómo son estos números; sino que lo realmente interesante es aprender a trabajar con ellos. Lo interesante del número $\sqrt{2}$ es que su cuadrado es igual a 2.

Pues bien, una de las cosas más llamativas de los números es que a partir de un pequeño grupo de propiedades pueden deducirse casi todas las demás. Vamos a destacar estas propiedades básicas que, naturalmente, hacen referencia a las dos operaciones fundamentales que se pueden hacer con los números: la suma y el producto. La suma de dos números reales x, y se escribe $x + y$, representándose el producto por xy. Las propiedades básicas a que nos referimos son las siguientes.

P1 [Propiedades asociativas] $(x+y)+z = x+(y+z)$; $(xy)z = x(yz)$ para todos x, y, z en $\mathbb{R}$.

P2 [Propiedades conmutativas] $x+y = y+x$; $xy = yx$ para todos x, y en $\mathbb{R}$.

P3 [Elementos neutros] El 0 y el 1 son tan importantes que enunciamos seguidamente sus propiedades:

$$0+x = x \quad ; \quad 1x = x \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}.$$

P4 [Elementos opuesto e inverso] Para cada número real x hay un número real llamado *opuesto de* x, que representamos por $-x$, tal que $x+(-x) = 0$.

Para cada número real x distinto de 0, $x \neq 0$, hay un número real llamado *inverso de* x, que representamos por x^{-1}, tal que $xx^{-1} = 1$.

P5 [Propiedad distributiva] $(x+y)z = xz + yz$ para todos x, y, z en $\mathbb{R}$.

Las propiedades anteriores son de tipo algebraico y, aunque son muy sencillas, a partir de ellas pueden *probarse* cosas tan familiares como que $0x = 0$, o que $(-x)y = -(xy)$.

Pero los números tienen, además de las propiedades algebraicas, otras propiedades que suelen llamarse *propiedades de orden*. Como todos sabemos, los números suelen representarse como puntos de una recta en la que se fija un origen, el 0, de forma arbitraria. Los números que hay a la derecha de 0, se llaman *positivos* y el conjunto de todos ellos se representa por $\mathbb{R}^+$. Las propiedades básicas del orden son las siguientes.

P6 [Ley de tricotomía] Para cada número real x se verifica que o bien es $x = 0$, o bien x es positivo, o bien su opuesto $-x$ es positivo.

P7 [Estabilidad de $\mathbb{R}^+$] La suma y el producto de números positivos es también un número positivo.

Suele escribirse $x - y$ en vez de $x + (-y)$. También, supuesto $y \neq 0$, se escribe x/y o $\frac{x}{y}$ en vez de xy^{-1}. Los opuestos de los números positivos, es decir los elementos del conjunto $\mathbb{R}^- = \{-x : x \in \mathbb{R}^+\}$, se llaman *números negativos*. Nótese que el 0 no es positivo ni negativo.

Para $x, y \in \mathbb{R}$ escribimos $x < y$ (léase *x es menor que y*) o $y > x$ (léase *y es mayor que x*) para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+$, y escribimos $x \leqslant y$ o $y \geqslant x$ para indicar que $y - x \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$. En adelante usaremos las notaciones: $\mathbb{R}^+_o = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $\mathbb{R}^-_o = \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ y $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Nótese que si $x \in \mathbb{R}^-$ entonces $-x \in \mathbb{R}^+$.

Reglas para trabajar con desigualdades.

Sean x, y, z números reales, entonces:

i) $x \leqslant y$ e $y \leqslant z$ implican que $x \leqslant z$.

ii) $x \leqslant y$ e $y \leqslant x$ implican que $x = y$.

iii) Se verifica exactamente una de las tres relaciones: $x < y$, $x = y$, o $y < x$.

iv) $x < y$ implica que $x + z < y + z$.

v) $x < y$, $z > 0$ implican que $xz < yz$.

vi) $x < y$, $z < 0$ implican que $xz > yz$.

vii) $xy > 0$ si, y sólo si, x e y son los dos positivos o los dos negativos. En consecuencia si $x \neq 0$ es $x^2 > 0$ y, en particular, $1 > 0$.

viii) $z > 0$ implica que $\dfrac{1}{z} > 0$.

ix) Supuesto que x e y son los dos positivos o los dos negativos, se verifica que $x < y$ implica que $\dfrac{1}{y} < \dfrac{1}{x}$.

Recordemos que el **valor absoluto** de un número $x \in \mathbb{R}$ se define como el número:

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$$

Para trabajar con valores absolutos es útil recordar que dado $x \in \mathbb{R}_o^+$, representamos por $\sqrt{x}$ al único número *mayor o igual que cero* cuyo cuadrado es igual a x. Puesto que, evidentemente, $|x|^2 = x^2$ y, *además*, $|x| \geqslant 0$, se tiene que $|x| = \sqrt{x^2}$. La utilidad de esto deriva de la siguiente estrategia de procedimiento:

Dados $a, b \in \mathbb{R}_o^+$ para probar que $a = b$ es suficiente probar que $a^2 = b^2$ y para probar que $a < b$ es suficiente probar que $a^2 < b^2$.

Geométricamente, $|x|$ representa la distancia de x al origen, 0, en la recta real. De manera más general:

$$|x - y| = \text{distancia entre } x \text{ e } y$$

representa la longitud del segmento de extremos x e y.

Propiedades del valor absoluto.

Para $x, y \in \mathbb{R}$ se verifica que:

i) $|xy| = |x||y|$;

ii) $|x| \leqslant y$ es equivalente a $-y \leqslant x \leqslant y$;

iii) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$ **(desigualdad triangular)**;

iv) $\big||x| - |y|\big| \leqslant |x - y|$ y la igualdad se da si, y sólo si, $xy \geqslant 0$.

El último axioma. Todas las propiedades de los números reales que enunciamos en la primera lección las tienen también los números racionales. Sin embargo, $\sqrt{2}$ es un número real que no es racional. Concluimos que los números reales deberán tener otra propiedad que todavía no hemos considerado.

Comentamos el primer día que no debemos preocuparnos mucho *por lo que sea* el número $\sqrt{2}$, pero al menos deberíamos de tener alguna forma de *probar su existencia*; es decir, de las propiedades de los números reales se debería poder deducir que hay un número cuyo cuadrado es igual a 2. ¿Qué sabemos de $\sqrt{2}$? No es racional, pero podemos aproximarlo por racionales. Con una calculadora obtenemos sucesivas aproximaciones racionales de $\sqrt{2}$ por defecto:

$$1{,}41,\ 1{,}414,\ 1{,}4142,\ 1{,}41421,\ 1{,}414213, \ldots$$

Es claro que $\sqrt{2}$ debe ser el *menor número mayor que todas ellas*. Pues bien, justamente necesitamos una propiedad que garantice la existencia de ese "menor número mayor que". Nos vendrá bien introducir alguna terminología nueva.

Sea E un conjunto no vacío de números reales. Un número $z \in \mathbb{R}$ se dice que es un **mayorante o cota superior** (resp. **minorante o cota inferior**) de E si $x \leqslant z$ (resp. $z \leqslant x$) para todo $x \in E$. Si hay algún elemento de E que también sea mayorante (resp. minorante) de E, dicho elemento es necesariamente único y se llama **máximo** (resp. **mínimo**) de E y lo representaremos por $\text{máx}(E)$ (resp. $\text{mín}(E)$). Un conjunto que tiene algún mayorante (resp. minorante) se dice que está **mayorado o acotado superiormente** (resp. **minorado o acotado inferiormente**). Un conjunto que está mayorado y minorado se dice que está **acotado**.
Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y mayorado, se llama **supremo o extremo superior** de E, al mínimo mayorante de E y lo notaremos por $\sup(E)$ (nótese que el supremo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

P8 [Propiedad del supremo] Todo conjunto de números reales no vacío y mayorado tiene supremo.

La propiedad del supremo es lo que distingue a los números reales de los racionales. Dicha propiedad se usa para probar la existencia de números reales que cumplen alguna determinada condición. Veremos más adelante que la demostración del teorema de Bolzano es un ejemplo importante de ello.

A partir de la propiedad del supremo, se prueba con facilidad la **propiedad del ínfimo**: Para todo conjunto de números reales no vacío y minorado se verifica que el conjunto de sus minorantes tiene máximo.

Dado un conjunto $E \subseteq \mathbb{R}$, no vacío y minorado, se llama **ínfimo o extremo inferior** de E, al máximo minorante de E y lo notaremos por $\text{ínf}(E)$. Con esta terminología lo que dice la propiedad del ínfimo es que todo conjunto de números reales no vacío y minorado tiene ínfimo (pero nótese que el ínfimo no tiene por qué pertenecer al conjunto).

Principio de inducción matemática. Sea A un conjunto de números naturales, $A \subseteq \mathbb{N}$, y supongamos que:

i) $1 \in A$

ii) Siempre que un número n está en A se verifica que $n+1$ también está en A.

Entonces $A = \mathbb{N}$.

El Principio de Inducción Matemática es la herramienta básica para probar que una cierta propiedad $P(n)$ es verificada por todos los números naturales. Para ello se procede de la siguiente forma:

a) Comprobamos que el número 1 satisface la propiedad, esto es, que $P(1)$ es cierta.

b) Comprobamos que si un número n satisface la propiedad, *entonces* también el número $n+1$ la satisface. Es decir comprobamos que si $P(n)$ es cierta, *entonces* también lo es $P(n+1)$.

Nótese que en b) no se dice que se tenga que probar que $P(n)$ es cierta, sino que hay que *demostrar la implicación lógica* $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$.

Si definimos el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ es cierta}\}$, entonces el punto a) nos dice que $1 \in A$, y el punto b) nos dice que siempre que n está en A se verifica que $n+1$ también está en A. Concluimos que $A = \mathbb{N}$, o sea, que $P(n)$ es cierta para todo número natural n.

Ejemplo 1

Pruébese que para todo $n \in \mathbb{N}$ se verifica la desigualdad:

$$\sqrt{n} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant 2\sqrt{n}$$

Ejemplo 2

Para cada número natural n, sea $P(n)$ la proposición *si el producto de n números positivos es igual a 1, entonces su suma es mayor o igual que n*. Demostraremos por inducción que $P(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbb{N}$. Trivialmente $P(1)$ es verdadera. Supongamos que $P(n)$ es verdadera. Consideremos $n+1$ números positivos no todos iguales a 1 cuyo producto sea igual a 1. En tal caso alguno de dichos números, llamémosle x_1, tiene que ser menor que 1 y otro, al que llamaremos x_2, tiene que ser mayor que 1. Notando $x_3, \cdots, x_{n+1}$ los restantes números se tiene que:

$$(x_1 x_2) x_3 \cdots x_n = 1$$

es decir, $x_1 x_2, x_3, \cdots, x_{n+1}$ son n números positivos con producto igual a 1 por lo que:

$$x_1 x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} \geqslant n \qquad (1)$$

y como $0 < (1 - x_1)(x_2 - 1)$, tenemos que:

$$x_1 + x_2 > 1 + x_1 x_2 \qquad (2)$$

De (1) y (2) se sigue que:

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots + x_{n+1} > n + 1$$

Hemos probado así que $P(n+1)$ es verdadera.

Consecuencia: Desigualdad de las medias.

Cualesquiera sean los números positivos $a_1, a_2, \cdots, a_n$ se verifica que:

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

y la igualdad se da si, y sólo si, $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Basta poner $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ y $x_i = \dfrac{a_i}{G}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, con lo cual $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$ por lo que $\sum_{i=1}^{n} x_i \geqslant n$ es decir $\sum_{i=1}^{n} a_i \geqslant nG$ y se da la igualdad solamente cuando $x_i = 1$, para $i = 1, 2, \ldots, n$; es decir, cuando $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

El principio de inducción matemática puede aplicarse en muchas situaciones en las que, a primera vista, no aparecen para nada los números naturales. Por ejemplo, una proposición referente a todos los polinomios podría probarse por inducción sobre el grado del polinomio. Un teorema sobre matrices cuadradas podría probarse por inducción sobre el orden de la matriz.

Probaremos a continuación una útil igualdad algebraica conocida como *fórmula del binomio de Newton*.

Para establecer esta igualdad necesitamos definir los llamados *coeficientes binómicos*. Dados dos números enteros $n \geqslant k \geqslant 0$ se define:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

donde

$$n! = \prod_{p=1}^{n} p$$

es decir, $n!$ es el producto de todos los números naturales menores o iguales que n. Se define también $0! = 1$.

La igualdad

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k} \quad (1 \leqslant k \leqslant n) \tag{1.1}$$

es de comprobación inmediata. A partir de ella se prueba fácilmente, por inducción sobre n, que $\binom{n}{k}$ es un número entero positivo. Lo que resulta evidente sin más que considerar el llamado *triángulo de Pascal*, en el cual $\binom{n}{k}$ es el número que figura en la fila n columna k.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

Fórmula del binomio de Newton Cualesquiera sean los números reales a, b y el número natural n se verifica que:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k.$$

Demostración
Para $n = 1$ la igualdad del enunciado es trivialmente verdadera. Supongamos que dicha igualdad se verifica para $n \in \mathbb{N}$. Entonces:

$$(a+b)^{n+1} = (a+b)(a+b)^n = (a+b)\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k\right] =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^{k+1} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n+1-k}b^k + \sum_{k=1}^{n+1}\binom{n}{k-1}a^{n+1-k}b^k =$$

$$= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n}\left[\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}\right]a^{n+1-k}b^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}a^{n+1-k}b^k$$

lo que prueba la validez de la igualdad para $n+1$. En virtud del principio de inducción, concluimos que la igualdad del enunciado es cierta para todo $n \in \mathbb{N}$. □

No hay que olvidar que el coeficiente binómico $\binom{n}{k}$ representa el número de subconjuntos distintos de k elementos que tiene un conjunto de n elementos.

Funciones reales

Las funciones son las herramientas principales para la descripción matemática de una situación real. Todas las *fórmulas* de la Física no son más que funciones: expresan cómo ciertas magnitudes (por ejemplo el volumen de un gas) dependen de otras (la temperatura y la presión). El concepto de función es tan importante que muchas ramas de la matemática moderna se caracterizan por el tipo de funciones que estudian. No es de extrañar, por ello, que el concepto de función sea de una gran generalidad. Además, se trata de uno de esos conceptos cuyo contenido esencial es fácil de comprender pero difícil de formalizar.

La idea básica de función es la siguiente. Supongamos que tenemos dos conjuntos A y B; una función de A en B es una *regla* que *a cada elemento de A asocia un único elemento de B.*

En este curso estamos interesados principalmente en funciones entre conjuntos de números reales, es decir, A y B son subconjuntos de $\mathbb{R}$; con frecuencia $B = \mathbb{R}$. Estas funciones se llaman *funciones reales de una variable real*. En lo que sigue nos referiremos solamente a este tipo de funciones y, si no se especifica otra cosa, se entiende que $B = \mathbb{R}$. Por tanto, para darnos una función nos deben decir, en principio, el subconjunto A de $\mathbb{R}$ y la regla que asigna a cada número de A un único número real. El conjunto A recibe el nombre de *dominio* de la función.

Las funciones se representan por letras. En la práctica las letras más usadas son f, g y h, pero cualquiera otra es también buena. Si f es una función y x es un número que está en su dominio, se representa por $f(x)$ (léase "f de x") el número que f asigna a x, que se llama *imagen de x por f. Es muy importante en este curso distinguir entre f (una función) y $f(x)$ (un número real).*

Es importante advertir que las propiedades de una función depende de la regla que la define *y también de su dominio*, por ello *dos funciones que tienen distintos dominios se consideran distintas funciones aunque la regla que las defina sea la misma.*

Criterio de igualdad para funciones. Dos funciones f y g son iguales cuando tienen igual dominio y $f(x) = g(x)$ para todo x en el dominio común.

Notemos también que aunque estamos acostumbrados a representar a las funciones mediante *fórmulas*, no siempre es posible hacerlo.

El símbolo $f\colon A \to \mathbb{R}$ se utiliza para indicar que f es una función *cuyo dominio es A* (se supone, como hemos dicho antes, que A es un subconjunto de $\mathbb{R}$)

Veamos unos ejemplos sencillos.

a) Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = x^2$.

b) Sea $g\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por $g(x) = x^2$.

c) Sea $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada por: $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$

d) Sea $f(x) = \dfrac{x^3 + 5x + 6}{x^2 - 1}$

Según lo antes dicho, las funciones en a) y b) son distintas. Nótese que la función definida en b) es creciente y la definida en a) no lo es.

La función definida en c) es llamada *función de Dirichlet*. Nótese que no es fácil calcular los valores de dicha función porque no siempre se sabe si un número real dado es racional o irracional. ¿Es $e + \pi$ racional? Pese a ello la función está correctamente definida.

En d) no nos dan explícitamente el dominio de f por lo que se entiende que f está definida siempre que $f(x)$ tenga sentido, es decir, siempre que, $x^2 - 1 \neq 0$, esto es, para $x \pm 1$.

El convenio del dominio

Cuando una función se define mediante una fórmula $\boxed{f(x) = \text{fórmula}}$ y el dominio no es explícito, se entiende que el dominio es el mayor conjunto de valores de x para los cuales la expresión $f(x)$ tiene sentido como número real. Éste es el llamado *dominio natural* de la función. Si queremos restringir el dominio natural de alguna manera, entonces debemos decirlo de forma explícita.

Usaremos la notación $dom(f)$ para representar el dominio de una función f (dicho dominio puede ser el natural o un subconjunto del mismo). El conjunto de todos los valores que toma una función, $\{f(x) : x \in dom(f)\}$, suele llamarse *rango o recorrido de* f, o simplemente, *la imagen* de f y lo representaremos por $imagen(f)$.

Ocurre que el dominio natural de muchas funciones es un conjunto que está formado por la unión de varios *intervalos*. Recordemos el concepto de intervalo y cuántos tipos diferentes hay.

Definición. Un conjunto $I \subseteq \mathbb{R}$ se llama un *intervalo* si siempre que dos números están en I todos los números comprendidos entre ellos dos también están en I. El conjunto vacío, Ø, se considera también como un intervalo.

Además de $\mathbb{R}$ y del Ø, hay los siguientes tipos de intervalos.

Intervalos que tienen dos puntos extremos a y b (donde $a \leq b$ son números reales):

$$
\begin{aligned}
&[a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x \leqslant b\}\ ; && \text{(intervalo cerrado)}\\
&]a,b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}\ ; && \text{(intervalo abierto)}\\
&[a,b[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a \leqslant x < b\}\ ; && \text{(intervalo abierto a derecha y cerrado a izquierda)}\\
&]a,b] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : a < x \leqslant b\}\ ; && \text{(intervalo abierto a izquierda y cerrado a derecha)}
\end{aligned}
$$

Intervalos que tienen un único punto extremo $c \in \mathbb{R}$ llamado *origen* del intervalo:

$$
\begin{aligned}
&]-\infty, c[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x < c\}\ ; && \text{(semirrecta abierta a la izquierda)}\\
&]-\infty, c] \overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \leqslant c\}\ ; && \text{(semirrecta cerrada a la izquierda)}\\
&]c, +\infty[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x > c\}\ ; && \text{(semirrecta abierta a la derecha)}\\
&[c, +\infty[\overset{\text{def}}{=} \{x \in \mathbb{R} : x \geqslant c\}\ ; && \text{(semirrecta cerrada a la derecha)}
\end{aligned}
$$

Como es la primera vez que aparecen, hay que decir que los símbolos $+\infty$ (léase: "más infinito") y $-\infty$ (léase: "menos infinito"); son eso: símbolos. No son números. Cada vez que aparece uno de ellos en una situación determinada hay que recordar cómo se ha definido su significado para dicha situación. A veces, se escribe $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$.

La mayoría de las funciones que vamos a usar en este curso pertenecen a la clase de las *funciones elementales*. Se llaman así porque pueden obtenerse a partir de ciertos tipos de funciones bien conocidas realizando las operaciones de suma, producto, cociente y composición de funciones.

Dadas dos funciones f y g se define su *función suma* (resp. *producto*) como la función que a cada número $x \in dom(f) \cap dom(g)$ asigna el número real $f(x) + g(x)$ (resp. $f(x)g(x)$). Dicha función se representa con el símbolo $f + g$ (resp. fg). Se define la función cociente de f por g como la función que a cada número $x \in dom(f) \cap dom(g)$ con $g(x) \neq 0$ asigna el número real $\dfrac{f(x)}{g(x)}$. Dicha función se representa con el símbolo $\dfrac{f}{g}$. También podemos multiplicar una función f por un número α para obtener la función αf que asigna a cada $x \in dom(f)$ el número $\alpha f(x)$. De todas formas, el producto de un número por una función puede considerarse como un caso particular del producto de funciones, pues se identifica el número α con la *función constante* que toma como único valor α.

Las propiedades de la suma y el producto de funciones son las que cabe esperar y su demostración es inmediata pues se reducen a las correspondientes propiedades de los números.

Cualesquiera sean las funciones f, g y h se verifica:

Propiedades asociativas. $(f+g)+h = f+(g+h)$; $(fg)h = f(gh)$

Propiedades conmutativas. $f+g = g+f$; $fg = gf$

Propiedad distributiva. $(f+g)h = fh+gh$

Composición de funciones.

Supongamos que f y g son funciones verificando que $imagen(f) \subset dom(g)$. En tal caso, la función h dada por $h(x) = g(f(x))$ para todo $x \in dom(f)$ se llama *composición de g con f* y se representa por $g \circ f$. La composición de funciones es asociativa, esto es

$$(g \circ f) \circ h = g \circ (f \circ h).$$

Funciones inyectivas.

Se dice que una función f es inyectiva en un conjunto $A \subseteq dom(f)$, si en puntos distintos de A toma valores distintos; es decir, $x, y \in A$ y $x \neq y$, entonces $f(x) \neq f(y)$. Se dice que f es inyectiva cuando es inyectiva en $dom(f)$.

La función inversa de una función inyectiva. Si f es una función inyectiva, puede definirse una nueva función $f^{-1}\colon imagen(f) \to \mathbb{R}$ que llamaremos *función inversa de f*, que a cada número $y \in imagen(f)$ asigna el único número $x \in dom(f)$ tal que $f(x) = y$. Equivalentemente $f^{-1}(f(x)) = x$ para todo $x \in dom(f)$, y también $f(f^{-1}(y)) = y$ para todo $y \in dom(f^{-1}) = imagen(f)$.

Funciones monótonas. Se dice que una función f es creciente (resp. decreciente) en un conjunto $A \subseteq dom(f)$, si f conserva (resp. invierte) el orden entre puntos de A, es decir, si $x, y \in A$ y $x \leqslant y$, entonces $f(x) \leqslant f(y)$ (resp. $f(x) \geqslant f(y)$). Se dice que f es creciente (resp. decreciente) cuando lo es en todo su dominio ($A = dom(f)$). Se dice que una función es *monótona* para indicar que es creciente o decreciente. Una función monótona e inyectiva se dice que es *estrictamente monótona*, pudiendo ser estrictamente creciente o estrictamente decreciente.

Gráfica de una función. La gráfica de una función f es el conjunto de pares de números $\{(x, f(x)) : x \in dom(f)\}$.

La gráfica de una función pone de manifiesto, a simple vista, muchas de sus propiedades. Para dibujar gráficas de funciones se precisan herramientas de cálculo que estudiaremos más adelante.

Continuidad

Para motivar la definición que vamos a dar de continuidad, consideremos una ley física de la forma $P = f(V)$, que relaciona los valores de una "variable independiente V" (podemos pensar que es el volumen de un gas) con otra "variable dependiente P" (podemos pensar que es la presión). Si queremos usar dicha ley, hemos de medir un valor V_o de la variable V, y es inevitable que al hacerlo cometamos algún error el cual, naturalmente, influye en el correspondiente valor de P, que ya no será exactamente igual a $P_o = f(V_o)$. Surge así la pregunta natural: ¿de qué forma el error en la medida de V afecta al valor resultante de P? Es claro que si para valores de V "muy próximos" a V_o obtengo valores de P muy diferentes entre sí, la ley "f" que relaciona V con P no tendrá ninguna utilidad práctica.

Puesto que los errores de medida son inevitables, no es razonable tratar de obtener "el verdadero valor P_o". Lo que sí puede hacerse es fijar una cota de error admisible para P (la cual dependerá de cada situación concreta); llamemos "ε" a dicha cota, ($\varepsilon > 0$), y tratar de obtener otra cota de error "δ", ($\delta > 0$), de tal forma que siempre que midamos V_o con un error menor que δ tengamos la seguridad de que el valor resultante para P se diferencia de P_o en menos que ε. Esto es, $|f(V) - f(V_o)| < \varepsilon$ siempre que $|V - V_o| < \delta$. Cuando esto efectivamente pueda hacerse para cualquier cota de error $\varepsilon > 0$ decimos que la ley "f" es continua en V_o. Nótese que cabe esperar que la cota de error δ dependa del $\varepsilon > 0$ fijado en cada caso, y también de V_o.

Las ideas anteriores conducen, de forma natural, a la definición matemática de continuidad. En todo lo que sigue, la letra A representará un conjunto no vacío de números reales. En la práctica A será siempre un intervalo o una unión de intervalos. Recuérdese que la notación $f\colon A \to \mathbb{R}$ quiere decir que f es una función real cuyo dominio es A. Es muy importante advertir que A no tiene por qué coincidir con el dominio natural de la función. Esto es así porque con frecuencia estamos interesados en estudiar propiedades de una función en una parte de su dominio natural. Además, la continuidad de f depende tanto de la "regla que la define" como del conjunto en donde estamos trabajando. Enseguida pondremos ejemplos para aclarar esto.

Definición de continuidad en un punto. Una función $f\colon A \to \mathbb{R}$ se dice que es continua en un punto $a \in A$ si, para cada número $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un número $\delta > 0$ (que, en general, dependerá de ε y de a) tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < \delta$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

La definición anterior suele escribirse, con abuso del formalismo lógico, de la siguiente forma:

$$\forall\varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists\,\delta\in\mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} |x-a| < \delta \\ x\in A \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Adviértase cómo en esta definición el conjunto A tiene mucho protagonismo: sólo se consideran los valores de f en A, lo que le pueda pasara a f fuera de A no nos interesa.

Se dice que f es continua en un subconjunto $C \subseteq A$, si f es continua en todo punto de C.

Ejemplo. Función "parte entera". Se llama así la función que a cada número x asigna *el mayor entero que es menor o igual que x*. Dicha función se representa con la letra E y está definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por las condiciones siguientes:

$$E(x) \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad E(x) \leqslant x < E(x) + 1$$

No es difícil probar que esta función es discontinua en todos los enteros. Ahora, si consideramos a dicha función trabajando solamente en el intervalo $[1,2[$, es decir, la función f cuyo dominio es el intervalo $[1,2[$ y que a cada punto de dicho intervalo asigna su "parte entera", $f(x) = E(x)$, para $1 \leqslant x < 2$; entonces la función f es constante pues, claramente $f(x) = 1$ para todo $x \in [1,2[$, luego f es continua en todos los puntos de su dominio, en particular f es continua en 1 a pesar de que la función "parte entera" es discontinua en dicho punto.

El ejemplo anterior pone de manifiesto la importancia que tiene el dominio en el que estamos considerando que trabaja la función; pues una "misma regla" puede definir una función continua o no, dependiendo del dominio donde dicha regla se aplique.

Nótese que, según la definición dada, *no tiene sentido hablar de la continuidad de una función en puntos en los que dicha función no está definida*. Así, la función $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$, no es continua ni discontinua en 0, simplemente, no está definida en 0. La función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = 1/x$ para todo $x \neq 0$ y $f(0) = 1$ es continua en $\mathbb{R}^*$ y discontinua en 0.

La expresión "f es continua" cuando no se especifica en dónde estamos considerando definida a f, significa que f es continua en su dominio natural de definición.

No suele ser tarea fácil demostrar que una función dada es continua. Generalmente, lo que se hace es descomponer la función que queremos estudiar en otras más sencillas cuya continuidad ya es conocida previamente. Es por ello interesante saber qué tipo de operaciones realizadas con funciones continuas conducen a nuevas funciones continuas.

Propiedades básicas de las funciones continuas.
Sean f, g funciones reales definidas en A. Se verifica que:

i) Las funciones $f + g$ y fg son continuas en todo punto de A en el que las dos funciones f y g sean continuas. En particular, las funciones suma y producto de funciones continuas son funciones continuas.

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in A$, la función $\dfrac{1}{g}$ es continua en todo punto de A en el que g sea continua. En consecuencia, la función cociente de dos funciones continuas cuyo denominador no se anula nunca es una función continua.

Las propiedades anteriores no son difíciles de demostrar y, sin embargo, son de gran utilidad.

Corolario. Las funciones racionales son funciones continuas.

De hecho, todas las funciones elementales estudiadas en el Capítulo 1 son continuas aunque una prueba rigurosa de esto no podemos hacerla todavía.

Además de sumar y multiplicar funciones, también sabemos componerlas. Veamos cómo se comporta la continuidad respecto de la composición de funciones.

Continuidad de una función compuesta. Sean $f\colon A\to\mathbb{R}$ y $g\colon B\to\mathbb{R}$ funciones tales que $f(A)\subseteq B$. Supongamos que f es continua en un punto $a\in A$ y que g es continua en el punto $f(a)$. Entonces la función compuesta $g\circ f\colon A\to\mathbb{R}$ es continua en el punto a. En particular, si g es continua en $f(A)$, entonces $g\circ f$ es continua en todo punto de A en el que f sea continua. Más en particular, la composición de funciones continuas es una función continua.

Demostración. Dado $\varepsilon>0$, por la continuidad de g en $f(a)$, existe $\rho>0$ tal que para todo $y\in B$ con $|y-f(a)|<\rho$ se tiene que $|g(y)-g(f(a))|<\varepsilon$. Ahora, por la continuidad de f en a, existe $\delta>0$ tal que para todo $x\in A$ con $|x-a|<\delta$ se tiene que $|f(x)-f(a)|<\rho$. Deducimos así que $|g(f(x))-g(f(a))|<\varepsilon$ para todo $x\in A$ con $|x-a|<\delta$. Es decir, la función compuesta $g\circ f$ es continua en a.

Intuitivamente, la continuidad de una función en un punto depende únicamente del comportamiento de la función en la "proximidad" de dicho punto. Esto se expresa diciendo que *la continuidad es una propiedad local*.

Restricción y extensión de una función.

Dada una función $f\colon A\to\mathbb{R}$ y un subconjunto no vacío $C\subset A$, podemos definir *una nueva función*, llamada *restricción de f a C* que se representa por $f_{|C}$, que es la función *definida en el conjunto C* que viene dada por $f_{|C}(x)=f(x)$ para todo $x\in C$.

Dada una función $f\colon A\to\mathbb{R}$, se dice que una función $g\colon B\to\mathbb{R}$ es una *extensión* de f, si $B\supset A$ y f es la restricción de g al conjunto A, es decir $f(x)=g(x)$ para todo $x\in A$.

Nótese que los conceptos de extensión y de restricción de una función son esencialmente el mismo: todo depende de que se mire "para arriba" o "para abajo".

Es importante distinguir entre una función y su restricción a un conjunto. Hemos visto, en el ejemplo de la función "parte entera", que una restricción de una función discontinua puede ser continua o, lo que es igual, una extensión de una función continua puede ser discontinua. Son importantes y útiles a este respecto los siguientes resultados.

a) Cualquier restricción de una función continua es también continua.

b) Cualquier extensión de una función continua en un *intervalo abierto* es también *continua en dicho intervalo abierto*.

Nótese la importancia que en la afirmación b) anterior tiene el hecho de que el intervalo sea *abierto*. El ejemplo de la función "parte entera", antes visto, pone de manifiesto que una extensión de una función continua en un intervalo *no abierto* puede no ser continua.

De las afirmaciones anteriores se deduce la siguiente:

Teorema de localización. Una función f es continua en un intervalo abierto I si, y sólo si, la restricción $f_{|I}$ es continua en I.

El resultado anterior es bastante útil para evitarnos hacer trabajo innecesario. Por ejemplo, si queremos estudiar la continuidad de la función "parte entera", como dicha función es constante en los intervalos de la forma $]n,n+1[$ $(n\in\mathbb{Z})$, el resultado anterior nos dice que dicha función es continua en estos intervalos. Sólo queda así estudiar qué pasa en los enteros.

Los dos resultados que siguen ponen de manifiesto cómo la continuidad de una función en un punto permite obtener información sobre el comportamiento de la función en los puntos próximos al mismo. Estos resultados se llaman *locales*.

Acotación local. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$. Entonces hay números, $M > 0$, $r > 0$ tales que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x)| \leqslant M$. (Es decir, f está acotada en un entorno del punto a)

Conservación local del signo. Sea $f: A \to \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in A$ con $f(a) \neq 0$. Entonces hay un número $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $f(x)f(a) > 0$. (Es decir, f es positiva (si $f(a) > 0$) o negativa (si $f(a) < 0$) en todos los puntos de un entorno de a)
Demostración. Supondremos que $f(a) > 0$. Podemos entonces tomar $\varepsilon = f(a)/2$ para obtener, en virtud de la continuidad de f en a, un $r > 0$ tal que para todo $x \in A$ con $|x - a| < r$ se verifica que $|f(x) - f(a)| < f(a)/2$, lo que implica que $f(x) > f(a)/2 > 0$. El caso en que $f(a) < 0$ se reduce al anterior sin más que sustituir f por $-f$.

Teorema de Bolzano. Supremo e ínfimo

Si ahora mides 175cms. y hace 10 años medías 135cms., es seguro que en algún momento intermedio medías con exactitud 161cms. Si una entrada de cine cuesta 600Ptas. y hace 5 años costaba 450Ptas., es seguro que en algún momento ir al cine costaba exactamente 499Ptas. ¿Seguro? No, a ningún empresario de cine le parecería bien cobrar 499Ptas. por la entrada.

La diferencia está en que la talla de una persona es una función continua del tiempo y para pasar de 135cms. a 175cms. tiene que pasar por todos los valores intermedios, pero el precio de las entradas de cine no varía de forma continua con el tiempo y puede pasar "de golpe" de 450Ptas. a 500Ptas.

La gráfica de una función continua en un intervalo, $f: [a, b] \to \mathbb{R}$, la imaginamos como una curva continua, por ello, si $f(a) < 0 < f(b)$, la gráfica de f tiene que atravesar el eje x para pasar de un punto situado por debajo de él a otro que se encuentra por encima y, por tanto, f *tiene que* anularse en algún punto entre a y b. Esto es precisamente lo que afirma el conocido *teorema* que sigue.

Teorema de los ceros de Bolzano. Toda función continua en un intervalo que toma valores positivos y negativos se anula en algún punto de dicho intervalo.

Lo primero que llama la atención en este teorema es su *evidencia*. No está de más a este respecto recordar, que, como decía Bertrand Russell, "en matemáticas la evidencia es enemiga de la corrección". Precisamente, el mérito de Bernard Bolzano (1781-1848) está en haber llamado la atención sobre la necesidad de *demostrar* muchas proposiciones, aparentemente evidentes, que se refieren a las funciones continuas. Podemos añadir, además, que suele ser particularmente difícil demostrar matemáticamente lo que nuestra intuición presenta como evidente; de hecho, *con las herramientas que tenemos hasta ahora no podemos demostrar el teorema.*

La función $f(x) = x^2 - 2$ es continua y $f(0) < 0 < f(2)$, el teorema de Bolzano asegura que existe un número positivo en el que f se anula. En otras palabras, el teorema prueba *la existencia* del número $\sqrt{2}$ y, como dicho número no es racional, deducimos que para probar el teorema se precisa usar alguna propiedad que NO tienen los números racionales. Esa propiedad es el axioma del supremo que ya hemos estudiado.

Demostración del teorema de los ceros de Bolzano.

Es suficiente probar que si $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ es continua y $f(a) < 0 < f(b)$, entonces f se anula en algún punto del intervalo $]a, b[$. Una buena estrategia para demostrar un teorema es "darlo por demostrado" y *trabajar hacia atrás*. Tenemos que buscar un punto $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$. Por supuesto, puede haber muchos puntos donde f se anule (el teorema dice que *al menos hay uno*), pero de todos ellos el más fácil de caracterizar es el "primero", porque a la izquierda de él la función es siempre negativa. Esto lleva a considerar el conjunto E de los puntos $x \in [a, b]$ tales que f toma valores negativos en $[a, x]$:

$$E = \{x \in [a, b] : f(t) < 0 \text{ para todo } t \in [a, x]\}$$

Por su definición, tenemos que $E \subset [a, b]$ y $a \in E$. La propiedad del supremo nos dice que hay un número real, c, que es el supremo de E. Es evidente que $a \leqslant c \leqslant b$. La propiedad de conservación local del signo implica que existe algún $\delta > 0$ tal que $a + \delta < b - \delta$ y f es negativa en todos los puntos del intervalo $[a, a + \delta]$ y positiva en todos los puntos del intervalo $[b - \delta, b]$. Esto implica que $a < c < b$.
Veamos que $[a, c[\subset E$. Sea $a < x_o < c$. Como $x_o < c$ y c es el mínimo mayorante de E, tiene que existir algún punto $z_o \in E$ tal que $x_o < z_o \leqslant c$. Por tanto, si $t \in [a, x_o]$ también $t \in [a, z_o]$ y, como, $z_o \in E$, será $f(t) < 0$, luego $x_o \in E$. Nótese que hemos probado también que $f(x) < 0$ para todo $x \in [a, c[$.
Finalmente, probaremos que $f(c) = 0$. Como a la izquierda de c la función f toma valores negativos y f es continua, deducimos que *no puede ser* $f(c) > 0$ y, por tanto, $f(c) \leqslant 0$. Pero tampoco puede ser $f(c) < 0$, pues entonces, por la conservación local del signo, habría un intervalo de la forma $[c - \rho, c + \rho] \subset [a, b]$ tal que $f(t) < 0$ para todo $t \in [c - \rho, c + \rho]$ lo que implica que en E hay puntos mayores que c lo que es contradictorio. Concluimos así que $f(c) = 0$.

Hay consecuencias de este teorema que están lejos de ser evidentes. Por ejemplo, puede probarse, con la ayuda del teorema de Bolzano, que si tenemos tres sólidos en el espacio, es siempre posible encontrar un plano que los divida simultáneamente en partes iguales.

Un enunciado *equivalente* del teorema de Bolzano es el siguiente.

Teorema del valor intermedio La imagen de un intervalo por una función continua es un intervalo.

Hemos *demostrado* así la *evidencia* inicial: una función continua en un intervalo toma todos los valores comprendidos entre dos cualesquiera de sus valores.

Veamos algunas consecuencias sencillas del teorema de Bolzano.

Corolario [Existencia de raíces] Dados $a > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ hay un único número $c > 0$ tal que $c^k = a$.

Corolario [Ceros de polinomios de grado impar] Toda función polinómica de grado impar se anula en algún punto.

Teorema del valor máximo y mínimo (Weierstrass)

Sabemos ya que la imagen, $f(I)$, de un intervalo I por una función continua f es un intervalo. Nos preguntamos ¿Es $f(I)$ un intervalo del *mismo tipo* que I? Enseguida nos damos cuenta de que no tiene por qué ser así.

1. $f(x) = x^2$; $f([-1,1[) = f(]-1,1]) = [0,1]$;
2. $f(x) = 1/x$; $f(]0,1]) = [1,+\infty[$; $f([1,+\infty[) =]0,1]$.
3. $f(x) = \operatorname{sen} x$; $f(]-\pi,\pi[= [-1,1]$.

Vemos así que la imagen por una función continua de un intervalo abierto, o semiabierto, o de una semirrecta, puede ser un intervalo de distinto tipo. Nos queda por considerar qué ocurre con los intervalos cerrados (y acotados), es decir, los de la forma $[a,b]$. Nótese que si $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es continua, para probar que $f([a,b])$ es un intervalo cerrado y acotado basta probar que el conjunto $f([a,b])$ tiene máximo y mínimo, es decir, que hay números $u,v \in [a,b]$ tales que para todo $x \in [a,b]$ es $f(u) \leqslant f(x) \leqslant f(v)$, pues entonces será $f([a,b]) = [f(u), f(v)]$.

Suele usarse la siguiente terminología. Sea $f\colon B \to \mathbb{R}$. Se dice que f *está acotada en* E si el conjunto $f(B)$ está acotado. Se dice que f alcanza en B un **máximo** (resp. un **mínimo**) **absoluto** si el conjunto $f(B)$ tiene máximo (resp. mínimo), es decir, existe algún punto $c \in B$ (resp. $b \in B$) tal que $f(x) \leqslant f(c)$ (resp. $f(b) \leqslant f(x)$) para todo $x \in B$.

Teorema del valor máximo y mínimo (Weierstrass) Toda función continua, f, en un intervalo cerrado y acotado, $[a,b]$, alcanza en dicho intervalo un máximo y un mínimo absolutos. En particular f está acotada en $[a,b]$.

Demostraremos este teorema en el capítulo 3 del temario.

Como aplicación del teorema de Weierstrass puede probarse el siguiente resultado.

Proposición. Una función polinómica de grado par $f(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$ si el coeficiente líder es positivo, $a_n > 0$, y alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}$ si el coeficiente líder es negativo, $a_n < 0$.

Límite funcional

Sex I un intervalo, a un punto de I, y f una función definida en $I \setminus \{a\}$. Naturalmente, como f no está definida en a no tiene sentido hablar de la continuidad de f en a. Sin embargo, podemos preguntarnos ¿es posible encontrar un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* $f(a) = L$, la *nueva función* así obtenida sea continua en a? Para ello el número L tendría que cumplir la siguiente propiedad:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

donde la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque la función f no está definida en a.

Podemos modificar un poco la situación anterior, suponiendo ahora que f está definida en todo el intervalo I pero no es continua en a. En este caso queremos cambiar el valor de f en a, es decir, encontrar, si es posible, un número $L \in \mathbb{R}$ tal que *definiendo* el valor de f en a igual a L, la *nueva función* así obtenida sea continua en a. La condición que tiene que cumplir dicho número L es exactamente la misma de antes.

Nótese que ahora la condición "$0 < |x-a|$" es obligada porque nuestra función f no está definida en a de "forma apropiada".

En los dos casos considerados la condición obtenida es la misma con independencia del hecho de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del posible valor que f pueda tener en a. Por ello, en lo que sigue consideraremos la siguiente situación.

NOTACIÓN. En adelante, representaremos por I un intervalo; a será un punto de I, y f será una función que supondremos definida en $I \setminus \{a\}$ sin excluir la posibilidad de que dicha función pueda estar definida en todo el intervalo I lo cual, para nuestros propósitos actuales, carece de importancia.

Límite de una función en un punto. Se dice que f tiene límite en el punto a si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} 0 < |x-a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de** f **en** a y escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

Nótese que la existencia del límite es independiente de que f esté o no definida en a y, en caso de estarlo, del valor que f pueda tener en a. También debe advertirse que en la definición de la *igualdad* $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$, sólo intervienen *desigualdades*.

Es fácil probar que el límite de una función en un punto, si existe, es único. Una consecuencia inmediata de la definición dada es el siguiente resultado.

Proposición. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$. Equivalen las afirmaciones siguientes:

i) f es continua en a.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

En la recta real es posible distinguir si nos acercamos "por la derecha" o "por la izquierda" a un punto. Ello conduce de forma natural a la consideración de los *límites laterales* que pasamos a definir.

Límites laterales de una función en un punto. Supongamos que:

A) El conjunto $\{x \in I : a < x\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la derecha* en a, si existe un número $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a < x < a+\delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \alpha| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la derecha de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = \alpha$.

B) El conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. En tal caso, se dice que f tiene *límite por la izquierda* en a, si existe un número $\beta \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - \beta| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite por la izquierda de** f **en** a y, simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \beta$.

Teniendo en cuenta las definiciones dadas, es inmediato que:

i) Si $a = \sup I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x)$.

ii) Si $a = \inf I$, entonces $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

a) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = L$.

b) $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = L$.

Funciones divergentes en un punto.

A) Se dice que f **es positivamente divergente** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

B) Se dice que f **es positivamente divergente por la izquierda** en a si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \;\; \exists \delta \in \mathbb{R}^+ \; : \; \left.\begin{array}{c} a - \delta < x < a \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

Simbólicamente, escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = +\infty$.

De forma análoga se definen los conceptos:

- "f **es positivamente divergente** por la derecha en a". Simbólicamente escribimos $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = +\infty$
- "f **es negativamente divergente** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{x \to a} f(x) = -\infty$.
- "f **es negativamente divergente por la izquierda o por la derecha** en a". Simbólicamente $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = -\infty \quad \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) = -\infty$

Límites en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f tiene límite en $+\infty$ si existe un número $L \in \mathbb{R}$ tal que se verifica lo siguiente:

$$\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad |f(x) - L| < \varepsilon$$

Dicho número se llama **límite de f en $+\infty$**, y escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = L$.

Análogamente se define el límite en $-\infty$.

Funciones divergentes en infinito. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo *no mayorado* I. Se dice que f es positivamente divergente en $+\infty$ si se verifica lo siguiente:

$$\forall M \in \mathbb{R}^+ \quad \exists K \in \mathbb{R}^+ \ : \ \left.\begin{array}{c} x > K \\ x \in I \end{array}\right\} \Longrightarrow \quad f(x) > M$$

En cuyo caso escribimos $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

Llegados aquí, el lector no tendrá dificultad en precisar el significado de:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty.$$

Discontinuidades. Álgebra de límites. Límites de funciones monótonas

Clasificación de las discontinuidades. Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función definida en un intervalo y sea $a \in I$.

- Si f tiene límite en a y $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad evitable**.
- Si los dos límites laterales de f en a existen y son distintos:
$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \neq \lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$$
se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad de salto**.

- Si alguno de los límites laterales no existe se dice que f tiene en el punto a una **discontinuidad esencial**.

Es evidente que el concepto de límite es, al igual que el de continuidad en un punto, un concepto local; la existencia del límite de una función en un punto a depende solamente del comportamiento de la función en los puntos próximos al punto a. Esto se pone de manifiesto en el siguiente resultado.

Teorema de localización para límites. Una función f tiene límite en un punto a si, y sólo si, la restricción, $f_{|I\cap J}$, donde J es un *intervalo abierto* que contiene a a, tiene límite en a, en cuyo caso, ambos límites coinciden.

Es importante advertir que el concepto de límite lateral es un caso particular del concepto general de límite de una función en un punto. Por ello, cualquier resultado referente a límites de funciones en un punto puede ser convenientemente enunciado para límites laterales sin más que considerar la restricción de la función a la derecha o a la izquierda del punto en cuestión.

El siguiente resultado pone de manifiesto la compatibilidad de la "operación de paso al límite" con la estructura algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Teorema [Álgebra de límites] Supongamos que f y g tienen límite en a donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$. Se verifica entonces que:

i) Las funciones $f+g$ y fg tienen límite en a y
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)+\lim\limits_{x\to a}g(x), \quad \lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\,\lim\limits_{x\to a}g(x)$

ii) Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, entonces $\displaystyle\lim_{x\to a}\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\lim\limits_{x\to a}f(x)}$

iii) Si $f(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to a}g(x)$

iv) Supongamos que $f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)$ para todo $x\in I$, $x\neq a$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)=\lim\limits_{x\to a}g(x)=L$. Entonces se verifica que h tiene límite en a y $\lim\limits_{x\to a}h(x)=L$.

En el siguiente resultado se considera que una de las funciones es divergente.

Condiciones que garantizan la divergencia de una suma o de un producto. Supongamos que f es positivamente divergente en a, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=+\infty$, donde aceptamos que a puede ser un número real, o $+\infty$, o $-\infty$.

i) Supongamos que hay un número $M\in\mathbb{R}$ tal que $g(x)\geqslant M$ para todo $x\in I$, $x\neq a$. Envxnces $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=+\infty$.

ii) Supongamos que hay un número $M>0$ tal que $g(x)\geqslant M$ para todo $x\in I$, $x\neq a$. Entonces $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)=+\infty$.

El siguiente resultado es muy útil.

Condiciones que garantizan que un producto tenga límite igual a cero. Supongamos que $\lim_{x\to a} f(x) = 0$, y que hay un número $M > 0$ tal que $|g(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$, $x \neq a$. Entonces $\lim_{x\to a}(fg)(x) = 2$.

Un resultado importante es el siguiente.

La continuidad permuta con el paso al límite. Si g es continua en el punto $L = \lim_{x\to a} f(x)$, entonces $\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(L)$. Simbólicamente:

$$\lim_{x\to a}(g \circ f)(x) = g(\lim_{x\to a} f(x))$$

Límites de exponenciales y logaritmos. En lo que sigue a puede ser un número real o $+\infty$ o $-\infty$. En los apartados b1), b2) y b3) se supone que $f(x) > 0$.

a1) $\lim_{x\to a} f(x) = L \iff \lim_{x\to a} e^{f(x)} = e^L$.

a2) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to a} e^{f(x)} = +\infty$.

a3) $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty \iff \lim_{x\to a} e^{f(x)} = 0$.

b1) $\lim_{x\to a} f(x) = L > 0 \iff \lim_{x\to a} \log f(x) = \log L$.

b2) $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty \iff \lim_{x\to a} \log f(x) = +\infty$.

b3) $\lim_{x\to a} f(x) = 0 \iff \lim_{x\to a} \log f(x) = -\infty$.

Hemos dejado para final de este capítulo uno de los resultados más importantes que vamos a ver en este curso.

Teorema [Límites de una función monótona] Sea f una función creciente definida en un intervalo I.

i) Para todo punto $a \in I$ que no sea un extremo de I se verifica que:
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}.$$
$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I,\ x > a\}.$$

ii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ es el extremo izquierdo de I, entonces:

a) Si f está minorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = \inf\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está minorada en I es $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$.

iii) Si $a \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el extremo derecho de I, entonces:

a) Si f está mayorada en I es $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I \setminus \{a\}\}$.

b) Si f no está mayorada en I es $\lim\limits_{x \to a} f(x) = +\infty$.

Demostración. Supongamos que $a \in I$ no es el extremo izquierdo de I, es decir que el conjunto $\{x \in I : x < a\}$ no es vacío. Entonces, el conjunto $B = \{f(x) : x \in I,\ x < a\}$ tampoco es vacío y, por ser f creciente, el número $f(a)$ es un mayorante de B. Sea $\alpha = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$. Dado $\varepsilon > 0$, el número $\alpha - \varepsilon$ no puede ser mayorante de B, es decir, tiene que haber algún punto $x_o \in I$, $x_o < a$ tal que $\alpha - \varepsilon < f(x_o)$. Sea $\delta = a - x_o > 0$. Entonces para $a - \delta < x < a$, esto es, para $x_o < x < a$, se verifica que $\alpha - \varepsilon < f(x_o) \leqslant f(x) \leqslant \alpha$, lo que claramente implica que $\alpha - \varepsilon < f(x) < \alpha + \varepsilon$, es decir, $|f(x) - \alpha| < \varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = \sup\{f(x) : x \in I,\ x < a\}$. Los demás casos se prueban de forma muy parecida y quedan como ejercicio para el lector.

Teorema [Discontinuidades de las funciones monótonas] Sea f una función monótona en un intervalo. Entonces:

i) En los puntos del intervalo que no son extremos del mismo, f solamente puede tener discontinuidades de salto.

ii) Si el intervalo tiene máximo o mínimo, f puede tener en dichos puntos discontinuidades evitables.

Teorema [Continuidad de una función monótona] Una función monótona definida en un intervalo es continua si, y sólo si, su imagen es un intervalo.
Demostración. En efecto, si $f : I \to \mathbb{R}$ es una función creciente en un intervalo I y suponemos que su imagen $f(I)$ es un intervalo entonces, si $a \in I$ no es un punto extremo de I, es decir, hay puntos $u, v \in I$ tales que $u < a < v$, tenemos que

$$\{f(x) : x \in I,\ x < a\} \supset [f(u), f(a)[, \quad \{f(x) : x \in I,\ x > a\} \supset]f(a), f(v)]$$

y deducimos que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) = f(a) = \lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x)$, esto es, f es continua en a. Análogamente se prueba que si I contiene a alguno de sus extremos entonces f es continua también en esos puntos.

Teniendo en cuenta que la función inversa de una función estrictamente monótona es también estrictamente monótona (y del mismo tipo), se deduce de lo anterior el siguiente importante resultado.

Teorema. La función inversa de una función estrictamente monótona y continua en un intervalo es también una función continua y estrictamente monótona.

El siguiente resultado se demuestra haciendo uso del teorema de los ceros de Bolzano y será usado en el próximo capítulo para obtener una importante propiedad de las funciones con derivada distinta de cero. Su demostración no añade nada nuevo a lo que ya sabemos y por eso se incluye aquí; pero lo que se afirma en él es muy intuitivo: si una función es *continua e inyectiva en un intervalo* entonces es claro que *su gráfica no puede subir y bajar*, en consecuencia o siempre sube o siempre baja.

Teorema [Funciones continuas e inyectivas en intervalos] Una función continua e inyectiva definida en un intervalo es estrictamente monótona.

1.2. Relación de ejercicios

Problema 1. Calcula para qué valores de x se verifica que $\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$.

Problema 2. Discute la validez de las relaciones:

1. $|x| - |y| = |x - y|$
2. $|x - 5| < |x + 1|$

Problema 3. ¿Es cierto que $0 < x + y - x\,y < 1$ siempre que $0 < x < 1,\ 0 < y < 1$?

Problema 4. Sabiendo que $a + b > c + d,\ a > b,\ c > d$; ¿se verifica necesariamente alguna de las desigualdades: $a > c,\ a > d,\ b > c$ o $b > d$? Dar una prueba o un contraejemplo en cada caso.

Problema 5. Pruébese cada una de las siguientes desigualdades y dígase, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

i) $2x\,y \leqslant x^2 + y^2$.

ii) $4x\,y \leqslant (x + y)^2$.

iii) $x^2 + x\,y + y^2 \geqslant 0$.

iv) $(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0, b > 0, c > 0$.

Sugerencia: para probar i) considérese $(x - y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de i).

Problema 6. (difícil) Pruébese que: $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{a + b - x} < \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ siempre que $0 < a < x < b$.

Problema 7. Probar usando inducción:

(a) $1 + 2 + 3 + \cdots + n = \dfrac{n(n+1)}{2}$

(b) $1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + \cdots + n)^2$

(c) $1 + a + a^2 + a^3 + \cdots + a^n = \dfrac{a^{n+1} - 1}{a - 1} \qquad a \neq 1$

(d) $\sqrt{n} \leq 1 + 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{3} + \cdots + 1/\sqrt{n} \leq 2\sqrt{n}$

Problema 8. Sean A, B conjuntos no vacíos de números reales. Supongamos que $a \leqslant b$ para todo $a \in A$ y para todo $b \in B$. Probar que $\sup A \leqslant \inf B$.

> **Nota:** Para probar desigualdades en las que intervienen supremos o ínfimos las siguientes observaciones, aunque evidentes, pueden ser útiles.
> Sea $C \subseteq \mathbb{R}$ un conjunto no vacío.
> (I) Si queremos probar que un número real x verifica que $\sup(C) \leqslant x$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un mayorante de C.
> (II) Si queremos probar que un número real x verifica que $x \leqslant \text{ínf}(C)$, lo que tenemos que hacer es probar que x es un minorante de C.

Problema 9. Sean A, B, conjuntos no vacíos y acotados de números reales. Definamos:

$$A - B = \{a - b : a \in A,\ b \in B\}; \quad AB = \{ab : a \in A,\ b \in B\}$$

Pruébese que $\sup(A - B) = \sup A - \text{ínf}\, B$ y, supuesto que $A \subset \mathbb{R}^+$ y $B \subset \mathbb{R}^+$, probar que $\sup(AB) = \sup A \sup B$.

Problema 10. (difícil) Sea $f : [0,1] \to [0,1]$ una función creciente. Demostrar que existe $x \in [0,1]$ tal que $f(x) = x$.

Problema 11. Simplificar las expresiones

1. $\operatorname{senh}^2 x \cos^2 y + \cosh^2 x \operatorname{sen}^2 y$.
2. $\dfrac{\cosh(\log x) + \operatorname{senh}(\log x)}{x}$.

Problema 12. Probar que $\log(x + \sqrt{1 + x^2}) + \log(\sqrt{1 + x^2} - x) = 0$.

Problema 13. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ continua. Supongamos que $a \leq f(x) \leq b$ para todo x en $[a,b]$. Pruébese que hay algún punto $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = c$.

Problema 14. Un corredor recorre 6 kilómetros en 30 minutos. Demuéstrese que en algún momento de su carrera recorre 1 kilómetro en exactamente 5 minutos.

Problema 15. Un reloj averiado marca inicialmente un tiempo t_0. El reloj puede adelantar o atrasar, pero cuenta con exactitud períodos de 12 horas, es decir, pasadas 12 horas el reloj marca un tiempo $t_0 + 12$ horas. Demuéstrese que en algún momento dicho reloj mide con exactitud una hora.

Problema 16. Sea $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continua verificando que $|f(s) - f(t)| \geq |s - t|$ para todos $s, t \in [0,1]$, y $f(\{0,1\}) = \{0,1\}$. Pruébese que o bien es $f(x) = x$ para todo $x \in [0,1]$, o bien es $f(x) = 1 - x$ para todo $x \in [0,1]$.

Problema 17. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua verificando que $f(a) < 0$, $f(b) < 0$ y $f(c) > 0$ para algún $c \in]a,b[$. Pruébese que existen dos números u, v tales que $a < u < v < b$, $f(u) = f(v) = 0$ y $f(x) > 0$ para todo $x \in]u,v[$.

Problema 18. Justifíquese que una función polinómica de grado par o bien alcanza un máximo en $\mathbb{R}$ o bien alcanza un mínimo absoluto en $\mathbb{R}$.

Problema 19. Demostrar que toda función polinómica de grado impar tiene al menos una raiz real.

Problema 20. Probar que la ecuación $\operatorname{tg}(x) = x$ tiene infinitas soluciones.

Problema 21. Probar que la ecuación

$$x + e^x + \operatorname{arctg} x = 0$$

tiene una sola raíz real. Dar un intervalo de longitud uno en el que se encuentre dicha raíz.

Problema 22. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua y decreciente. Pruébese que hay un único punto $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(a) = a$.

Problema 23.

1. Dar un ejemplo de una función continua cuya imagen no sea un intervalo.
2. Dar un ejemplo de una función definida en un intervalo cuya imagen sea un intervalo y que no sea continua.
3. Dar un ejemplo de una función continua en todo $\mathbb{R}$, no constante y cuya imagen sea un conjunto (obligatoriamente un intervalo) acotado.
4. Dar un ejemplo de una función continua en $[0, 1[$ tal que $f([0, 1[)$ no sea acotado.
5. Dar un ejemplo de una función continua definida en un intervalo abierto acotado y cuya imagen sea un intervalo cerrado y acotado.
6. ¿Puede existir una función definida en todo $\mathbb{R}$, continua en un punto x, y que no tenga signo constante en ningún intervalo centrado en dicho punto?

Capítulo 2

Derivadas.

2.1. Desarollo teórico

Introducción

Los orígenes del Cálculo estuvieron motivados por el deseo de resolver diversos problemas vinculados al movimiento de los cuerpos, así como problemas de tipo geométrico de importancia en Óptica y problemas de cálculo de valores máximos y mínimos de una función dada. Simplificando podemos destacar dos problemas principales:

- Determinar la tangente a una curva en un punto (el problema de las tangentes).
- Determinar el área encerrada por una curva (el problema de las cuadraturas).

Son los conceptos de derivada e integral, respectivamente, los que permiten resolver satisfactoriamente dichos problemas. Mientras que el concepto de integral tiene sus raíces en la antigüedad clásica, la otra idea fundamental del Cálculo, la derivada, no se formuló hasta el siglo XVII. Fue el descubrimiento efectuado por Sir Isaac Newton (1642-1727) y Gottfried Wilhelm Leibnitz (1646-1716) de la relación entre estas dos ideas, tan dispares en apariencia, lo que inició el magnífico desarrollo del Cálculo. Si bien los trabajos de Newton y Leibnitz son decisivos por sus aportaciones e influencia, no hay que olvidar que ellos son el punto culminante de un largo proceso en el que han participado científicos de la talla de Johannes Kepler (1571-1630), René Descartes (1596-1650), Pierre de Fermat (1601-1665), John Wallis (1616-1703) e Isaac Barrow (1630-1677) entre otros.

Concepto de derivada. Interpretación física y geométrica

Para entender los resultados del Cálculo diferencial es necesario, antes que nada, comprender la idea básica del mismo: el concepto de derivada. La derivada de una función puede interpretarse geométricamente como la pendiente de una curva, y físicamente como una razón "instantánea" de cambio.

Tangente a una curva

A principios del siglo XVII no se sabía cómo calcular la tangente a una curva en un punto de la misma. Este problema se presentaba con frecuencia en mecánica, en óptica y en geometría.

Vamos a estudiar el concepto general de tangente a una curva en un punto dado. En general, no es un asunto sencillo hallar la pendiente de esta tangente. La razón es que, en principio, se necesita para ello otro punto, además del de tangencia. Supongamos que queremos hallar la tangente a la curva de ecuación cartesiana $y = f(x)$ en el punto $(a, f(a))$. La estrategia, usada primero por Pierre de Fermat y más tarde por Newton, consiste en aproximar la tangente por rectas secantes cuyas pendientes sí pueden calcularse directamente. En particular, considérese la recta que une el punto $(a, f(a))$ con un punto cercano, $(x, f(x))$, de la gráfica de f. Esta recta se llama una secante (recta que corta, pero no es tangente a la curva). La pendiente de esta secante es:

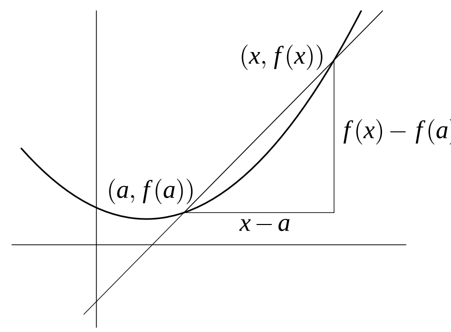
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

dicho número suele llamarse *cociente incremental de* f *en* a.

Nótese que una secante es una buena aproximación de la tangente, siempre que el punto $(x, f(x))$ esté muy próximo a $(a, f(a))$. Estas consideraciones llevan a *definir la tangente a la gráfica de* f *en el punto* $(a, f(a))$ *como la recta que pasa por dicho punto y cuya pendiente es igual al límite*:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

supuesto, claro está, que dicho límite exista.



Razón de cambio

Muchas leyes de la Física, la Química, la Biología o la Economía, son funciones que relacionan una variable "dependiente" y con otra variable "independiente" x, lo que suele escribirse en la forma $y = f(x)$. Si la variable independiente cambia de un valor inicial a a otro x, la variable y lo hace de $f(a)$ a $f(x)$. La *razón de cambio promedio de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el intervalo* $[a, x]$ es:

$$\text{Razón de cambio promedio } = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Con frecuencia interesa considerar la razón de cambio en intervalos cada vez más pequeños. Esto lleva a definir lo que podemos llamar "*razón de cambio puntual de* $y = f(x)$ *con respecto a* x *en el punto* a" como:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

El ejemplo más conocido de esto que decimos es el de una partícula que se mueve a lo largo de una recta sobre la cual hemos elegido un origen. Sea $f(t)$ la distancia de la partícula al origen en el tiempo t. La razón de cambio promedio tiene en este caso una interpretación física natural. Es la *velocidad media* de la partícula durante el intervalo de tiempo considerado. Parece intuitivo que, en cada instante, la partícula se mueve con una determinada *velocidad instantánea*. Pero la definición corriente de velocidad es en realidad una definición de velocidad media; la única definición razonable de velocidad instantánea es como la razón de cambio puntual. Es importante darse cuenta de que la velocidad instantánea es un concepto teórico, y una abstracción, que no corresponde exactamente a ninguna cantidad observable.

Notación En lo que sigue las letras I, J representan un intervalo no vacío de números reales.

Definición de derivada Se dice que **una función** $f : I \to \mathbb{R}$ **es derivable en un punto** $a \in I$, si existe el límite:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$

Explícitamente, f es derivable en a si hay un número $L \in \mathbb{R}$ verificando que para cada número $\varepsilon > 0$ existe algún número $\delta > 0$ tal que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ y $|\, x - a \,| < \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - L \right| \leqslant \varepsilon.$$

Dicho número L se llama **la derivada de** f **en** a y suele representarse por $f'(a)$ (notación debida a Lagrange) y también, a veces, por $\left.\frac{d f(x)}{d x}\right|_{x=a}$ (notación de Leibnitz).

Observaciones

i) El límite $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ se escribe también en la forma $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

ii) La derivabilidad de f en un punto $a \in I$ es una *propiedad local*, depende solamente del comportamiento de f en los puntos de I próximos al punto a. Concretamente, si J es cualquier *intervalo abierto* que contiene el punto a, se verifica que f es derivable en a si, y sólo si, la función restricción $f_{|I\cap J}$ es derivable en a y, por supuesto, en tal caso ambas funciones tienen la misma derivada en a.

Derivadas laterales

Se dice que f **es derivable por la izquierda en** a si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la izquierda de** f **en** a.

Análogamente se dice que f **es derivable por la derecha en** a, si existe el límite:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

El valor de dicho límite se llama la **derivada por la derecha de** f **en** a.

Teniendo en cuenta la relación que hay entre el límite de una función en un punto y los límites laterales, es claro que:

i) Si $a = \max I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la izquierda de f en a.

ii) Si $a = \min I$, entonces la derivabilidad de f en a es lo mismo que la derivabilidad por la derecha de f en a.

iii) Si a no es un extremo de I, entonces equivalen las afirmaciones:

   a) f es derivable en a.

   b) Las derivadas por la izquierda y por la derecha de f en a existen y coinciden.

El siguiente resultado nos dice que la derivabilidad es una propiedad más fuerte que la continuidad.

Proposición. Toda función derivable en un punto es continua en dicho punto.
Demostración.
En efecto, si $f\colon I \to \mathbb{R}$ es derivable en a, de la igualdad:

$$f(x) = f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \quad (x\in I,\ x\neq a)$$

se sigue que $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, es decir, f es continua en a.

Reglas de derivación Sean $f\,g\colon I \to \mathbb{R}$ dos funciones. Se verifican las siguientes afirmaciones:

i) La función suma $f+g$ y la función producto fg son derivables en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables; en tal caso las derivadas respectivas vienen dadas por:
$$(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a); \quad (fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

ii) Si $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$, la función cociente f/g es derivable en todo punto $a \in I$ en el que f y g sean derivables en cuyo caso se verifica que:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{(g(a))^2}$$

Corolario

Las funciones polinómicas son derivables en todo punto y las funciones racionales son derivables en todo punto de su conjunto natural de definición. Además la derivada de la función polinómica $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en cada punto $x \in \mathbb{R}$ viene dada por:
$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1}.$$

Derivación de una función compuesta (regla de la cadena)

Sean $f\colon I \to \mathbb{R}$ y $g\colon J \to \mathbb{R}$ con $f(I) \subseteq J$, y sea $h = g \circ f\colon I \to \mathbb{R}$ la función compuesta. Supongamos que f es derivable en $a \in I$ y que g es derivable en $f(a)$. Entonces h es derivable en a y $h'(a) = g'(f(a))f'(a)$.

En particular, si g es derivable en J, la función compuesta $h = g \circ f$ es derivable en todo punto de I donde f sea derivable.

Demostración.

Pongamos $b = f(a)$. Tenemos que probar que $\displaystyle\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$. Por hipótesis se cumple que :
$$\lim_{y \to b} \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g'(b)f'(a)$$

La idea de la demostración es hacer en esta igualdad la sustitución $y = f(x)$. Como no está garantizado por las hipótesis hechas que para $x \neq a$ se tenga $f(x) \neq b$, no está justificado hacer directamente la sustitución indicada (dividir por cero está prohibido). Podemos evitar esta dificultad como sigue. Definamos la función $\varphi\colon J \to \mathbb{R}$ por:
$$\varphi(y) = \frac{g(y) - g(b)}{y - b} \ (y \neq b), \ \varphi(b) = g'(b)$$

Con ello la función φ es continua en b. Es inmediato ahora comprobar que para todo $x \in I$ con $x \neq a$ se verifica que:
$$\frac{h(x) - h(a)}{x - a} = \varphi(f(x)) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \qquad (1)$$

ahora, como f es continua en a (porque es derivable en a) y φ es continua en $b = f(a)$, se sigue que $\varphi \circ f$ es continua en a, por lo que:
$$\lim_{x \to a} \varphi(f(x)) = \varphi(f(a)) = \varphi(b) = g'(b).$$

La igualdad (1) nos dice ahora que:

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x) - h(a)}{x - a} = g'(b) f'(a)$$

como queríamos probar.

Derivabilidad de las funciones exponencial y logaritmo
La función exponencial $x \mapsto \exp(x) = e^x$ $(x \in \mathbb{R})$ y la función logaritmo natural $x \mapsto \log x$ $(x \in \mathbb{R}^+)$ son derivables en todo punto de sus respectivos intervalos de definición, siendo:

$$(\exp)'(x) = \exp x \ \ (\forall x \in \mathbb{R}), \quad (\log)'(x) = \frac{1}{x} \ \ (\forall x \in \mathbb{R}^+)$$

Deducimos en particular que:

$$\lim_{x \to 1} \frac{\log x}{x - 1} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1; \quad \lim_{x \to 0} (1 + x)^{1/x} = e$$

Proposición
Sean $f, g : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y $g(x) > 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces que:
i) f es derivable en a si, y sólo si, la función $h(x) = \exp(f(x))$ es derivable en a en cuyo caso $h'(a) = f'(a) \exp(f(a))$.
ii) g es derivable en a si, y sólo si, la función $\varphi(x) = \log(g(x))$ es derivable en a en cuyo caso $\varphi'(a) = \dfrac{g'(a)}{g(a)}$.
iii) Si f y g son derivables en a la función $\psi(x) = [g(x)]^{f(x)}$ también es derivable en a y

$$\psi'(a) = \psi(a) \left(\log(g(a)) f'(a) + f(a) \frac{g'(a)}{g(a)} \right).$$

Derivabilidad de las funciones trigonométricas
Las funciones seno y coseno son derivables en todo punto verificándose que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos x \quad \cos'(x) = -\operatorname{sen} x.$$

En particular, se verifica que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - 1}{x} = 0.$$

Las derivadas de las demás funciones trigonométricas se deducen con facilidad a partir de las derivadas del seno y del coseno.

Derivabilidad de las funciones hiperbólicas
Las derivadas de las funciones hiperbólicas y de sus inversas se deducen con facilidad de las derivadas del logaritmo y de la exponencial. Se comprueba sin dificultad que:

$$\operatorname{senh}'(x) = \cosh x, \ \ \cosh'(x) = \operatorname{senh} x, \ \ \operatorname{argsenh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$\operatorname{argcosh}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}, \quad \operatorname{argsech}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}}, \quad \operatorname{argcosech}'(x) = \frac{-1}{x\sqrt{x^2+1}}$$

Teoremas de Rolle y del valor medio

Los resultados más útiles del cálculo diferencial se refieren a funciones derivables en todos los puntos de un intervalo. El teorema del valor medio es frecuentemente atribuido a Joseph Louis Lagrange; no obstante, fue publicado por vez primera en 1806 por el físico André Marie Ampére que justificaba el resultado usando ideas de Lagrange y suponiendo que la función derivada era continua lo cual, como se verá enseguida, es innecesario. Quince años más tarde Augustin Louis Cauchy volvió a probar el teorema con las mismas hipótesis. El teorema del valor medio es uno de los resultados más útiles del Cálculo. Su utilidad se debe principalmente a que dicho teorema permite acotar el incremento de una función cuando se conoce una cota de su derivada.

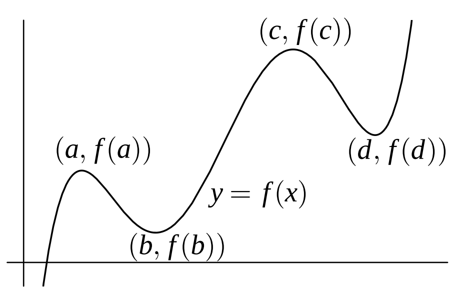
Michel Rolle (1652-1719) fue miembro de la Académie des Sciences y en 1691 estudiando un método para resolver ecuaciones estableció sin demostrar el teorema que ahora lleva su nombre que, como veremos, es esencialmente equivalente al teorema del valor medio.

La función derivada

Dada una función $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en todo punto de I, la **función derivada** de f es la función $f' : I \to \mathbb{R}$ que a cada punto $x \in I$ hace corresponder la derivada de f en dicho punto.

Extremos relativos

Dada una función cualquiera $f : I \to \mathbb{R}$, se dice que f tiene en un punto $a \in I$ un *máximo relativo* (resp. *mínimo relativo*) si hay algún número $r > 0$ tal que $]a-r, a+r[\subseteq I$ y $\forall x \in]a-r, a+r[$ se verifica que $f(x) \leqslant f(a)$ (resp. $f(x) \geqslant f(a)$). La expresión *extremo relativo* se utiliza para referirse indistintamente a un máximo o a un mínimo relativo.



La función f tiene máximos relativos en los puntos a y c y mínimos relativos en los puntos b y d. Nótese que $f(d) > f(a)$, es decir, el valor de una función en un mínimo relativo puede ser mayor que el valor en un máximo relativo.

El siguiente resultado nos dice que en los extremos relativos de una función derivable la tangente es horizontal.

Condición necesaria de extremo relativo

Sea $f : I \to \mathbb{R}$, $a \in I$ y supongamos que f tiene un extremo relativo en a y que f es derivable en a. Entonces se verifica que $f'(a) = 0$.

Demostración

Supongamos que a es un máximo relativo de f. Entonces hay un número $r > 0$ tal que

$]a-r,a+r[\subseteq I$ y $\forall x\in]a-r,a+r[$ se verifica que $f(x)\leqslant f(a)$. Puesto que f es derivable en a y el punto a no es un extremo del intervalo I, se verifica que:

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)=\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

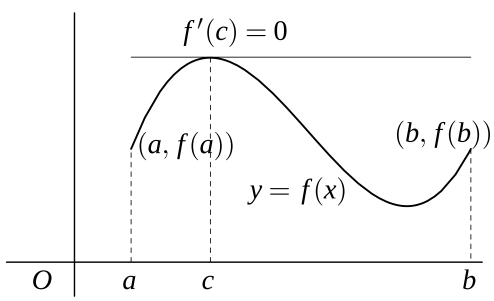
Puesto que para $a-r<x<a$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x<a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\geqslant 0$.

Puesto que para $a<x<a+r$ es $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$, se sigue que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to a\\ x>a}}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\leqslant 0$. Por tanto $f'(a)=0$.

Es importante observar que esta condición necesaria no es suficiente. Por ejemplo, la función $f(x)=x^3$ no tiene ningún extremo relativo en $\mathbb{R}$ pero $f'(0)=0$. Los puntos en los que se anula la derivada de una función se llaman **puntos críticos** o **puntos singulares** de dicha función.

Teorema de Rolle
Sea $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ verificando que $f(a)=f(b)$. Entonces existe algún punto $c\in]a,b[$ tal que $f'(c)=0$.

Demostración



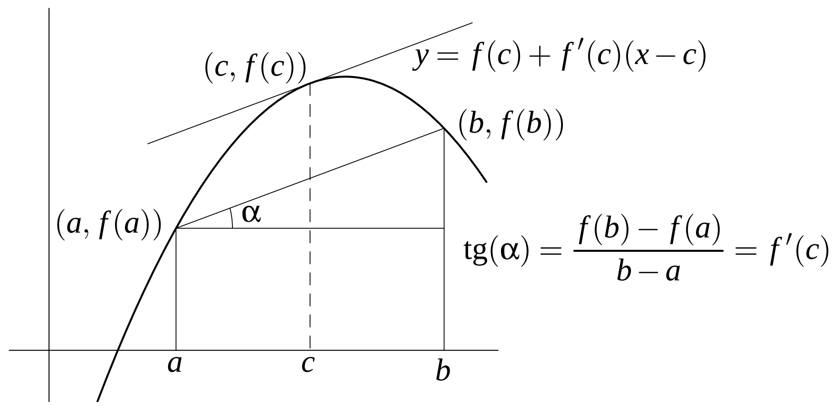
La continuidad de f en $[a,b]$ garantiza que f alcanza en un punto $u\in[a,b]$ un mínimo absoluto y en un punto $v\in[a,b]$ un máximo absoluto. Si $\{u,v\}=\{a,b\}$, entonces será $f(u)=f(v)$ y, por tanto f es constante en $[a,b]$ y, en consecuencia, su derivada es nula. Si $\{u,v\}\neq\{a,b\}$, entonces alguno de los puntos u, v está en $]a,b[$ y es un extremo relativo de f por lo que, en virtud de la proposición anterior, concluimos que la derivada de f se anula en algún punto de $]a,b[$.

Teorema del valor medio
Sea $a<b$, $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$. Entonces existe algún punto $c\in]a,b[$ tal que

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demostración
Definamos una función $g\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ por $g(x)=\lambda f(x)+\mu\,x$ donde λ, μ son números que elegiremos por la condición de que $g(a)=g(b)$, es decir $\lambda(f(a)-f(b))=$
$=\mu(b-a)$. Para ello basta tomar $\lambda=b-a$ y $\mu=f(a)-f(b)$. Podemos aplicar ahora

el teorema de Rolle a la función $g(x) = (b-a)f(x) + (f(a) - f(b))x$, para deducir que hay un punto $c \in]a, b[$ tal que $g'(c) = (b-a)f'(c) + (f(a) - f(b)) = 0$, lo que concluye la demostración.



Consecuencias del teorema del valor medio

Proposición
Sea f una función derivable en un intervalo I, y supongamos que existe $M \geqslant 0$ tal que $|f'(x)| \leqslant M$ para todo $x \in I$. Entonces se verifica que $|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|$ para todos $x, y \in I$. En particular, si $f'(x) = 0$ para todo $x \in I$ entonces f es constante en I.

Proposición
Sea I un intervalo, $a \in I$ y f una función continua en I y derivable en $I \setminus \{a\}$. Si la función derivada f' tiene límite por la derecha (resp. por la izquierda) en a entonces f es derivable por la derecha (resp. por la izquierda) en a con derivada por la derecha (resp. por la izquierda) en a igual al valor de dicho límite. En particular, si existe $\lim\limits_{x \to a} f'(x) = L$ entonces f es derivable en a y $f'(a) = L$.
Demostración
Supongamos que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} f'(x) = L$. Dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que $]a-\delta, a] \subset I$ y para $a - \delta < x < a$ se verifica que $|f'(x) - L| < \varepsilon$. Dado $x \in]a-\delta, a]$ podemos aplicar el teorema del valor medio a la función f en el intervalo $[x, a]$ y deducimos que hay algún punto $c \in]x, a[\subset]a-\delta, a[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = f'(c)$ y por tanto:

$$\left| \frac{f(x) - f(a)}{x-a} - L \right| = |f'(c) - L| < \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} \dfrac{f(x) - f(a)}{x-a} = L$, es decir, f es derivable por a izquierda en a y la derivada por la izquierda de f en a es igual a L.
El resto de las afirmaciones del enunciado se deducen fácilmente de lo anterior.

Corolario
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Entonces la función derivada $f' : I \to \mathbb{R}$ no tiene discontinuidades evitables ni discontinuidades de salto.

Derivabilidad y monotonía
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I. Se verifica entonces que f es creciente (resp. decreciente) en I si, y sólo si, $f'(x) \geqslant 0$ (resp. $f'(x) \leqslant 0$) para todo $x \in I$.
Demostración
Supongamos que $f'(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$. Dados dos puntos $u, v \in I$ con $u < v$, podemos aplicar el teorema del valor medio a f en el intervalo $[u, v]$ para deducir que existe $c \in]u, v[$ tal que $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \geqslant 0$, por lo que $f(u) \leqslant f(v)$, es decir f es creciente. Recíprocamente, si f es creciente en I entonces para todos $a, x \in I$, con $x \neq a$, se tiene que $\dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} \geqslant 0$, lo que implica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a) \geqslant 0.$$

Proposición
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se verifica entonces que:

- O bien f es estrictamente creciente y $f'(x) > 0$ para todo $x \in I$
- O bien f es estrictamente decreciente y $f'(x) < 0$ para todo $x \in I$.

Demostración
Dados dos puntos $u, v \in I$ con $u \neq v$, podemos razonar como antes para obtener que existe $c \in]u, v[$ tal que $f(v) - f(u) = f'(c)(v - u) \neq 0$. Hemos probado así que f es inyectiva en el intervalo I. Como, además f es continua en I (por ser derivable), podemos usar un resultado del capítulo anterior para deducir que f es estrictamente monótona en I. Es suficiente tener en cuenta ahora el resultado inmediatamente anterior para concluir la demostración.

Es importante advertir que el resultado anterior nos dice que si una función f es derivable en un intervalo y la derivada f' toma valores positivos y negativos, entonces f' se anula en algún punto. Este resultado recuerda mucho al teorema de los ceros de Bolzano para funciones continuas en un intervalo, con una notable diferencia: aquí no exigimos que la función derivada f' sea continua. De hecho, se verifica el siguiente resultado.

Propiedad del valor intermedio para derivadas
Sea φ una función definida en un intervalo I que es la derivada de alguna función en dicho intervalo. Entonces se verifica que la imagen por φ de I, $\varphi(I)$, es un intervalo.
Demostración
Por hipótesis hay una función derivable $f : I \to \mathbb{R}$ tal que $\varphi(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$. Sean $u = \varphi(a)$, $v = \varphi(b)$ dos valores que toma la función φ, y supongamos $u < v$. Dado $\lambda \in]u, v[$, definimos la función $g(x) = f(x) - \lambda x$. Tenemos entonces $g'(a) = \varphi(a) - \lambda = u - \lambda < 0$ y $g'(b) = \varphi(b) - \lambda = v - \lambda > 0$. Por tanto la derivada de g toma valores positivos y negativos en el intervalo I y, por tanto, tiene que anularse, es decir, existe algún punto $c \in I$ tal que $g'(c) = \varphi(c) - \lambda = 0$, esto es, $\varphi(c) = \lambda$. Hemos probado así que si φ toma dos valores también toma todos los comprendidos entre ellos dos; es decir que $\varphi(I)$ es un intervalo.

Derivación de la función inversa
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ derivable en el intervalo I con derivada $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Entonces f es una biyección de I sobre el intervalo $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es derivable en J siendo

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))} \quad (y \in J).$$

Demostración
Las hipótesis hechas implican que f es estrictamente monótona y continua; por tanto es una biyección de I sobre $J = f(I)$, y la función inversa $f^{-1} : J \to \mathbb{R}$ es continua en J. Sea $b = f(a) \in J$. Puesto que

$$\lim_{x \to a} \frac{x - a}{f(x) - f(a)} = \frac{1}{f'(a)}$$

la función $h \colon I \to \mathbb{R}$ dada por:

$$h(x) = \frac{x - a}{f(x) - f(a)} \text{ para } (x \neq a), \;\; h(a) = \frac{1}{f'(a)}$$

es continua en I. Como f^{-1} es continua en J, deducimos que $h \circ f^{-1}$ es continua en J, por lo que, en particular, $\lim\limits_{y \to b} h(f^{-1}(y)) = h(f^{-1}(b)) = h(a)$, pero, para todo $y \in J$, con $y \neq b$ es $h(f^{-1}(y)) = \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b}$, concluimos así que:

$$\lim_{y \to b} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(b)}{y - b} = \frac{1}{f'(a)}.$$

Derivabilidad de las funciones trigonométricas inversas
Se comprueba sin dificultad que:

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1 + x^2} \quad (x \in \mathbb{R}), \quad \operatorname{arc\,sen}'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}} \quad (x \in]-1, 1[)$$

Teorema del valor medio generalizado
Sean $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $[a, b]$ y derivables en $]a, b[$. Entonces existe algún punto $c \in]a, b[$ tal que $(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$.
Demostración
Definimos una función $h(x) = \lambda f(x) + \mu\, g(x)$ donde λ, μ son números que se eligen de forma que $g(a) = g(b)$, esto es, $\lambda(f(a) - f(b)) = \mu(g(b) - g(a))$. Basta para ello tomar $\lambda = g(b) - g(a)$, $\mu = f(a) - f(b)$. El teorema del Rolle, aplicado a la función $h(x) = (g(b) - g(a))f(x) - (f(b) - f(a))g(x)$, nos dice que hay un punto $c \in]a, b[$ tal que $h'(c) = 0$, lo que concluye la demostración.

Reglas de L'Hôpital
Guillaume François Antoine de L'Hôpital, Marqués de Saint Mesme (1661-1704) publicó (anónimamente) en 1696 el primer libro de texto sobre cálculo diferencial el cual tuvo gran éxito e influencia durante el siglo XVIII. En él aparecen los resultados que hoy llevan su nombre

los cuales permiten resolver en muchos casos indeterminaciones de la forma $0/0$ o ∞/∞ que se presentan frecuentemente al estudiar el límite de un cociente de dos funciones. Si bien L'Hôpital era un escritor excepcionalmente claro y eficaz, las llamadas "reglas de L'Hôpital" no fueron establecidas por él sino por su maestro Jean Bernouilli (1667-1748) que no las publicó. Las distintas formas de las reglas de L'Hôpital pueden resumirse en el siguiente enunciado.

Teorema
Sea $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:
a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$.
b) $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$.
y además $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces se verifica que $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

Nótese que, tal y como las hemos enunciado, las reglas de L'Hôpital permiten calcular límites por la derecha y por la izquierda en un punto y, por tanto, podemos usarlas para calcular el límite en un punto de un intervalo que no sea extremo del mismo.

Derivadas sucesivas. Polinomios de Taylor
Sea f una función derivable en un intervalo I. Si la función derivada f' también es derivable en I decimos que f es *dos veces derivable* en I y la función $f'' := (f')'$ se llama *derivada segunda* de f en I. En general, si $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en I si f es n veces derivable en I y la función derivada de orden n de f en I que representaremos por $f^{(n)}$, es derivable en I; en cuyo caso la función $f^{(n+1)} := (f^{(n)})'$ se llama *derivada de orden* $n+1$ de f en I. Si n es un número natural, $n \geqslant 2$, decimos que f es n *veces derivable en un punto* $a \in I$, si f es $n-1$ veces derivable en I y la función $f^{(n-1)}$ es derivable en a. Se dice que f es una función de clase C^n en I si f es n veces derivable I y la función $f^{(n)}$ es continua en I. Se dice que f es una función de clase C^∞ en I si f tiene derivadas de todos órdenes en I. Por convenio se define $f^{(0)} = f$.

Observemos que una función f derivable en un punto a puede ser aproximada localmente por una función polinómica $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ de grado $\leqslant 1$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{x - a} = 0$$

Es natural preguntarse si, en el caso de que f sea derivable n veces en a, existirá una función polinómica P de grado $\leqslant n$, de forma que

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x) - P(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Nótese que, en el caso $n = 1$, el polinomio $P(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$ es el único polinomio de grado $\leqslant 1$ que cumple que $P(a) = f(a)$ y $P'(a) = f'(a)$. En el caso general, parece razonable hallar un polinomio P de grado $\leqslant n$ cuyo valor y el valor de sus derivadas, hasta la del orden n, en el punto a coincida con el valor de f y de las respectivas derivadas de f en a. Pongamos para ello $Q(x) = P(x+a)$ y notemos que Q es un polinomio de grado $\leqslant n$ y $Q^{(k)}(x) = P^{(k)}(x+a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$. Sea $Q(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$. Calcularemos los coeficientes de Q por la condición de que $Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$. Con ello se obtiene fácilmente que $a_k = f^{(k)}(a)/k!$. Resulta así que el polinomio P dado por:

$$P(x) = Q(x-a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

verifica que $P^{(k)}(a) = Q^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$ para $k = 0, 1, \ldots, n$ y es el único polinomio de grado $\leqslant n$ que cumple dichas condiciones.

Definición
Sea f una función n veces derivable en un punto a. La función polinómica $T_n(f,a)$ definida para todo $x \in \mathbb{R}$ por $T_n(f,a)(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ se llama el **polinomio de Taylor de orden n de f en a.**

Teorema de Taylor-Young
Sea f una función n veces derivable en un punto a, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_n(f,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Demostración
Haremos la demostración por inducción. Para $n = 1$ la afirmación del enunciado es cierta sin más que recordar la definición de derivada de una función en un punto. Supongamos que la afirmación del enunciado es cierta para toda función n veces derivable en a. Sea f una función $n+1$ veces derivable en a. Entonces la función $g = f'$ es n veces derivable en a y por tanto:

$$\lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_n(g,a)(x)}{(x-a)^n} = 0.$$

Se comprueba fácilmente que $T'_{n+1}(f,a)(x) = T_n(g,a)(x)$, con lo cual resulta que

$$g(x) - T_n(g,a)(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\big(f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)\big).$$

Por el teorema de L'Hôpital obtenemos que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - T_{n+1}(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}} = \lim_{x \to a} \frac{g(x) - T_n(g,a)(x)}{(n+1)(x-a)^n} = 0.$$

Lo que concluye la demostración.

El siguiente resultado, consecuencia directa del que acabamos de probar, es muy útil para calcular límites.

Corolario
Sea f una función definida en un intervalo I que es $n+1$ veces derivable en un punto $a\in I$, y sea $T_n(f,a)$ el polinomio de Taylor de orden n de f en a. Entonces se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-T_n(f,a)(x)}{(x-a)^{n+1}}=\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(a).$$

El siguiente resultado es de gran utilidad para el estudio de los extremos relativos de una función.

Condiciones suficientes de extremo relativo
Sean I un intervalo, a un punto de I que no es extremo de I y $f\colon I\to\mathbb{R}$ una función $n\geqslant 2$ veces derivable en a. Supongamos que $f^{(k)}(a)=0$ para $k=1,2,\ldots,n-1$, y $f^{(n)}(a)\neq 0$. Entonces:
i) Si n es par y $f^{(n)}(a)>0$, f tiene un mínimo relativo en a.
ii) Si n es par y $f^{(n)}(a)<0$, f tiene un máximo relativo en a.
iii) Si n es impar entonces f no tiene extremo relativo en a.

Demostración
Basta observar que, en virtud de las hipótesis hechas, se verifica que:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}=\frac{1}{n!}f^{(n)}(a)\neq 0$$

En virtud del teorema de conservación local del signo, existe un número $r>0$ tal que $]a-r,a+r[\subset I$ y para $x\in]a-r,a+r[$, $x\neq a$ se verifica que:

$$\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^n}f^{(n)}(a)>0.$$

Si n es par será $(x-a)^n>0$, por lo que si $f^{(n)}(a)>0$ tiene que ser $f(x)-f(a)>0$ para todo $x\in]a-r,a+r[\setminus\{a\}$, es decir, f tiene un mínimo relativo (estricto) en el punto a; si por el contrario es $f^{(n)}(a)<0$ entonces tiene que $f(x)-f(a)<0$ para todo $x\in]a-r,a+r[\setminus\{a\}$, es decir, f tiene un máximo relativo (estricto) en el punto a. En el caso en que n sea impar se tiene que $(x-a)^n<0$ para $a-r<x<a$ y $(x-a)^n>0$ para $a<x<a+r$, deducimos que para $a-r<x<a$, $f(x)-f(a)$ tiene signo opuesto al que tiene para $a<x<a+r$. En consecuencia f no tiene un extremo relativo en a.

El siguiente resultado es importante porque permite acotar el error que se comete al aproximar $f(x)$ por $T_n(f,a)(x)$.

Teorema de Taylor
Sea f una función $n+1$ veces derivable en un intervalo I. Dados dos puntos cualesquiera x, a en I con $x \neq a$, se verifica que existe algún punto c en el intervalo abierto de extremos a y x tal que:

$$f(x) - T_n(f,a)(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

Demostración
En lo que sigue el punto x y el punto a *están fijos*. Definamos la función $g: I \to \mathbb{R}$ dada para todo $t \in I$ por:

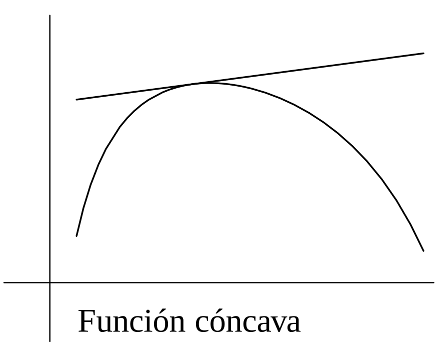
$$g(t) = f(x) - \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

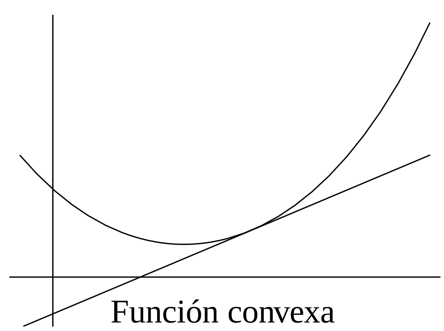
Se comprueba fácilmente que $g'(t) = -\dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n$. Aplicamos ahora el teorema del valor medio generalizado a las funciones g y $h(t) = (x-t)^{n+1}$ en el intervalo de extremos x y a para obtener que hay un punto c comprendido entre x y a tal que $(h(x) - h(a))g'(c) = (g(x) - g(a))h'(c)$. Como $g(x) = h(x) = 0$, obtenemos que:

$$(x-a)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{n!}(x-c)^n = g(a)(n+1)(x-c)^n.$$

Simplificando, y teniendo en cuenta que $g(a) = f(x) - T_n(f,a)(x)$, se obtiene la igualdad del enunciado.

Funciones convexas y funciones cóncavas
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función derivable en el intervalo I. Se dice que f es una función convexa en I si la gráfica de f queda siempre por encima de la recta tangente en cualquier punto, es decir, si para todo par de puntos $x, a \in I$ se verifica que $f(x) \geqslant f(a) + f'(a)(x-a)$. Se dice que f es cóncava si $-f$ es convexa.

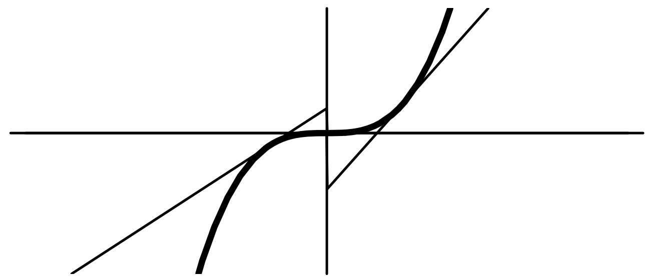

Función cóncava


Función convexa

La función exponencial natural es una función convexa y el logaritmo natural es cóncava. El siguiente resultado es una sencilla aplicación del teorema del valor medio.

Proposición
Sea $f : I \to \mathbb{R}$ una función dos veces derivable en el intervalo I. Se verifica entonces que f es convexa si, y sólo si, $f''(x) \geqslant 0$ para todo $x \in I$.

Puntos de inflexión
Se dice que a es un punto de inflexión de una función f, si hay un número $r > 0$ tal que f es cóncava en el intervalo $]a-r, a[$ y f es convexa en el intervalo $]a, a+r[$ (o al revés). Es decir, los puntos en los que una función pasa de cóncava a convexa o de convexa a cóncava se llaman puntos de inflexión.



El siguiente resultado se prueba fácilmente y queda como ejercicio.

Proposición
Si f tiene un punto de inflexión en a y es dos veces derivable en a, entonces $f''(a)=0$.

2.2. Suplemento 1: Límites e indeterminaciones

Frecuentemente hay que estudiar el límite de una suma o producto de dos funciones precisamente cuando las reglas algebraicas (límite de la suma igual a suma de los límites o límite del producto igual a producto de los límites...) no tienen sentido. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las funciones $f+g$, fg, no está determinado por el de f y g. Por ejemplo, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$, ¿qué podemos decir en general del comportamiento en el punto a de la función $f+g$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, para calcular un límite del tipo $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ donde $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=-\infty$ *se requiere un estudio particular en cada caso*. Suele decirse que estos límites son **una indeterminación del tipo "$\infty-\infty$"**.

Análogamente, si sabemos que $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$ y que la función g es divergente (positivamente o negativamente) en el punto a, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la función fg en dicho punto. Cuando esto ocurre se dice que el límite $\lim\limits_{x\to a}(fg)(x)$ **es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$"**. También aparecen indeterminaciones al estudiar el cociente de dos funciones divergentes o de dos funciones con límite cero, las llamadas **indeterminaciones de los tipos** "∞/∞", "$0/0$".

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar funciones de la forma $f(x)^{g(x)}$ donde f es una función que toma valores positivos y g es una función cualquiera. Puesto que:

$$f(x)^{g(x)}=\exp(g(x)\log f(x))$$

teniendo en cuenta los resultados anteriores, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ vendrá determinado por el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log f(x)$, el cual, a su vez, está determinado en todos los casos por el comportamiento en el punto a de las funciones f y g, excepto cuando dicho límite es una indeterminación del tipo "$0\,\infty$", lo que ocurre en los siguientes casos:

a) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=1$, $\lim\limits_{x\to a}|g(x)|=+\infty$ (indeterminación "1^∞")

b) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (indeterminación "∞^0")

c) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a} g(x)=0$ (indeterminación "0^0")

Ni que decir tiene que *no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones"*; ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Es un hecho que la mayoría de los límites que tienen algún interés matemático son límites indeterminados.

Comentemos brevemente cómo resolver las indeterminaciones. En la relación de Ejercicios resueltos que os hemos dado aparecen muchos ejemplos y muchos trucos que pueden ayudar.

□ INDETERMINACIONES "0/0", "∞/∞". Generalmente se hace uso de la regla de L'Hôpital. A veces hay que aplicar dicha regla más de una vez.

□ INDETERMINACIÓN "$\infty - \infty$". Probablemente sea la más difícil de resolver, porque no hay ningún método general. Lo único que podemos hacer es realizar operaciones algebraicas que conviertan el límite en uno de la forma "0/0" o "∞/∞". Cuando aparecen diferencias de raíces cuadradas, suele ser una buena idea multiplicar y dividir por la expresión conjugada.

□ INDETERMINACIÓN "$0\,\infty$". Normalmente se transforma en una del tipo "0/0" o "∞/∞" sin más que escribir

$$f(x)g(x) = \frac{f(x)}{1/g(x)} \quad \text{o} \quad f(x)g(x) = \frac{g(x)}{1/f(x)}.$$

También puede usarse la llamada "regla del zapato" que estudiaremos a continuación para resolver la indeterminación "1^∞". Comentaremos con más detalle después cómo usar esta regla para la indeterminación 0∞.

□ INDETERMINACIONES "0^0", "∞^0" Y "1^∞". Como ya hemos comentado, escribiendo

$$f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{g(x)\log\big(f(x)\big)},$$

se transforma el cálculo de límite de una potencia al cálculo del límite del producto $g(x)\log\big(g(x)\big)$. Obtenemos el siguiente resultado general, que transforma las indeterminaciones 0^0", "∞^0" y "1^∞" en indeterminaciones del tipo "$0\,\infty$":

Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Entonces existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)^{g(x)}$ si, y sólo si, existe el límite $\lim\limits_{x\to a} g(x)\log\big(f(x)\big)$. En este caso

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = \mathrm{e}^{\lim_{x\to a} g(x)\log(f(x))} \quad \text{y} \quad \lim_{x\to a} g(x)\log\left(f(x)\right) = \log\big(\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}\big).$$

En este resultado, tenemos que entender que "$\mathrm{e}^{+\infty} = +\infty$", "$\mathrm{e}^{-\infty} = 0$", "$\log(0) = -\infty$" y "$\log(+\infty) = +\infty$".

□ INDETERMINACIONES "$0\,\infty$" Y "1^∞" DE NUEVO. Incluimos ahora otro criterio para resolver estas indeterminaciones que es muy útil en la práctica. Lo que realmente hace el criterio es transformar una indeterminación en la otra.

Criterio de equivalencia logarítmica (Regla del zapato)
Sea $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, f y g dos funciones con $f(x) > 0$ y $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 1$. Entonces se tiene que:

i) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^L$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1) = L$.

ii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = +\infty$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1) = +\infty$.

iii) $\lim\limits_{x \to a} f(x)^{g(x)} = 0$ si, y sólo si, $\lim\limits_{x \to a} g(x)(f(x) - 1) = -\infty$.

Demostración.
Sea $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$\varphi(x) = \frac{\log x}{x - 1},\ (x \neq 1),\ \varphi(1) = 1.$$

Nótese que φ es una función continua. Pongamos:

$$f(x)^{g(x)} = \exp\big(g(x) \log(f(x))\big) = \exp\big(g(x)(f(x) - 1)\varphi(f(x))\big)$$

Puesto que $\lim\limits_{x \to a} \varphi(f(x)) = 1$ se sigue que:

$$\lim_{x \to a} g(x)(f(x) - 1)\varphi(f(x)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

si, y sólo si

$$\lim_{x \to a} g(x)(f(x) - 1)) = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$$

lo que prueba las afirmaciones hechas.

2.3. Suplemento 2: Demostración de la Regla de L'Hôpital

Teorema (Regla de L'Hôpital)
Sea $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$, f y g funciones derivables en $]a,b[$ con $g'(x) \neq 0$, para todo $x \in]a,b[$. Sea $\alpha \in \{a,b\}$ y supongamos que se verifica alguna de las dos condiciones siguientes:
a) $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$.
b) $\lim\limits_{x\to\alpha} |g(x)| = +\infty$.
y además $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f'(x)}{g'(x)} = L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Entonces se verifica que $\lim\limits_{x\to\alpha} \dfrac{f(x)}{g(x)} = L$.

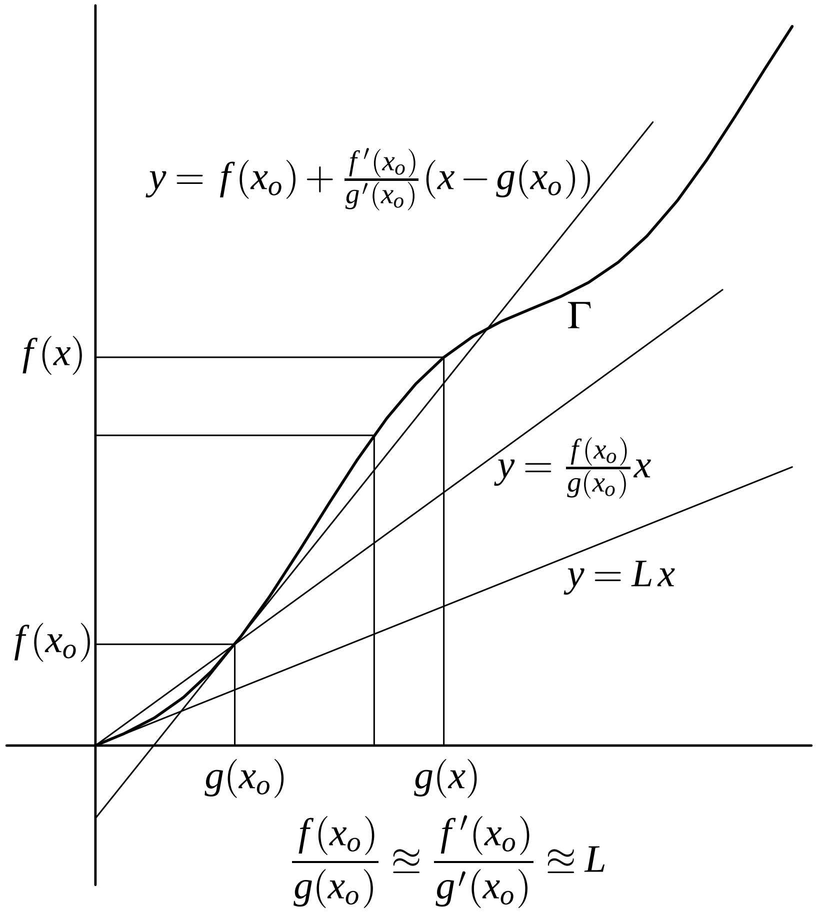
Demostración
Antes de dar una demostración al uso vamos a explicar por qué la hipótesis de que el cociente de las derivadas tiene límite implica que también lo tiene el cociente de las funciones. Para fijar ideas, consideremos el caso en que $\alpha = a$ es un número real y $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x) = \lim\limits_{x\to\alpha} g(x) = 0$. Definamos $f(a) = g(a) = 0$. Nótese que aunque el punto $(g(x), f(x))$ recorre una trayectoria en en plano que termina en $(0,0)$ cuando $x = a$, el límite $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x)$ no tiene por qué existir. Ello se debe a que la proximidad a $(0,0)$ del punto $(g(x), f(x))$ no nos proporciona ninguna información sobre el valor del cociente $f(x)/g(x)$. Baste considerar que en un círculo centrado en $(0,0)$ de radio ε, hay puntos (u,v) para los que el cociente u/v puede tomar cualquier valor. Geométricamente, podemos interpretar $f(x)/g(x)$ como la pendiente de la recta que une $(0,0)$ con el punto $(g(x), f(x))$. Si imaginamos la trayectoria que recorre el punto $(g(x), f(x))$ como una curva, Γ, en el plano que termina en $(0,0)$, parece evidente que, cuando dicho punto está muy próximo a $(0,0)$, el número $f(x)/g(x)$ está muy próximo a la pendiente de la tangente a Γ en $(g(x), f(x))$. Nótese que como f y g no se suponen derivables en $x = a$, no está garantizado que $\Gamma = \{(g(x), f(x)) : x \in I\}$ tenga tangente en el origen, es decir, para $x = a$. Podemos, sin embargo, calcular la pendiente de la tangente a Γ en puntos distintos del origen. Para ello observemos que las hipótesis hechas implican que g es inyectiva, por lo que, llamando $J = g(I)$, es claro que $\Gamma = \{(t, f(g^{-1}(t))), t \in J\}$; es decir, Γ es la gráfica de la función $h\colon J \to \mathbb{R}$ dada por $h(t) = f(g^{-1}(t))$. Las hipótesis hechas garantizan que h es derivable en J y su derivada, es decir, la pendiente de la tangente a Γ en el punto $(t, f(g^{-1}(t)))$, viene dada por:

$$h'(t) = \frac{f'(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))}.$$

Para obtener la pendiente de la tangente a Γ en el punto $(g(x), f(x))$ basta sustituir t por $g(x)$ en la igualdad anterior, es decir, dicha pendiente viene dada por:

$$h'(g(x)) = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El dibujo siguiente puede ser de ayuda:



A la vista de lo anterior, se comprende ahora que si exigimos que $f'(x)/g'(x)$ tenga límite L en el punto a, estamos obligando a que el cociente $f(x)/g(x)$ también tenga límite igual a L en a. En el dibujo se ha supuesto que L es un número real, pero está claro que puede suponerse también $L = +\infty$ o $L = -\infty$, lo que corresponde a los casos en que Γ tiene tangente vertical en el origen.

Daremos ahora una demostración formal del teorema en dos casos particulares.

Caso1 (Primera regla de L'Hôpital). Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y que

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0.$$

Definamos $f(a) = g(a) = 0$. Dado $x \in I$, $x \neq a$, aplicamos el teorema del valor medio generalizado a las funciones f y g en el intervalo $[a, x]$ para obtener $c_x \in]a, x[$ tal que

$$(f(x) - f(a))g'(c_x) = (g(x) - g(a))f'(c_x),$$

es decir, $f(x)g'(c_x) = g(x)f'(c_x)$. Las hipótesis hechas implican que g es estrictamente monótona en I y, como $g(a) = 0$, deducimos que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Obtenemos así que:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} \qquad (1)$$

Por hipótesis, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que para $a < t < a + \delta$ es $\left| \dfrac{f'(t)}{g'(t)} - L \right| < \varepsilon$. Deducimos de la igualdad (1) que si $a < x < a + \delta$ se tiene que:

$$\left| \frac{f(x)}{g(x)} - L \right| < \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim\limits_{x \to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = +\infty$, $L = -\infty$ se tratan de la misma forma.

Caso 2 (Segunda Regla de L'Hôpital). Supongamos que $\alpha = a$ y L son números reales y $\lim\limits_{x\to a}|g(x)| = +\infty$. Esta última condición implica que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$ suficientemente próximo al punto a, y por el carácter local del límite no es restrictivo suponer que $g(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Nótese también que las hipótesis hechas implican que g es inyectiva en I. La hipótesis $\lim\limits_{x\to a} f'(x)/g'(x) = L$, nos dice que dado $\varepsilon > 0$, hay un número (fijo en lo que sigue) $c \in I$, tal que para $a < t \leqslant c$ se verifica que:

$$\left|\frac{f'(t)}{g'(t)} - L\right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (1)$$

Como $\lim\limits_{x\to a}|g(x)| = +\infty$, hay un número $\delta > 0$ tal que $a + \delta \leqslant c$ y para $a < x < a + \delta$ se verifica que:

$$\frac{|g(c)|}{|g(x)|} < 1, \quad \frac{|f(c) - Lg(c)|}{|g(x)|} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (2)$$

Dado $a < x < a + \delta$ aplicamos el teorema del valor medio generalizado para obtener un punto $c_x \in]x, c[$ tal que $\dfrac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \dfrac{f'(c_x)}{g'(c_x)}$. Teniendo en cuenta la identidad:

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} - L &= \left(\frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} - L\right)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)} \\ &= \left(\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} - L\right)\left(1 - \frac{g(c)}{g(x)}\right) + \frac{f(c) - Lg(c)}{g(x)}\end{aligned}$$

deducimos, en virtud de (1) y (2), que para todo $x \in]a, a + \delta[$ se verifica que:

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4}2 + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to a} f(x)/g(x) = L$. Los casos en que $L = +\infty$, $L = -\infty$ se tratan de la misma forma.

Los demás casos tienen un tratamiento similar y también pueden reducirse a los ya estudiados sin más que invertir la variable.

2.4. Relación de ejercicios

Empezaremos con algunas de las aplicaciones más sencillas y atractivas del cálculo diferencial. En esquema, se trata de lo siguiente: calcular la tasa de variación de una magnitud cuando se conoce la tasa de variación de otra magnitud relacionada con ella. En este tipo de ejercicios la "tasa de variación" se interpreta como una derivada y, en la mayoría de los casos, basta usar la regla de la cadena para obtener lo que se pide. Hay que elegir las unidades de acuerdo con los datos del problema; por ejemplo, si un volumen se mide en litros tendremos que medir longitudes con decímetros.

1. ¿Con qué rapidez baja el nivel del agua contenida en un depósito cilíndrico si estamos vaciándolo a razón de 3000 litros por minuto?

2. Un punto P se mueve sobre la parte de la parábola $x = y^2$ situada en el primer cuadrante de forma que su coordenada x está aumentando a razón de 5 cm/sg. Calcular la velocidad a la que el punto P se aleja del origen cuando $x = 9$.

3. Se está llenando un depósito cónico apoyado en su vértice a razón de 9 litros por segundo. Sabiendo que la altura del depósito es de 10 metros y el radio de la tapadera de 5 metros, ¿con qué rapidez se eleva el nivel del agua cuando ha alcanzado una profundidad de 6 metros?

4. El volumen de un cubo está aumentando a razón de 70 cm^3 por minuto. ¿Con qué rapidez está aumentando el área cuando la longitud del lado es de 12 cm?

5. Un barco A se desplaza hacia el oeste con una velocidad de 20 millas por hora y otro barco B avanza hacia el norte a 15 millas por hora. Ambos se dirigen hacia un punto O del océano en el cual sus rutas se cruzan. Sabiendo que las distancias iniciales de los barcos A y B al punto O son, respectivamente, de 15 y de 60 millas, se pregunta: ¿A qué velocidad se acercan (o se alejan) los barcos entre sí cuando ha transcurrido una hora? ¿Y cuando han transcurrido 2 horas? ¿En qué momento están más próximos uno de otro?

6. Una bola esférica de hielo se está derritiendo de forma uniforme en toda la superficie, a razón de 50 cm^3 por minuto. ¿Con qué velocidad está disminuyendo el radio de la bola cuando este mide 15 cm?

Una de las aplicaciones más útiles de las derivadas es a los problemas de optimización. En dichos problemas se trata, por lo general, de calcular el máximo o el mínimo absolutos de una magnitud. Hay una gran variedad de problemas que responden a este esquema y con frecuencia tienen contenido geométrico o económico o físico. Por ello cada uno de estos ejercicios requiere un estudio particular. Los siguientes consejos pueden ser útiles:
(a) *Entiende bien el problema. Haz, si es posible, un dibujo o un esquema.*
b) *Elige las variables y la magnitud, Q, que tienes que optimizar.*
c) *Estudia las relaciones entre las variables para expresar la magnitud Q como función de una sola de ellas, $Q = f(x)$.*
d) *Las condiciones del problema deben permitir establecer el dominio de f.*
e) *Estudia la variación del signo de la derivada de f en su dominio para calcular máximos y mínimos absolutos.*

7. Dado un punto $P = (a, b)$ situado en el primer cuadrante del plano, determinar el segmento con extremos en los ejes coordenados y que pasa por P que tiene longitud mínima.

8. Demuestra que entre todos los rectángulos con un perímetro dado, el que tiene mayor área es un cuadrado.

9. Determinar el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados, inscrito en la elipse de ecuación $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, y que tenga área máxima.

10. Calcular el área máxima de un rectángulo que tiene dos vértices sobre una circunferencia y su base está sobre una cuerda dada de dicha circunferencia.

11. Encontrar un punto P de la circunferencia $x^2 + y^2 = 1$ con coordenadas positivas y tal que el triángulo cuyos vértices son (0,0) y las intersecciones de la tangente a la circunferencia en P con los ejes coordenados tenga área mínima.

12. Se quiere construir una caja sin tapa con una lámina metálica rectangular cortando cuadrados iguales en cada esquina y doblando hacia arriba los bordes. Hallar las dimensiones de la caja de mayor volumen que puede construirse de tal modo si los lados de la lámina rectangular miden: a) 10 cm. y 10 cm. b) 12 cm. y 18 cm.

13. Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuya superficie total sea mínima.

14. Calcular las dimensiones (radio y altura) de una lata cilíndrica de un litro de capacidad cuyo costo de producción sea mínimo. Se supone que no se desperdicia aluminio al cortar los lados de la lata, pero las tapas de radio r se cortan de cuadrados de lado $2r$ por lo que se produce una pérdida de metal.

15. Calcula la longitud de la escalera más larga que llevada en posición horizontal puede pasar por la esquina que forman dos corredores de anchuras respectivas a y b.

16. Calcular las dimensiones del rectángulo de área máxima que puede inscribirse dentro de un semicírculo de radio 2.

17. Se necesita construir un depósito de acero de 500 m^3, de forma rectangular con base cuadrada y sin tapa. Tu trabajo, como ingeniero de producción, es hallar las dimensiones del depósito para que su costo de producción sea mínimo.

18. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

19. Hallar el volumen del cilindro circular recto más grande que puede inscribirse en un cono circular recto de altura h y radio r conocidos.

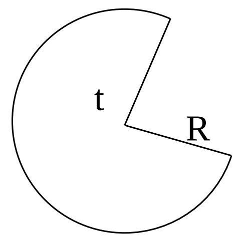
20. Hallar el volumen del cono circular recto más grande que puede inscribirse en una esfera de radio ($a > 0$).

21. La resistencia de una viga de madera de sección rectangular es proporcional a su anchura y al cuadrado de su altura. Calcular las dimensiones de la viga más resistente que puede cortarse de un tronco de madera de radio r.

22. Calcular la distancia mínima del punto $(6,3)$ a la parábola de ecuación $y = x^2$.

23. Una empresa tiene 100 casas para alquilar. Cuando la renta es de 80 libras al mes, todas las casas están ocupadas. Por cada 4 libras de incremento de la renta una casa queda deshabitada. Cada casa alquilada supone a la empresa un coste de 8 libras para reparaciones diversas. ¿Cuál es la renta mensual que permite obtener mayor beneficio?

24. Se proyecta un jardín en forma de sector circular de radio R y ángulo central t. El área del jardín ha de ser A fija. ¿Qué valores de R y θ hacen mínimo el perímetro del jardín?.



25. Se corta un alambre de longitud L formando un círculo con uno de los trozos y un cuadrado con el otro. Calcular por dónde se debe cortar para que la suma de las áreas de las dos figuras sea máxima o sea mínima.

26. Dados dos puntos A y B situados en el primer cuadrante del plano, dígase cuál es el camino más corto para ir de A a B pasando por un punto del eje de abscisas.

27. Se desea construir una ventana con forma de rectángulo coronado de un semicírculo de diámetro igual a la base del rectángulo. Pondremos cristal blanco en la parte rectangular y cristal de color en el semicírculo. Sabiendo que el cristal coloreado deja pasar la mitad de luz (por unidad de superficie) que el blanco, calcular las dimensiones de la ventana para conseguir la máxima luminosidad si se ha de mantener un perímetro constante dado.

28. Se desea confeccionar una tienda de campaña cónica de un volumen determinado. Calcular sus dimensiones para que la cantidad de lona necesaria sea mínima.

29. Se desea construir un silo, con un volumen V determinado, que tenga la forma de un cilindro rematado por una semiesfera. El costo de construcción (por unidad de superficie) es doble para la semiesfera que para el cilindro (la base es gratis). Determínense las dimensiones óptimas para minimizar el costo de construcción.

30. Demostrar que de todos los triángulos isósceles que se pueden circunscribir a una circunferencia de radio r, el de área mínima es el equilátero de altura $3r$.

31. Con una cuerda de longitud L, en la que en uno de sus extremos hemos hecho un nudo corredizo, rodeamos una columna circular de radio R haciendo pasar el otro extremo por el nudo. Calcular la máxima distancia posible del extremo libre al centro de la columna.

Uno de los resultados más útiles del cálculo diferencial son las Reglas de L'Hôpital que permiten resolver las indeterminaciones en el cálculo de límites.

32. Calcular el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f:]0,\pi/2[\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=(\operatorname{sen}x+\cos x)^{1/x},\ a=0;\qquad f(x)=(1+\operatorname{tg}x)^{1/x^2},\ a=0$$
$$f(x)=(\cot x)^{\operatorname{sen}x},\ a=0,\ \pi/2;\qquad f(x)=\left(\cos^2 x+\frac{x^2}{2}\right)^{1/x^2},\ a=0$$
$$f(x)=(1+\operatorname{sen}x)^{\operatorname{cotg}x},\ a=0,\ \pi/2;\ f(x)=\frac{\log(\operatorname{sen}x)}{(\pi-2x)^2},\ a=\pi/2$$
$$f(x)=\frac{x-\operatorname{arc\,tg}x}{\operatorname{sen}^3 x},\ a=0;\qquad f(x)=\frac{(\operatorname{tg}x)(\operatorname{arc\,tg}x)-x^2}{x^6},\ a=0$$
$$f(x)=\frac{e^x-\cos\sqrt{2}\,x-x}{\operatorname{tg}^3 x},\ a=0;\qquad f(x)=\left(\frac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/(1-\cos x)},\ a=0$$

33. Calcular el límite en el punto a que en cada caso se indica de las funciones $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$.

$$f(x)=\frac{x^2\operatorname{sen}1/x}{\log x},\ a=+\infty;\quad f(x)=\operatorname{sen}\sqrt{1+x}-\operatorname{sen}\sqrt{x},\ a=+\infty$$
$$f(x)=\operatorname{sen}x\operatorname{sen}\frac{1}{x},\ a=0,\ a=+\infty;\quad f(x)=\left(\cos\frac{\pi}{x+2}\right)^{x^2},\ a=+\infty$$

34. Sea $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo, además, $g(0)=0$. Definamos $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ por $f(x)=\dfrac{g(x)}{x}$ si $x\neq 0$, $f(0)=g'(0)$. Estúdiese la derivabilidad de f. ¿Es f' continua en 0?.

35. Sean $f,g:]-1,\infty[\to\mathbb{R}$ las funciones definidas por

$$f(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\ f(0)=1;\quad g(x)=e^{f(x)}$$

Calcúlense las derivadas primera y segunda de f y g en 0 y dedúzcase el valor del límite

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e+\frac{e}{2}x}{x^2}$$

36. Estúdiese la derivabilidad de las funciones

- $f:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=x^{1/(x^2-1)}$, $f(1)=\sqrt{e}$
- $f:]-1/2,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=(x+e^x)^{1/x}$, $f(0)=e^2$.
- $f:[0,+\infty[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=(1+x\log x)^{1/x}$, $f(0)=0$.
- $f:]-\pi/2,\pi/2[\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\left(\dfrac{\operatorname{sen}x}{x}\right)^{1/x^2}$, $f(0)=e^{-1/6}$.
- $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, dada por $f(x)=\left(1+x^2\right)^{\operatorname{sen}(1/x)}$, $f(0)=1$.

37. Calcúlense los límites

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}-\frac{1}{x^2}\right);\quad \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x};\quad \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\log x}-\frac{1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,e^{2x}+x\,e^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^x-1)^3};\quad \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arc\,tg} x\right)^{1/\log x}$$

Sugerencia: pueden usarse directamente las reglas de L'Hôpital pero eso es más conveniente realizar previamente alguna transformación.

38. Explicar si es correcto usar las reglas de L'Hôpital para calcular los límites:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x-\operatorname{sen} x}{x+\operatorname{sen} x};\qquad \lim_{x\to 0}\frac{x^2\operatorname{sen}(1/x)}{\operatorname{sen} x}.$$

El teorema de los ceros de Bolzano, junto con el teorema de Rolle, permiten determinar en muchas ocasiones el número de ceros reales de una función.

39. Calcular el número de ceros y la imagen de la función $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dada por $f(x)=x^6-3x^2+2$.

40. Calcular el número de soluciones de la ecuación $3\log x - x = 0$.

41. Determinar el número de raíces reales de la ecuación $2x^3-3x^2-12x=m$ según el valor de m.

42. Sea f una función polinómica y $a<b$. Justifíquese que, *contando cada cero tantas veces como su orden*, si $f(a)f(b)<0$ el número de ceros de f en $]a,b[$ es impar; y si $f(a)f(b)>0$ dicho número (caso de que haya algún cero) es par. Dedúzcase que si f tiene grado n, es condición necesaria y suficiente para que f tenga n raíces reales distintas que su derivada tenga $n-1$ raíces reales distintas: $c_1<c_2<\cdots<c_{n-1}$ y que para $\alpha<c_1$ suficientemente pequeño y para $\beta>c_{n-1}$ suficientemente grande, los signos de los números $f(\alpha),f(c_1),f(c_2),\dots,f(c_{n-1}),f(\beta)$ vayan alternando.
Aplicación:

   a) Determinar para qué valores de α la función polinómica $3x^4-8x^3-6x^2+24x+\alpha$ tiene cuatro raíces reales distintas.

   b) Estudiar el número de raíces reales de la ecuación $3x^5+5x^3-30x=\alpha$, según los valores de α.

43. Dado $n\in\mathbb{N}$, sea $f(x)=(x^2-1)^n$ $(x\in\mathbb{R})$. Pruébese que la derivada k-ésima $(1\leq k\leq n)$ de f tiene exactamente k raíces reales distintas en el intervalo $]-1,1[$.

El teorema del valor medio permite acotar el incremento de una función por el incremento de la variable y una cota de la derivada. Esto da lugar a muchas desigualdades interesantes. Por otra parte, algunas de las desigualdades más útiles son consecuencia de la convexidad. Los siguientes ejercicios tratan de ello.

44. Para $a > 0$ demostrar que $-a\,e\log x \leqslant x^{-a} \quad \forall x > 0$.

45. Dado $\alpha \in]0,1[$ demuéstrese que
$$x^{\alpha} < \alpha x + 1 - \alpha \quad \text{para todo } x \in \mathbb{R}^{+} \setminus \{1\}.$$

46. Sean $0 < a < b$. Pruébese que si $b \leq e$ entonces $a^b < b^a$, y si $e \leq a$ entonces $b^a < a^b$. ¿Qué puede decirse si $a < e < b$?.

    Sugerencia: considérese la función $x \mapsto \dfrac{\log x}{x}$.

47. ¿Hay algún número $a > 0$ que verifique que $a^{x/a} \geq x$ para todo $x \in \mathbb{R}^{+}$?. ¿Cuál es dicho número?

48. Pruébese que para todo $x \in]0, \pi/2[$ se verifica que
$$i)\ 1 - \frac{x^2}{2} < \cos x\,;\ \ ii)\ \frac{2x}{\pi} < \operatorname{sen} x < x < \operatorname{tg} x$$

El teorema de Taylor se usa para obtener aproximaciones polinomiales de una función dada y para calcular valores aproximados con precisión prefijada.

49. Calcúlese una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt[3]{1+x} - \varphi(x)}{x^5} = 0$.

50. Calcular una función polinómica φ tal que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\log \operatorname{arc\,tg}(x+1) - \varphi(x)}{x^2} = 0$.

51. Justifíquese que las únicas funciones n veces derivables con derivada de orden n constante son las funciones polinómicas de grado $\leq n$.

52. Calcúlese, usando un desarrollo de Taylor conveniente, $\sqrt{2}$ con nueve cifras decimales exactas.

    Sugerencia: téngase en cuenta que $\sqrt{2} = \dfrac{14}{10}\left(1 - \dfrac{1}{50}\right)^{-1/2}$.

53. Calcular, usando un desarrollo de Taylor conveniente, un valor aproximado del número real α con un error menor de 10^{-2} en cada uno de los casos siguientes:
$$a)\ \ \alpha = \sqrt[3]{7} \qquad b)\ \ \alpha = \sqrt{e} = e^{1/2} \qquad c)\ \ \alpha = \operatorname{sen}\frac{1}{2}.$$

54. Calcular los polinomios de Taylor de orden n en el punto 0 de las funciones $\exp x$, $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\log(1+x)$, $\operatorname{arc\,tg} x$, $(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$, $\operatorname{arc\,sen} x$.

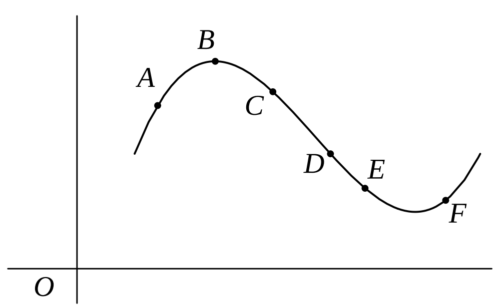
Una de las aplicaciones más comunes de las derivadas es el trazado de gráficas. Para trazar la gráfica de una función f se debe tener en cuenta:
1. *Propiedades de simetría o de periodicidad de f.*
2. *Los puntos en que se anula la primera o la segunda derivada de f y los puntos en los que f no es derivable.*
3. *Los intervalos en que f' tiene signo constante. Lo que nos informa del crecimiento y decrecimiento de f y también de la naturaleza de los puntos singulares (máximos y mínimos locales).*
4. *Los intervalos en que la derivada segunda tiene signo constante. Lo que nos informa de la convexidad y concavidad, así como de los puntos de inflexión.*
5. *Hallar las asíntotas.*
Asíntota vertical. *La recta $x = c$ es una asíntota vertical de la gráfica de f si alguno de los límites laterales de f en c es infinito.*
Asíntota horizontal. *La recta $y = L$ es una asíntota horizontal de la gráfica de f si f tiene límite en $+\infty$ o en $-\infty$ igual a L.*
Asíntota oblicua. *Si f es una función racional con el grado del numerador una unidad mayor que el grado del denominador, entonces puede escribirse de la forma $f(x) = mx + b + g(x)$ donde $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ y la recta $y = mx + b$ es una asíntota oblicua de la gráfica de f.*
6. *Dibujar máximos, mínimos, puntos de inflexión, cortes con los ejes y cortes con las asíntotas.*

55. Dibujar las gráficas de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 2$ **b)** $f(x) = \dfrac{x^2+1}{x^2-1}$ **c)** $f(x) = \dfrac{x^2-2x+2}{x-1}$

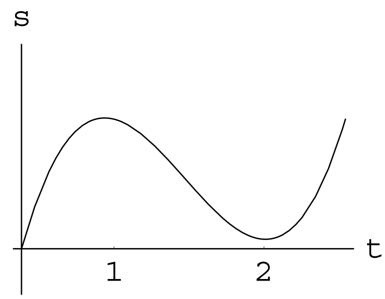
d) $f(x) = |x|^{2x}$ **e)** $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(x-2)^2$ **f)** $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

56. La figura muestra la gráfica de una función f dos veces derivable. Estudiar el signo de la primera y la segunda derivada de f en cada uno de los seis puntos indicados.



57. Una partícula se mueve a lo largo de una línea recta. En la siguiente gráfica se muestra la distancia s de dicha partícula al origen en el tiempo t.

Indicar, a la vista de la gráfica y de forma aproximada:
a) Cuándo la partícula se está alejando o acercando al origen;
b) Cuándo la partícula está acelerando y cuándo está frenando.



58. Traza la gráfica de una función f dos veces derivable en $\mathbb{R}$, sabiendo que:
a) La gráfica de f pasa por los puntos $(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)$;
b) f' es positiva en los intervalos $]-\infty,-2[$ y $]0,2[$, y es negativa en $]-2,0[$ y $]2,+\infty[$;
c) f'' es negativa en los intervalos $]-\infty,-1[$ y $]1,+\infty[$, y es positiva en el intervalo $]-1,1[$.

59. a) ¿Es cierto que los puntos en los que la derivada segunda se anula son puntos de inflexión?
b) ¿Qué puedes decir de los puntos de inflexión de una función polinómica de grado 2 o 3?
Justifica tus respuestas.

60. ¿Es cierto que la gráfica de toda función polinómica de grado par tiene tangente horizontal en algún punto? ¿Y si el grado es impar? Justifica tus respuestas.

Consideraremos ahora el problema de hallar el máximo o mínimo absolutos de una función continua f en un intervalo cerrado [a,b]. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

***Paso 1**. Hallar todos los puntos x de $[a,b]$ que o bien son puntos singulares de f o son puntos en los que f no es derivable.*
***Paso 2**. Calcular el valor de f en cada uno de los puntos obtenidos en el Paso 1 y también en a y en b.*
***Paso 3**. Comparar los valores obtenidos en el Paso 2. El mayor de todos ello será el máximo absoluto de f en $[a,b]$ y el menor será el mínimo absoluto de f en $[a,b]$.*

61. Calcular los valores máximo y mínimo de las siguientes funciones en los intervalos que se indican:

    a) $f(x) = x^3 - x^2 - 8x + 1$ en el intervalo $[-2, 2]$.

    b) $\dfrac{x+1}{x^2+1}$ en el intervalo $[-1, 2]$.

    c) $f(x) = \dfrac{1}{2}(\operatorname{sen}^2 x + \cos x) + 2\operatorname{sen} x - x$ en el intervalo $[0, \pi/2]$.

    d) $f(x) = \sqrt[3]{x^2}\,(5 - 2x)$ en el intervalo $[-1, 2]$.

    e) $f(x) = -x^3 + 12x + 5$ en el intervalo $[-3, 3]$.

Cuando una función no está definida en un intervalo cerrado hay que estudiar el signo de la derivada si queremos calcular máximos o mínimos absolutos cuya existencia habrá que justificar.

62. Calcular el mínimo valor de $\sum_{k=1}^{n}(x - a_k)^2$ donde $a_1, a_2, \cdots a_n$ son números reales dados.

63. Calcular la imagen de $f\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^{1/x}$.

64. Sea $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \mathrm{e}^{-1/x^2}$ para $x \neq 0$, y $f(0) = 0$. Estudiar la continuidad y derivabilidad de f y calcular su imagen.

Acabamos esta larga relación con algunos ejercicios que nos ha parecido que no encajaban propiamente en ninguno de los apartados anteriores.

65. Supongamos que f es derivable en a, g es continua en a y $f(a) = 0$. Pruébese que fg es derivable en a.

66. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ derivable y f' creciente. Probar que la función $g :]a, b] \to \mathbb{R}$ dada para todo $x \in]a, b]$ por $g(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$, es creciente.

67. Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ continua en $[a, b]$ y derivable dos veces en $]a, b[$. Supongamos que el segmento de extremos $(a, f(a))$, $(b, f(b))$ corta a la gráfica de f en un punto $(c, f(c))$ con $a < c < b$. Demuéstrese que existe algún punto $d \in]a, b[$ tal que $f''(d) = 0$. Sugerencia: interpretar gráficamente el enunciado.

68. Justifíquese que existe una función $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ derivable y que verifica que $g(x) + e^{g(x)} = x$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Calcúlese $g'(1)$ y $g'(1 + e)$.

Capítulo 3

Sucesiones de números reales.

3.1. Desarollo teórico

Introducción

Las sucesiones aparecen de manera natural en muchos cálculos que responden a un esquema iterativo. Por ejemplo, al dividir 2 entre 3 obtenemos $\dfrac{2}{3} = \dfrac{6}{10} + \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10}$, igualdad que podemos usar ahora para obtener

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \left(\frac{6}{10} + \frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{2}{3}\frac{1}{10^2}$$

y de nuevo

$$\frac{2}{3} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \left(\frac{6}{10} + \frac{2}{3}\frac{1}{10}\right)\frac{1}{10^2} = \frac{6}{10} + \frac{6}{10^2} + \frac{6}{10^3} + \frac{2}{3}\frac{1}{10^3}$$

y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ la igualdad:

$$\frac{2}{3} = \sum_{k=1}^{n} \frac{6}{10^k} + \frac{2}{3}\frac{1}{10^n}.$$

Escribiendo $x_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{6}{10^k}$ tenemos que $0 < \dfrac{2}{3} - x_n = \dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^n}$. Nótese que, aunque los números x_n son *todos ellos distintos* de $2/3$, dada una cota de error arbitrariamente pequeña $\varepsilon > 0$ y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ de manera que $\dfrac{2}{3}\dfrac{1}{10^{n_0}} < \varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - 2/3| < \varepsilon$, lo que se expresa escribiendo $2/3 = \lim\{x_n\}$.

Este ejemplo está relacionado con la expresión decimal de $2/3$ que, como todos sabemos, es un decimal periódico con período igual a 6, lo que suele escribirse $2/3 = 0,\widehat{6}$ igualdad en la que, según se dice a veces, el símbolo $0,\widehat{6}$ debe interpretarse como que el 6 *se repite infinitas veces*. ¿Qué quiere decir esto? Lo que está claro es que, por mucho tiempo y paciencia que tengamos, nunca podremos escribir *infinitos* 6 uno detrás de otro... bueno, podríamos escribir algo como

$$\frac{2}{3} = 0,\widehat{6} = 0,6666666...(\text{ infinitos } 6)$$

lo que tampoco sirve de mucho pues seguimos sin saber cómo se interpreta esta igualdad. Pues bien, para dar un significado matemático a lo que se quiere expresar con esa igualdad hay que recurrir al concepto de límite de una sucesión tal como hemos hecho antes.

Veamos otro ejemplo en esta misma línea. Vamos a intentar calcular aproximaciones racionales a $\sqrt{10}$. Si partimos inicialmente de un número $x > \sqrt{10}$, tendremos que $\dfrac{10}{x} < \sqrt{10} < x$. Pongamos $y = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{10}{x}\right)$. Entonces, en virtud de la desigualdad de las medias, $\sqrt{10} < y$, y como también $y < x$, deducimos que y está más cerca de $\sqrt{10}$ que x. Podemos ahora repetir este proceso sustituyendo x por y obteniendo una nueva aproximación mejor de $\sqrt{10}$. Nótese que si x es racional también lo será y. Esto sugiere que, partiendo de un valor inicial, por ejemplo $x_1 = 4$, calculemos $x_2 = \dfrac{1}{2}\left(x_1 + \dfrac{10}{x_1}\right)$, y después $x_3 = \dfrac{1}{2}\left(x_2 + \dfrac{10}{x_2}\right)$, y así podemos continuar tantas veces como queramos, obteniendo para cada $n \in \mathbb{N}$ un número x_n tal que

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right)$$

con $x_1 = 4$. Con una calculadora manual obtenemos enseguida los valores $x_2 = 3,25$; $x_3 = 3,1634615$; $x_4 = 3,1622779$ con seis cifras decimales exactas:

$$0 < x_4 - \sqrt{10} = \frac{x_4^2 - 10}{x_4 + \sqrt{10}} < \frac{x_4^2 - 10}{6} < \frac{0,000005}{6} < \frac{1}{10^6}$$

es decir, x_4 coincide con $\sqrt{10}$ hasta la sexta cifra decimal. De hecho, como $x_n > \sqrt{10}$ tenemos que:

$$0 < x_{n+1} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{10}{x_n}\right) - \sqrt{10} < \frac{1}{2}x_n + \frac{1}{2}\sqrt{10} - \sqrt{10} = \frac{1}{2}(x_n - \sqrt{10})$$

de donde se sigue que $0 < x_{n+1} - \sqrt{10} < \dfrac{1}{2^n}(x_1 - \sqrt{10}) < \dfrac{1}{2^n}$, por tanto, dado cualquier $\varepsilon > 0$, y tomando $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{-n_0} < \varepsilon$, deducimos que *para todo* número natural $n \geqslant n_0$ se verifica que $|x_n - \sqrt{10}| < \varepsilon$, lo que simbólicamente se expresa escribiendo $\sqrt{10} = \lim\limits_{n\to\infty}\{x_n\}$.

En los ejemplos anteriores hemos dado por supuesto que ya tienes cierta familiaridad con los conceptos de “sucesión” y de “límite de una sucesión” de los cuales vamos a ocuparnos a continuación con detalle.

Sucesión de elementos de un conjunto
Sea A un conjunto no vacío. Una sucesión de elementos de A es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en A. En particular, una sucesión de númerts reales es una **aplicación** del conjunto $\mathbb{N}$ de los números naturales en el conjunto $\mathbb{R}$ de los números reales.

En todo lo que sigue solamente consideraremos sucesiones de números reales por lo que nos referiremos a ellas simplemente como "sucesiones".

Dada una sucesión $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ suele emplearse una notación especial para representarla. Para $n \in \mathbb{N}$ suele notarse el número real $\varphi(n)$ en la forma $x_n = \varphi(n)$ (naturalmente la letra "x" nada tiene de especial y puede sustituirse por cualquier otra). La sucesión misma se representa por $\varphi = \{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, es decir, el símbolo $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ debe interpretarse como la **aplicación** que a cada $n \in \mathbb{N}$ hace corresponder el número real x_n. Cuando no hay posibilidad de confusión escribimos simplemente $\{x_n\}$ en vez de $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Conviene insistir en que $\{x_n\}$ es, por definición, la **aplicación** de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$ dada por $n \mapsto x_n$. No hay que confundir la sucesión $\{x_n\}$, que es una aplicación, con su **conjunto imagen**, que es el subconjunto de $\mathbb{R}$ formado por todos los números x_n, el cual se representa por $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Por ejemplo, $\{(-1)^n\}$ y $\{(-1)^{n+3}\}$ son sucesiones distintas con el mismo conjunto imagen. El número x_n se llama *término n-ésimx* de la sucesión; para $n = 1, 2, 3$ se habla respectivamente de primero, segundo, tercer término de la sucesión.

Sucesiones de números reales convergentes
Una sucesión $\{x\}$ se dice que **converge a un número real** x si, para cualquier número real $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε tal que si n es cualquier número natural mayor o igual que m_ε se cumple que $|x_n - x| < \varepsilon$. Simbólicamente:

$$\forall\varepsilon > 0 \;\; \exists m_\varepsilon \in \mathbb{N} \; : n \geqslant m_\varepsilon \Rightarrow |x_n - x| < \varepsilon$$

Se dice iambién que el número x es **límite de la sucesión** $\{x_n\}$ y se escribe $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$ o, simplemente, $\lim \{x_n\} = x$ e incluso, si no hay posibilidad de confusión, $\{x_n\} \to x$. Se comprueba fácilmente que *una sucesión convergente tiene un único límite*.

Estudiamos a continuación cómo se comportan las sucesiones convergentes respecto de las estructuras algebraica y de orden de $\mathbb{R}$.

Proposición
Supongamos que $\lim \{x_n\} = x$, $\lim \{y_n\} = y$ y que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant m$ se tiene que $x_n \leqslant y_n$. Entonces ce verifica que $x \leqslant y$.

Respecto al resultado anterior, de muy fácil demostración, conviene advertir que *aunque las desigualdades sean estrictas no puede asegurarse que* $\lim \{x_n\} = x$ *sea estrictamente menor que* $\lim \{y_n\} = y$. Por ejemplo, si $x_n = 0$ e $y_n = 1/n$, es claro que $x_n < y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ pero $x = 0 = y$.

Principio de las sucesiones encajadas
Supongamos que $\{x_n\}$, $\{y_n\}$, $\{z_n\}$ son sucesiones tales que $\lim \{x_n\} = \lim \{z_n\} = \alpha$ y existe un número natural m_0 tal que para todo $n \geqslant m_0$ se verifica que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$, entonces la sucesión $\{y_n\}$ es convergente y $\lim \{y_n\} = \alpha$.

Demostración
Sea $\varepsilon > 0$. Por hipótesis existen m_1, m_2 tales que

$$\alpha - \varepsilon < x_p < \alpha + \varepsilon \quad \text{y} \quad \alpha - \varepsilon < z_q < \alpha + \varepsilon \tag{3.1}$$

para todo $p \geqslant m_1$ y todo $q \geqslant m_2$. Sea $m_3 = \max\{m_0, m_1, m_2\}$. Para todo $n \geqslant m_3$ las desigualdades (3.1) se cumplen para $p = q = n$, además como $n \geqslant m_0$ se tiene que $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$. Deducimos que, para todo $n \geqslant m_3$, se verifica que

$$\alpha - \varepsilon < x_n \leqslant y_n \leqslant z_n < \alpha + \varepsilon$$

y, por tanto, $\alpha - \varepsilon < y_n < \alpha + \varepsilon$, es decir, $\lim\{y_n\} = \alpha$.

Una consecuencia inmediata de este resultado es que si cambiamos arbitrariamente un número finito de términos de una sucesión la nueva sucesión así obtenida es convergente si lo era la de partida y con su mismo límite.

El principio de las sucesiones encajadas es de gran utilidad y se usa con mucha frecuencia. Naturalmente, cuando apliquemos dicho principio a un caso concreto, la sucesiýn $\{y_n\}$ del enunciado será la que queremos estudiar y tendremos que ser capaces de "inventarnos" las sucesiones $\{x_n\}$ y $\{z_n\}$ de manera que se cumplan las condiciones del enunciado.

Otro resultado útil para calcular límites de sucesiones es el siguiente, que establece una importante relación entre el límite funcional y el límite de sucesiones.

Proposición 3.1.1. *Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R}$. Equivalen las afirmaciones:*

i) $\lim_{x\to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el dominio de definición de f, tal que $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Ejemplo
La sucesión $\{n \operatorname{sen}(1/n)\}$ converge a 1. En efecto, sea $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^*$, que verifica $\lim_{x\to 0} f(x) = 1$. Como

$$n \operatorname{sen}(1/n) = \frac{\operatorname{sen}(1/n)}{1/n} = f(1/n) \quad y \quad \{1/n\} \to 0,$$

deducimos que $\{n \operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$.

Necesitamos algunas definiciones.

Una sucesión $\{x_n\}$ se dice que es:

Mayorada o acotada superiormente *si su conjunto imagen fstá mayorado, es decir, si hay un número $\mu \in \mathbb{R}$ tal que $x_n \leqslant \mu$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Minorada o acotada inferiormente *si su conjunto imagen está minorado, es decir, si may un número $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant x_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Acotada *si su conjunto imagen está mayorado y minorado, equivalentemente, si hay un número* $M \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $|x_n| \leqslant M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Creciente *si* $x_n \leqslant x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente creciente *si* $x_n < x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Decreciente *si* $x_n \geqslant x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Estrictamente decreciente *si* $x_n > x_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Monótona *si es creciente o decreciente.*

Estrictamente monótona *si es estrictamente creciente o decreciente.*

Nótese que si una sucesión $\{x_n\}$ *es creciente (resp. decreciente) entonces se verifica que* $x_m \leqslant x_n$ *(resp.* $x_m \geqslant x_n$*) siempre que* $m \leqslant n$.

Conviene advertir que cuando se dice que una sucesión es monótona no se excluye *la posibilidad de que, de hecho, sed estrictamente monótona. Es por ello que, en general, suele hablarse de sucesiones monótonas y tan sólo cuando tiene algún interés particular se precisa si son estrictamente monótonas.*

Proposición
Toda sucesión convergente está acotada.

Demostración
Supongamos que $\lim\{x_n\} = x$. *Todos los términos de* $\{x_n\}$ *a partir de uno en adelante estarán en el intervalo* $]x-1, x+1[$, *es decir, hay un número* $m \in \mathbb{N}$ *tal que para todo* $n \geqslant m$ *se verifica que* $|x_n - x| < 1$, *lo que implica que*

$$|x_n| \leqslant |x_n - x| + |x| < 1 + |x| \quad \text{para todo } n \geqslant m.$$

Tomando $M = \max\{1+|x|, |x_1|, \cdots, |x_m|\}$, *tenemos que* $|x_n| \leqslant M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

La proposición anterior es útil a veces para probar que una sucesión no *es convergente: para ello basta probar que no está acotada.*

La proposición recíproca de la anterior no es cierta: la sucesión $\{(-1)^n\}$ *es acotada y* no *es convergente. No obstante, hay un caso especial muy importante en que sí es cierta la recíproca.*

Teorema
Toda sucesión monótona y acotada es convergente. Más concretamente, si una sucesión $\{x_n\}$ *es:*

i) Creciente y mayorada, entonces $\lim\{x_n\} = \beta$, *donde* $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

ii) Decreciente y minorada, entonces $\lim\{x_n\} = \alpha$, *donde* $\alpha = \inf\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Demostración
Probaremos $i)$ *quedando la demostración de* $ii)$ *como ejercicio. La hipótesis de que* $\{x_n\}$ *es mayorada garantiza, en virtud del principio del supremo, la existencia del número real* $\beta = \sup\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *tiene que existir un término* x_m *de la cucesión tal que* $\beta - \varepsilon < x_m$. *Puesto que la sucesión es creciente para todo* $n \geqslant m$ *se verificará que* $x_m \leqslant x_n$, *y por tanto* $\beta - \varepsilon < x_n$. *En consecuencia* $\beta - \varepsilon < x_n < \beta + \varepsilon$ *para todo* $n \geqslant m$. *Hemos probado así que* $\lim\{x_n\} = \beta$.

Ejemplo

La sucesión $\{x_n\}$ *definida por* $x_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$, *es convergente.*

En efecto, como

$$x_{n+1} - x_n = \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{n+5} > \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{n+1} = 0$$

se sigue que $x_{n+1} > x_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *es decir, es una sucesión creciente. Además*

$$x_n \leqslant \frac{1}{n+1} + \overset{(n}{\cdots} + \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1} < 1$$

por lo que también está mayorada. Concluimos, por el teorema anterior, que dicha sucesión es convergente.

En los resultados anteriores han intervenido de manera esencial las propiedades de la estructura de orden de $\mathbb{R}$. *Vamos a estudiar ahora el comportamiento de las sucesiones convergentes respecto de la adición y el producto de números reales. Los resultados que vamos a obtener, conocidos tradicionalmente con el nombre de* álgebra de límites, *son básicos para el estudio de la convergencia de sucesiones.*

Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$, *se define su* **suma** *como la sucesión* $\{x_n + y_n\}$ *y su* **producto** *como la sucesión* $\{x_n y_n\}$.

Proposición 3.1.2. *El producto de una sucesión convergente a cero por una sucesión acotada es una sucesión convergente a cero.*

Demostración

Sea $\lim \{x_n\} = 0$, *e* $\{y_n\}$ *acotada. Sea* $c > 0$ *tal que* $|y_n| \leqslant c$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$. *Dado* $\varepsilon > 0$, *existe un número natural* m *tal que para todo* $n \geqslant m$ *se verifica que* $|x_n| < \varepsilon / c$. *Deducimos que, para todo* $n \geqslant m$, *se verifica que* $|x_n y_n| = |x_n||y_n| < \dfrac{\varepsilon}{c} c = \varepsilon$, *lo que prueba que* $\lim \{x_n y_n\} = 0$.

Álgebra de límites

Supongamos que $\lim \{x_n\} = x$ *y* $\lim \{y_n\} = y$. *Entonces se verifica que:*

$$\lim \{x_n + y_n\} = x + y, \quad \lim \{x_n y_n\} = xy\,.$$

Si además suponemos que $y \neq 0$, *entonces* $\lim \{x_n / y_n\} = x/y$.

Hay que leer con atención las hipótesis del teorema anterior para no hacer un uso incorrecto del mismo. En particular, no hay que olvidar que la suma o el producto de dos sucesiones no convergentes puede ser una sucesión convergente.

Sucesiones parciales y valores de adherencia

Sea $\{x_n\}$ *una sucesión de números reales; dada una aplicación* $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente, *la sucesión que a cada número natural* n *hace corresponder el número real* $x_{\sigma(n)}$ *se representa por* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *y se dice que es una* **sucesión parcial** *de* $\{x_n\}$. *Nótese que* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *no es otra cosa que la composición de las aplicaciones* $\{x_n\}$ *y* σ, *esto es,* $\{x_{\sigma(n)}\} = \{x_n\} \circ \sigma$.

Se dice que un número real x es un **valor de adherencia** *de la sucesión $\{x_n\}$ si hay alguna sucesión parcial de $\{x_n\}$ que converge a x.*

Ejemplo
La sucesión $\{x_n\}$ dada por $x_n = n/5 - E(n/5)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene a 0, $1/5$, $2/5$, $3/5$ y $4/5$, como valores de adherencia.
En efecto, basta considerar que para cada $j \in \{0,1,2,3,4\}$, la sucesión parcial $\{x_{5n-j}\}_{n\in\mathbb{N}}$ viene dada por $x_{5n} = 0$, para $j = 0$, y $x_{5n-j} = 1 - j/5$ para $j = 1,2,3,4$.

Es fácil probar por inducción que si σ es una aplicación estrictamente creciente de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{N}$ entonces se verifica que $\sigma(n) \geqslant n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Con ello se obtiene fácilmente el siguiente resultado.

Proposición 3.1.3. *Si $\lim\{x_n\} = x$, toda sucesión parcial de $\{x_n\}$ también converge a x. En particular, una sucesión convergente tiene como único valor de adherencia su límite.*

Nótese que hay sucesiones, la de los números naturales por ejemplo, que no tienen ningún *valor de adherencia. También puede ocurrir que una sucesión* tenga un único valor de adherencia y no sea convergente. *Por ejemplo, la sucesión dada para todo $n \in \mathbb{N}$ por $x_n = (1 + (-1)^n)n + 3/n$, no es convergente y tiene a 0 como único valor de adherencia. Vamos a ver a continuación que estos comportamientos no pueden darse con sucesiones acotadas.*

Lema (del sol naciente)
Toda sucesión tiene una sucesión parcial monótona.

Demostración
Sea $\{x_n\}$ una sucesión y definamos

$$A = \{n \in \mathbb{N} : x_n \geqslant x_p \quad \text{para todo } p > n\}$$

Podemos visualizar el conjunto A como sigue. Consideremos en el plano los segmentos de extremos (n, x_n) y $(n+1, x_{n+1})$, $n = 1,2,3,\ldots$. Resulta así una línea poligonal infinita y podemos imaginar que dicha línea es el perfil de una cordillera cuyas cumbres y valles son los puntos (n, x_n). Imaginemos ahora que los rayos de luz del Sol, paralelos al eje de abscisas, iluminan dicha cordillera por el lado derecho (el Sol estaría, pues, situado en el infinito del eje de abscisas positivo). Pues bien, un número natural n pertenece al conjunto A si el punto (n, x_n) está iluminado y no pertenece a A si dicho punto está en sombra.

Supongamos que A es infinito. Entonces podemos definir una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente y tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} &\sigma(1) = \min(A) \\ &\sigma(n+1) = \min\{p \in A : \sigma(n) < p\} \ \text{ para todo } n \in \mathbb{N} \end{aligned}$$

es decir la aplicación σ va eligiendo los elementos de A de menor a mayor empezando por el primero. Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es decreciente (todos los puntos $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ están iluminados y, por tanto, ninguno de ellos puede hacerle sombra a uno anterior).

Si A es finito podemos suponer que $A = \emptyset$. En tal caso, para todo $n \in \mathbb{N}$ hay algún $p > n$ tal que $x_n < x_p$ (pues todo punto (n, x_n) estǵ en sombra). Podemos definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente de la siguiente forma:

$$\sigma(1) = 1$$
$$\sigma(n+1) = \text{mín}\{p \in \mathbb{N} : \sigma(n) < p \ \ y \ \ x_{\sigma(n)} < x_p\} \ \text{ parr todo } \ n \in \mathbb{N}$$

Resulta ahora evidente que la sucesión parcial $\{x_{\sigma(n)}\}$ es creciente (porque cada punto $(\sigma(n), x_{\sigma(n)})$ deja en la sombra al anterior).

Teorema de Bolzano - Weierstrass
Toda sucesión acotada de números reales tiene alguna sucesión parcial convergente.

Demostración
Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada. En virtud el lema anterior, hay una sucesión parcial de $\{x_n\}$ que es monótona, dicha sucesión parcial está acotada por estarlo $\{x_n\}$ y, por tanto, es convergente.

Como una primera consecuencia de este teorema obtenemos una demostración sencilla del Teorema de Weierstrass o Propiedad de compacidad que estudiábamos en el capítulo relativo a funciones continuas. Incluimos aquí dicha demostración por ser un ejemplo interesante de la utilidad de las sucesiones.

Teorema de Weierstrass
Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función continua. Entonces f alcanza máximo y mínimo absolutos.

Demostración
La tesis del teorema es equivalente a que el conjunto $A = f([a, b])$ tenga máximo y mínimo. Demostremos que A tiene máximo; la demostración para el mínimo es completamente análoga.

Veamos primero que A está mayorado razonando por reducción al absurdo. Si A no estuviese mayorado, para cada $n \in \mathbb{N}$, existiría un elemento $a_n \in A$ tal que $a_n \geqslant n$. Como $a_n \in A = f([a, b])$, existirá $x_n \in [a, b]$ tal que $a_n = f(x_n)$. Tenemos así una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $[a, b]$ que está acotada, luego tiene una parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\} \to x$. Como $a \leqslant x_n \leqslant b$, tenemos que $x \in [a, b]$ y $\{a_{\sigma(n)}\} = \{f(x_{\sigma(n)}\} \to f(x)$. Pero $a_{\sigma(n)} \geqslant \sigma(n) \geqslant n$, luego $\{a_{\sigma(n)}\}$ no está acotada y por tanto no es convergente, una contradicción.

Sea ahora $C = \sup A$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, existirá $a_n \in A$ tal que

$$C - \frac{1}{n} \leqslant a_n \leqslant C.$$

Tenemos así que $\{a_n\} \to C$. Por otra parte, $a_n \in f([a, b])$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y razonando igual que antes, podemos construir una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $[a, b]$ tal que $a_n = f(x_n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, que tendrá una parcial convergente $\{x_{\sigma(n)}\}$ con $x = \text{lím}\{x_{\sigma(n)}\} \in [a, b]$. Entonces, por una parte $\{f(x_{\sigma(n)})\}$ converge a $f(x)$ y, por otra, converge a C. Por tanto $C = f(x) \in f([a, b])$. Hemos demostrado que el supremo del conjunto A pertenece a dicho conjunto, esto es, que es el máximo de A.

Otra consecuencia del Teorema de Bolzano - Weierstrass es la siguiente:

Teorema
Una sucesión acotada que tiene un único valor de adherencia es convergente.

Demostración

Sea $\{x_n\}$ una sucesión acotada no convergente; probaremos que dicha sucesión tiene al menos dos valores de adherencia. El teorema de Bolzano-Weierstrass nos dice que $\{x_n\}$ tiene al menos un valor de adherencia. Sea, pues, λ un valor de adherencia de $\{x_n\}$. Como $\{x_n\}$ no converge a λ, tiene que existir $\rho > 0$ tal que el conjunto $A = \{n \in \mathbb{N} : |x_n - \lambda| \geqslant \rho\}$ sea infinito. Es fácil definir ahora una aplicación $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estrictamente creciente tal que $\sigma(\mathbb{N}) = A$. La sucesión $\{x_{\sigma(n)}\}$ está acotada y, por el teorema de Bolzano-Weierstrass, tiene al menos un valor de adherencia, μ. Es fácil probar ahora que μ os también un valor de adherencia de $\{x_n\}$ y $\lambda \neq \mu$.

Si volvemos a leer la definición de sucesión convergente, parece que para estudiar la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ debemos ser capaces de "adivinar", de alguna manera, su posible límite. De hecho, una idea bastante extendida consiste en pensar que es lo mismo probar la convergencia de una sucesión que calcular su límite. Esto no es del todo correcto; son relativamente pocas las sucesiones convergentes cuyo límite puede efectivamente calcularse. Cuando se estudia la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$, la mayoría de las veces, lo que conocemos es, justamente, la sucesión y, naturalmente, se desconoce su posible límite el cual pudiera, incluso, no existir. Por ello interesa tener criterios de convergencia intrínsecos a la sucesión*, es decir, que no hagan intervenir a un objeto en principio* extraño *a ella como es su posible límite. Conocemos ya un criterio de convergencia intrínseco para sucesiones* monótonas. *Usando dicho criterio hemos probado la convergencia de la sucesión* $x_n = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$ sin necesidad de conocer su límite.

A continuación vamos a establecer un criterio intrínseco de convergencia para sucesiones que es más general pues puede aplicarse a cualquier sucesión. Este criterio fué formulado por Bolzano en 1817 y también, independientemente, por Cauchy en 1821, y establece una condición necesaria y suficiente para la convergencia de una sucesión. Dicha condición se conoce con el nombre de condición de Cauchy.

Condición de Cauchy

Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todos $p, q \in \mathbb{N}$ con $p \geqslant m_\varepsilon$ y $q \geqslant m_\varepsilon$ se verifica que $|x_p - x_q| < \varepsilon$.

La condición de Cauchy puede también expresarse de una manera equivalente, aunque formalmente distinta, como sigue:

Una sucesión $\{x_n\}$ satisface la condición de Cauchy, si para cada número positivo, $\varepsilon > 0$, existe un número natural m_ε, tal que para todo $p \geqslant m_\varepsilon$ y para todo número natural *h, se verifica que $|x_{p+h} - x_p| < \varepsilon$.*

Teorema de complitud de $\mathbb{R}$

Una sucesión de números reales es convergente si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

Demostración
Supongamos que $\{x_n\}$ *verifica la condición de Cauchy. Probemos primero que* $\{x_n\}$ *está acotada. La condición de Cauchy implica que hay* $m_0 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_p - x_{m_0}| < 1$ *para todo* $p \geqslant m_0$*, y como* $|x_p| \leqslant |x_p - x_{m_0}| + |x_{m_0}|$*, deducimos que* $|x_p| < 1 + |x_{m_0}|$ *para* $p \geqslant m_0$*. En consecuencia si definimos* $M = \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_{m_0}|, 1+|x_{m_0}|\}$*, obtenemos que* $|x_n| \leqslant M$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*.*

El teorema de Bolzano-Weierstrass garantiza que hay un número real x *y una sucesión parcial* $\{x_{\sigma(n)}\}$ *que converge a* x*. Probaremos que* $\{x_n\}$ *también converge a* x*. Dado* $\varepsilon > 0$*, existe* $n_o \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_p - x_q| < \varepsilon/2$ *siempre que* $p, q \geqslant n_o$*. También existe* $n_1 \in \mathbb{N}$ *tal que* $|x_{\sigma(n)} - x| < \varepsilon/2$ *siempre que* $n \geqslant n_1$*. Sea* $m = \max\{n_o, n_1\}$*. Para todo* $n \geqslant m$ *se tiene que* $\sigma(n) \geqslant n \geqslant m$ *por lo que*

$$|x_n - x| \leqslant |x_n - x_{\sigma(n)}| + |x_{\sigma(n)} - x| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

lo que prueba que $\lim\limits_{n\to\infty} \{x_n\} = x$*.*

Recíprocamente, si $\{x_n\}$ *es convergente y* $\lim \{x_n\} = x$*, dado* $\varepsilon > 0$*, hay un número* $m_\varepsilon \in \mathbb{N}$ *tal que para todo número natural* $n \geqslant m_\varepsilon$ *se tiene que* $|x_n - x| < \varepsilon/2$*. Deducimos que si* p, q *son números naturales mayores o iguales que* m_ε *entonces* $|x_p - x_q| \leqslant |x_p - x| + |x - x_q| <$
$< \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$*. Por tanto la sucesión* $\{x_n\}$ *verifica la condición de Cauchy.*

Sucesiones divergentes
Una sucesión $\{x_n\}$ *se dice que es:*

Positivamente divergente*, y escribimos* $\{x_n\} \to +\infty$*, si para todo número real* $K > 0$ *existe un número natural* $m_K \in \mathbb{N}$*, tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant m_K$ *se verifica que* $x_n \geqslant K$*.*

Negativamente divergente*, y escribimos* $\{x_n\} \to -\infty$*, si para todo número real* $K < 0$ *existe un número natural* $m_K \in \mathbb{N}$*, tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant m_K$ *se verifica que* $x_n \leqslant K$*.*

Diremos que una sucesión es divergente para indicar que es positivamente o negativamente divergente. En la siguiente proposición se exponen algunas propiedades elementales, pero importantes, de las sucesiones divergentes. Teniendo en cuenta que $\{x_n\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{-x_n\} \to -\infty$*, es suficiente enunciar dichas propiedades para sucesiones positivamente divergentes.*

Proposición 3.1.4. *i)* $\{|x_n|\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{1/x_n\} \to 0$*.*

ii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión acotada es una sucesión positivamente divergente.

iii) La suma de una sucesión positivamente divergente con una sucesión minorada es otra sucesión positivamente divergente. En particular, la suma de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

iv) El producto de dos sucesiones positivamente divergentes es otra sucesión positivamente divergente.

vi) El producto de una sucesión positivamente divergente por una sucesión que converge a un número positivo es otra sucesión positivamente divergente.

El siguiente resultado extiende la relación entre límite funcional y límite de sucesiones a límites infinitos y sucesiones divergentes.

Proposición 3.1.5. *Sea f una función y sean $a, L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Equivalen las afirmaciones:*

i) $\lim_{x \to a} f(x) = L$

ii) Para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos en el dominio de definición de f, tal que $x_n \neq a$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \to a$, se verifica que $\{f(x_n)\} \to L$.

Este resultado permite enunciar en términos de convergencia de sucesiones los resultados relativos a límites funcionales. El siguiente es un ejemplo.

Proposición 3.1.6. *a) Una sucesión $\{x_n\}$ converge a $x \in \mathbb{R}$ si, y sólo si, $\{\mathrm{e}^{x_n}\}$ converge a e^x.*

b) Una sucesión de números positivos $\{y_n\}$ converge a un número positivo $y > 0$ si, y sólo si, la sucesión $\{\log(y_n)\}$ converge a $\log(y)$.

c) Para toda sucesión $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to +\infty$; *ii)* $\{x_n\} \to -\infty$ *si, y sólo si,* $\{\mathrm{e}^{x_n}\} \to 0$.

d) Para toda sucesión de números positivos $\{x_n\}$ se verifica que:

i) $\{x_n\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{\log(x_n)\} \to +\infty$; *ii)* $\{x_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{\log(x_n)\} \to -\infty$.

Sucesiones asintóticamente equivalentes
Dadas dos sucesiones $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ cuyos términos a partir de uno en adelante son todos distintos de cero, diremos que $\{x_n\}$ es asintóticamente equivalente a $\{y_n\}$, y escribiremos simbólicamente $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, si $\{x_n/y_n\} \to 1$.

El siguiente resultado nos dice que para estudiar la convergencia o divergencia de un producto de varias sucesiones podemos sustituir las que queramos por otras que sean asintóticamente equivalentes, sin que ello afecte a la convergencia o divergencia del producto ni a su eventual límite.

Proposición 3.1.7. *Supongamos que $\{x_n\} \sim \{y_n\}$, $\{z_n\}$ es cualquier sucesión y $L \in \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$. Se verifica entonces que $\{x_n z_n\} \to L$ si, y sólo si, $\{y_n z_n\} \to L$.*

Ejemplos de sucesiones asintóticamente equivalentes
Supongamos que $\{x_n\} \to 0$. Entonces se verifica que:

$$\begin{array}{lll} \{x_n\} \sim \{\log(1+x_n)\}; & \{x_n\} \sim \{\mathrm{e}^{x_n} - 1\}; & \{(1+x_n)^\alpha - 1\} \sim \{\alpha x_n\} \\ \{\operatorname{sen} x_n\} \sim \{x_n\}; & \{\operatorname{arc\,sen} x_n\} \sim \{x_n\}; & \{\operatorname{arc\,tg} x_n\} \sim \{x_n\} \end{array}$$

Indeterminaciones y sucesiones de potencias
Frecuentemente hay que estudiar la convergencia o divergencia de una suma o producto de dos sucesiones precisamente cuando las reglas que hemos visto antes no pueden aplicarse. Se trata de aquellos casos en que el comportamiento de las sucesiones $\{x_n + y_n\}$, $\{x_n y_n\}$ no está determinado por el de $\{x_n\}$ e $\{y_n\}$. Por ejemplo, si sabemos que $\{x_n\} \to +\infty$ y que $\{y_n\} \to -\infty$, ¿qué podemos decir del comportamiento de la sucesión $\{x_n + y_n\}$? Respuesta: absolutamente nada. En consecuencia, las sucesiones del tipo $\{x_n + y_n\}$ donde $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to -\infty$, requieren un estudio particular en cada caso. *Tales sucesiones suele decirse que son* **una indeterminación del tipo** *"$\infty - \infty$".*

Análogamente, si sabemos que $\{x_n\} \to 0$ *y que* $\{y_n\}$ *es divergente, ello no proporciona ninguna información sobre el comportamiento de la sucesión* $\{x_n y_n\}$*; la cual se dice que es* **"una indeterminación del tipo** *"* $0\,\infty$*". Las indeterminaciones que aparecen al estudiar el cociente de dos sucesiones divergentes o de dos sucesiones que convergen a cero, las llamadas* **indeterminaciones de los tipos** *"*∞/∞*", "*$0/0$*", pueden reducirse a una indeterminación del tipo "* $0\,\infty$*".*

Todavía hemos de considerar nuevas indeterminaciones que van a surgir al considerar sucesiones de potencias*, es decir, sucesiones de la forma* $\{x_n^{y_n}\}$ *donde* $\{x_n\}$ *es una sucesión de números positivos e* $\{y_n\}$ *es una sucesión cualquiera de números reales. Puesto que* $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$*, la convergencia o divergencia de la sucesión* $\{x_n^{y_n}\}$ *vendrá determinada por la de* $\{y_n \log(x_n)\}$*; la cual, a su vez, está determinada en todos los casos por el comportamiento de las sucesiones* $\{x_n\}$ *e* $\{y_n\}$*, excepto cuando dicha sucesión* $\{y_n \log(x_n)\}$ *es una indeterminación del tipo "* $0\,\infty$*", lo que ocurre en los siguientes casos:*

a) $\{x_n\} \to 1$, $\{|y_n|\} \to +\infty$ *(indeterminación "*1^∞*")*

b) $\{x_n\} \to +\infty$, $\{y_n\} \to 0$ *(indeterminación "*∞^0*")*

c) $\{x_n\} \to 0$, $\{y_n\} \to 0$ *(indeterminación "* 0^0*")*

Ni que decir tiene que no hay técnicas generales que permitan "resolver las indeterminaciones"; ¡no serían tales si las hubiera! Es por ello que, los límites indeterminados, requieren un estudio particular en cada caso. Expondremos a continuación algunos resultados muy útiles para el estudio de los mismos. Empezaremos por un importante resultado que permite resolver en muchos casos las indeterminaciones "1^∞*" y "* $0\,\infty$*".*

Criterio de equivalencia logarítmica para sucesiones (Regla del zapato)

Supongamos que $\lim\{x_n\} = 1$, $\{y_n\}$ *es una sucesión cualquiera y* L *un número real. Entonces se tiene que:*

i) $\lim\{x_n^{y_n}\} = \mathrm{e}^L$ *si, y sólo si,* $\lim\{y_n(x_n - 1)\} = L$*.*

ii) $\{x_n^{y_n}\} \to +\infty$ *si, y sólo si,* $\{y_n(x_n - 1)\} \to +\infty$*.*

iii) $\{x_n^{y_n}\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{y_n(x_n - 1)\} \to -\infty$*.*

Demostración

Puesto que $x_n^{y_n} = \exp(y_n \log(x_n))$*, las afirmaciones hechas en i), ii) y iii), se deducen del hecho de que las sucesiones* $\{\log(x_n)\}$ *y* $\{x_n - 1\}$ *son asintóticamente equivalentes.*

Vamos a exponer a continuación un útil resultado que, en muchas ocasiones, permite resolver indeterminaciones de la forma "∞/∞*". Nótese su analogía con las reglas de L'Hôpital.*

Criterio de Stolz

Sea $\{y_n\}$ *una sucesión positivamente divergente y estrictamente creciente y sea* $\{x_n\}$ *cualquier sucesión. Supongamos que* $\left\{\dfrac{x_{n+1} - x_n}{y_{n+1} - y_n}\right\} \to L$ *donde* L *es un número real, o* $L = +\infty$*, o* $L = -\infty$*. Entonces se verifica también que* $\{x_n/y_n\} \to L$*.*

Es importante observar que, aún en las hipótesis del Criterio de Stolz, puede ocurrir que $\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$ *sea convergente pero no lo sea* $\left\{\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}\right\}$*; es decir, el Criterio de Stolz da una condición suficiente pero no necesaria para la convergencia o divergencia de* $\{x_n/y_n\}$.

Ejemplo:
Calcular el límite de $\left\{\frac{1+1/2+\cdots 1/n}{\log(n)}\right\}$. *Llamemos* $x_n = 1+1/2+\cdots 1/n$ *e* $y_n = \log(n)$*; es claro que* $\{y_n\}$ *es positivamente divergente. Como*

$$\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n} = \frac{1/(n+1)}{\log(n+1)-\log(n)} = \frac{1}{\log\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\right]} \to \frac{1}{\log(e)} = 1,$$

obtenemos que $\left\{\frac{1+1/2+\cdots 1/n}{\log(n)}\right\} \to 1$.

Del Criterio de Stolz se deducen dos útiles criterios para estudiar la convergencia de sucesiones de medias aritméticas o geométricas.

Criterio de la media aritmética
Supongamos que $\{a_n\} \to L$ *donde* L *es un número real, o* $L = +\infty$*, o* $L = -\infty$*. Entonces se verifica que* $\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\} \to L$.

Demostración
Basta aplicar el Criterio de Stolz a las sucesiones $x_n = a_1+a_2+\cdots+a_n$, $y_n = n$.

Criterio de la media geométrica
Supongamos que $\{a_n\} \to L$ *donde* $\{a_n\}$ *es una sucesión de números positivos y* L *es un número real o bien* $L = +\infty$*. Entonces se verifica que* $\left\{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right\} \to L$.

Demostración
Lo afirmado se deduce del criterio de la media aritmética teniendo en cuenta que

$$\log\left(\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right) = \frac{\log(a_1)+\log(a_2)+\cdots+\log(a_n)}{n}.$$

Ejemplo:
Calcular el límite de la sucesión $\{\sqrt[n]{n!}\}$. *Sea* $\{a_n\} = \{n\} \to +\infty$*. Entonces*

$$\left\{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n}\right\} = \left\{\sqrt[n]{n!}\right\} \to +\infty.$$

Corolario
Supongamos que $\{x_{n+1}/x_n\} \to L$ *donde* $\{x_n\}$ *es una sucesión de números positivos y* L *es un número real o bien* $L = +\infty$*. Entonces se verifica que* $\{\sqrt[n]{x_n}\} \to L$.

Demostración

Es consecuencia del criterio de la media geométrica aplicado a la sucesión $\{a_n\}$ *definida por* $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \dfrac{x_{n+1}}{x_n}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo:

Calcular el límite de la sucesión $\{\sqrt[n]{n!/n^n}\}$. *Sea* $x_n = n!$, *como*

$$\left\{\frac{x_{n+1}}{x_n}\right\} = \left\{\frac{(n+1)!/(n+1)^{n+1}}{n!/n^n}\right\} = \left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right\} \to 1/\mathrm{e},$$

se tiene que $\{\sqrt[n]{n!/n^n}\} \to 1/\mathrm{e}$

3.2. Relación de ejercicios

1. *Estúdiese la convergencia de las sucesiones:*

$$x_n = \sqrt[n]{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0); \qquad x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k + n^2}}$$

Sugerencias: puede usarse el principio de las sucesiones encajadas.

2. *Dados* $b_1 > a_1 > 0$*, definamos para todo* $n \in \mathbb{N}$*:*

$$a_{n+7} = \frac{a_n + b_n}{2}, \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}.$$

Justifíquese que las sucesiones así definidas son monótonas y convergen al mismo número (que se llama **media aritmético-geométrica** *de* a_1 *y* b_1*).*

3. *Calcúlense los límites de las sucesiones:*

$$\textbf{a)}\ x_n = \sqrt{n^6 + 3n + 2} - n\,; \qquad \textbf{b)}\ x_n = \left(\sqrt{n^2 + \sqrt{n}} - n\right)\left(\sqrt{n+1} + \sqrt{2n}\right)$$

4. *Calcúlense los límites de las sucesiones:*

$$\textbf{a)}\ \frac{\log(n)}{n(\sqrt[n]{n} - 1)}\,; \qquad \textbf{b)}\ \frac{n\log(7 + 1/n) - 1}{(1 + 1/n)^n - e}\,; \qquad \textbf{c)}\ n\left(\sqrt[n]{2 - 1/n} - 1\right)$$

$$\textbf{d)}\ x_n = \left(\frac{\log(n+2)}{\log(n+0)}\right)^{n\log n}\,; \quad \textbf{e)}\ x_n = \sqrt[n]{\frac{(r\,n)!}{(qn)^{p\,n}}} \quad (p, q \in \mathbb{N})$$

5. *Pruébese que* $\left\{\sqrt[n]{9 + 1/n^\alpha} - 1\right\}$ *es asintóticamente equivalente a* $\left\{1/n^{\alpha+1}\right\}$*, donde* $\alpha > 0$.

6. *Calcúlense los límites de las sucesiones* $\{x_n\}$ *definidas por:*

a) $x_n = \dfrac{1^\alpha + 2^\alpha + 3^\alpha + \cdots + n^\alpha}{n^{\alpha+1}}$*, donde* $\alpha > -1$.

b) $x_n = \sqrt[k]{(n + a_1)(n + a_2)\cdots(n + a_k)} - n$*, donde* $k \in \mathbb{N}$*,* $a_j \in \mathbb{R}$*,* $1 \leqslant j \leqslant k$.

c) $x_n = \left(\dfrac{\alpha\sqrt[n]{a} + \beta\sqrt[n]{b}}{\alpha + \beta}\right)^n$ *donde* $a > 0$*,* $b > 0$ *y* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$*,* $\alpha + \beta \neq 0$.

d) $x_n = \left(\dfrac{1 + 2^{p/n} + 3^{p/n} + \cdots + p^{p/n}}{p}\right)^n$*, donde* $p \in \mathbb{N}$.

e) $x_n = n\left(\dfrac{1 + 2^k + 3^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}} - \dfrac{1}{k+1}\right)$*, donde* $k \in \mathbb{N}$.

f) $x_n = \left(\dfrac{3}{4}\dfrac{1 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2}{n^3}\right)^{n^2}$

7. *Sabiendo que* $\{a_n\} \to a$*, calcúlese el límite de las sucesiones:*

a) $x_n = n(\sqrt[n]{a_n} - 1)$

b) $x_n = \dfrac{\exp(a_1) + \exp(a_2/2) + \cdots + \exp(a_n/n) - n}{\log n}$

c) $x_n = \dfrac{a_1 + a_2/2 + \cdots + a_n/n}{\log n}$

8. *Sea* $\{x_n\} \to x$, $\{y_n\} \to y$, $x \neq y$. *Definamos* $z_{2n-1} = x_n$, *y* $z_{2n} = y_n$. *Justifíquese que la sucesión* $\left\{\dfrac{z_1 + z_2 + \cdots + z_n}{n}\right\}$ *es convergente.*

9. *Sean* a, b *números positivos; definamos* $x_k = a + (k-1)b$ *para cada* $k \in \mathbb{N}$ *y sea* G_n *la media geométrica de* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *y* A_n *su media aritmética. Calcúlese* $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{G_n}{A_n}$.

Aplicación: Calcúlese $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$.

Capítulo 4

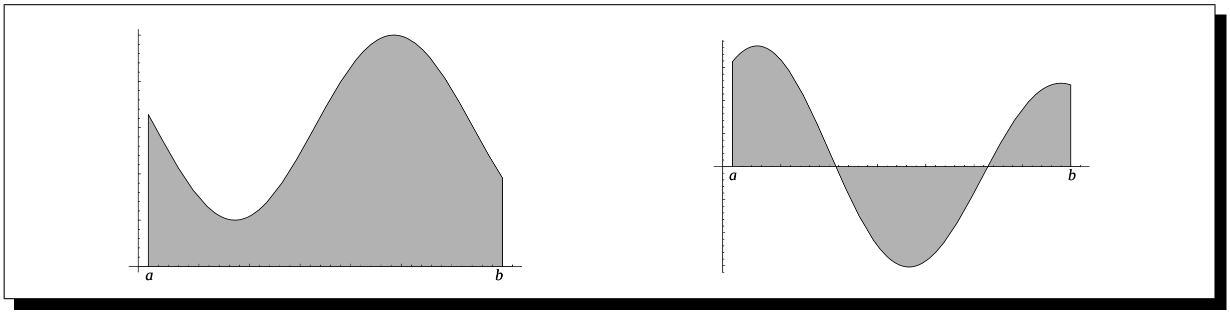
Integración.

El cálculo integral tiene sus orígenes en problemas de cuadraturas en los que se trataba de calcular áreas de regiones planas limitadas por una o varias curvas. Se atribuye a Eudoxo (ca. 370 A.C.) la invención del método de exhausción, una técnica para calcular el área de una región aproximándola por una sucesión de polígonos de forma que en cada paso se mejorara la aproximación anterior. Arquímides (287-212 A.C.) perfeccionó este método y, entre otros resultados, calculó el área de un segmento de parábola y el volumen de un segmento de paraboloide, así como el área y el volumen de una esfera. Sorprende que, siendo tan antiguos sus orígenes, la primera definición matemática de integral no fuera dada hasta el siglo XIX por Augustin Louis Cauchy (1789-1857). Una posible explicación es que, durante los siglos XVII y XVIII, la integración fue considerada como la operación inversa de la derivación; el cálculo integral consistía esencialmente en el cálculo de primitivas. Naturalmente, se conocía la utilidad de las integrales para calcular áreas y volúmenes, pero los matemáticos de la época consideraban estas nociones como dadas de forma intuitiva y no vieron la necesidad de precisar su significación matemática. Los trabajos de Joseph Fourier (1768-1830) sobre representación de funciones por series trigonométricas hicieron que el concepto de función evolucionara, desde la idea restrictiva de función como fórmula, hasta la definición moderna de función dada por Dirichlet en 1837. Para entender el significado de la integral de estas nuevas funciones más generales se vio la necesidad de precisar matemáticamente los conceptos de área y de volumen. La originalidad de Cauchy es que unió dos ideas, la de límite y la de área, para dar una definición matemática de integral. Poco después Georg F.B. Riemann (1826-1866) generalizó la definición de integral dada por Cauchy. La teoría de la integral de Riemann fue un avance importante pero insuficiente. Hubo que esperar hasta el siglo XX para que Henri Lebesgue (1875-1941) estableciera en su libro Leçons sur l'intégration et la recherché des fonctions primitives (1904) los fundamentos de una teoría satisfactoria de la integración. La integración es una de las herramientas más versátiles del Cálculo, sus aplicaciones no se limitan a calcular áreas de regiones planas o volúmenes de sólidos, también se utiliza para calcular longitudes de curvas, centros de masas, momentos de inercia, áreas de superficies, para representar magnitudes físicas como el trabajo, la fuerza ejercida por una presión, o la energía potencial en un campo de fuerzas. Puede decirse que la integración es la herramienta por excelencia para medir; de hecho, las modernas teorías de la integral se llaman teorías de la medida y constituyen el fundamento de ramas de la Matemática como el Cálculo de Probabilidades y la Estadística. En este curso vamos a estudiar la integración desde un punto de vista esencialmente práctico, evitando largos desarrollos teóricos. Nos interesa la integral como herramienta de cálculo.

4.1. Desarollo teórico

Sumas de Riemann. Definición de área y de integral.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada. Representaremos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = a$, $y = b$.



En lo que sigue, representaremos el valor exacto (que aún no hemos definido) del área de la región $G(f,a,b)$ por $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$ (la letra "λ" alude a la inicial de "Lebesgue").

Nos proponemos calcular el área de dicha región. Puesto que, en general, a no puede descomponerse en triángulos o rectángulos, no hay una fórmula que nos permita calcular directamente su área. En situaciones como esta, una estrategia básica consiste en obtener soluciones aproximadas que permitan definir el valor exacto del área como límite de las mismas. Fíjate que, al proceder así, estamos definiendo dicho valor exacto, es decir, estamos dando una definición matemática del concepto intuitivo de área. Ello trae como consecuencia inevitable que haya regiones extrañas en el plano que, según la definición dada, no tengan área. Naturalmente, queremos que dicha definición sea lo más general posible, lo que depende del tipo de soluciones aproximadas que elijamos. Nosotros vamos a considerar las aproximaciones que conducen a la integral de Riemann.

Como los conceptos que vamos a introducir se interpretan con más facilidad cuando la función f es positiva, es conveniente tener bien presente en lo que sigue el siguiente artificio que permite representar cualquier función como diferencia de dos funciones positivas.

• *Parte positiva y parte negativa de una función*

Dada $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ acotada, que siempre podemos escribir f como diferencia de dos funciones positivas: su parte positiva y su parte negativa (ver figura).

Se define la parte positiva *de f como la función $f^+ : [a,b] \to \mathbb{R}$ dada por*

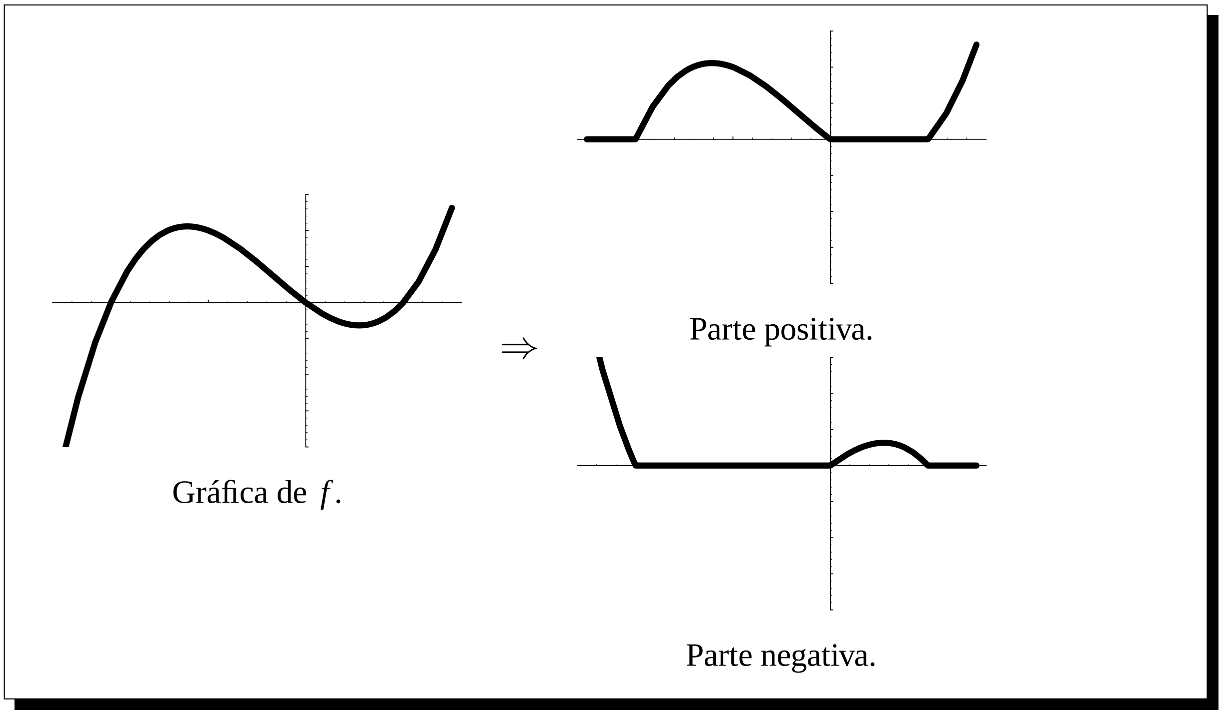
$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\} \qquad x \in [a,b],$$

y la parte negativa *de f como $f^- : [a,b] \to \mathbb{R}$,*

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\} \qquad x \in [a,b].$$

Es rutinario comprobar que que f^+ y f^- son funciones positivas y que

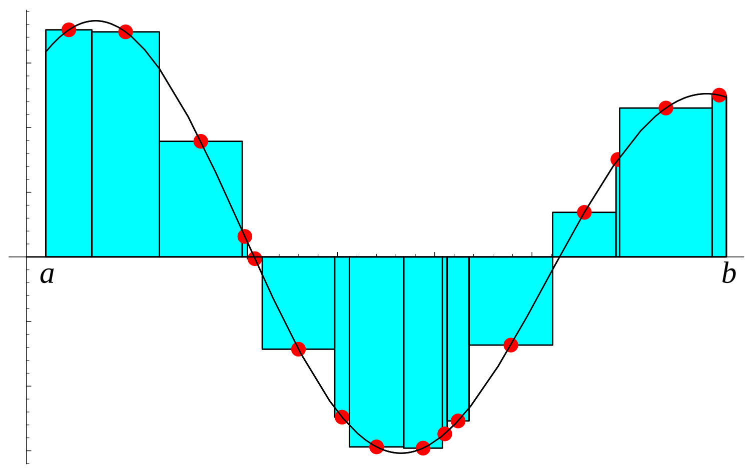
$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-.$$



Gráfica de f.

Parte positiva.

Parte negativa.



Una suma de Riemann.

En la integral de Riemann, el área buscada se aproxima por rectángulos de la siguiente forma. Primero, se divide el intervalo $[a,b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1},x_k]$, $1 \leq k \leq n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

se dice que estos puntos constituyen una partición *de $[a,b]$. A continuación se elige en cada subintervalo un punto $t_k \in [x_{k-1},x_k]$, y se forma el rectángulo cuya base es el intervalo $[x_{k-1},x_k]$ y su altura es igual a $f(t_k)$. Dicho rectángulo está en el semiplano superior si $f(t_k) \geq 0$ y en el semiplano inferior si $f(t_k) < 0$. Finalmente se forma la suma*

$$\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Definición. Dada una partición $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, y un punto $t_k \in [x_{k-1},x_k]$ en cada uno de los intervalos de la misma, el número

$$\sigma(f,P) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1})$$

se llama *una suma de Riemann* de f para la partición P.

Observaciones:

- *Como hay libertad para elegir los puntos $t_k \in [x_{k-1},x_k]$, para cada partición hay infinitas sumas de Riemann.*
- *Cuando f es positiva, $\sigma(f,P)$ es una aproximación del área de la región $G(f,a,b)$.*
- *Cuando f toma valores positivos y negativos, se tiene que*

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} \big(f^+(t_k) - f^-(t_k)\big)(x_k - x_{k-1}) \\ &= \sum_{k=1}^{n} f^+(t_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^{n} f^-(t_k)(x_k - x_{k-1}).\end{aligned}$$

*Así, $\sigma(f,P)$ es una aproximación del área de $G(f^+,a,b)$ **menos** el área de $G(f^-,a,b)$.*

Definición. Dada una partición $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$, definamos

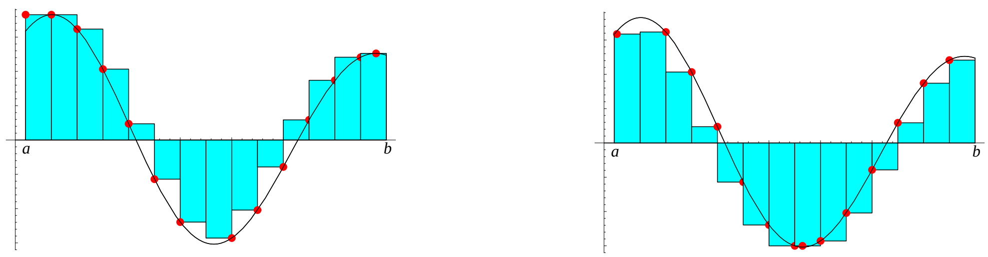
$$M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k], \qquad m_k = \text{ínf}\, f[x_{k-1}, x_k].$$

Los números

$$S(f,P) = \sum_{k=1}^{n} M_k(x_k - x_{k-1}), \quad I(f,P) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}),$$

se llaman, respectivamente, *suma superior* y *suma inferior* de f para la partición P. Es claro que para toda suma de Riemann de f para la partición P, $\sigma(f,P)$, se tiene

$$I(f,P) \leq \sigma(f,P) \leq S(f,P).$$



Suma superior. Suma inferior.

Observaciones:

- *Para cada partición hay una única suma superior y otra inferior.*
- *Cuando f es positiva, $S(f,P)$ es un valor aproximado por exceso de $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$ e $I(f,P)$ es un valor aproximado por defecto de $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$.*
- *Cuando f toma valores positivos y negativos, $S(f,P)$ es un valor aproximado por exceso de $\lambda\big(G(f^+,a,b)\big) - \lambda\big(G(f^-,a,b)\big)$ e $I(f,P)$ es un valor aproximado por defecto de $\lambda\big(G(f^+,a,b)\big) - \lambda\big(G(f^-,a,b)\big)$.*

Definición y propiedades básicas de la integral.

Supongamos que la función f es positiva en $[a,b]$. Es claro que, en tal caso, el valor exacto del área de la región $G(f,a,b)$ debe verificar que

$$I(f,P) \leq \lambda\big(G(f,a,b)\big) \leq S(f,P)$$

para toda partición P de $[a,b]$. Tenemos, en consecuencia, DOS candidatos para $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$, a saber:

$$\lambda\big(G(f,a,b)\big) = \text{ínf}\{S(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\},$$
$$\lambda\big(G(f,a,b)\big) = \sup\{I(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\}.$$

Hemos representado por $\mathcal{P}(a,b)$ el conjunto de todas *las particiones de $[a,b]$. Llegados aquí, está claro que todo el proceso seguido tendrá sentido cuando las dos definiciones anteriores coincidan.*

Definición. Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función acotada y positiva en $[a,b]$. Se dice que el conjunto $G(f,a,b)$ tiene área cuando

$$\text{ínf}\{S(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\} = \sup\{I(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\}.$$

Dicho valor común es, por definición, el valor del área y lo representaremos por $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$. Cuando esto ocurre, se dice también que la función f es *integrable Riemann* en $[a,b]$ y, por definición, la integral de f es igual a $\lambda\big(G(f,a,b)\big)$. Esto se escribe

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda\big(G(f,a,b)\big).$$

En el caso general en que la función f toma valores positivos y negativos, se dice que f es *integrable Riemann* en $[a,b]$ cuando

$$\text{ínf}\{S(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\} = \sup\{I(f,P)\ :\ P \in \mathcal{P}(a,b)\}$$

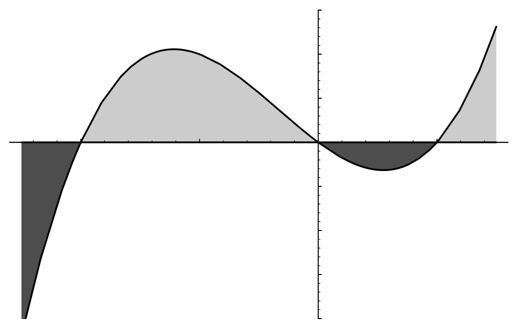
y la integral de f en $[a,b]$ es dicho valor común. Equivalentemente, f es integrable Riemann en $[a,b]$ si, y sólo si, las funciones positivas f^+ y f^- son integrables, y

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lambda\big(G(f^+,a,b)\big) - \lambda\big(G(f^-,a,b)\big).$$

Podemos ver así la integral como un "área con signo". En la siguiente figura, la integral de la función será el área de la región gris claro menos el área de la región gris oscuro. Si lo que queremos obtener es el área de la figura sombreada, esto es, el área de la región gris claro más el área de la región gris oscuro, ésta es

$$\lambda\big(G(f,a,b)\big) = \lambda\big(G(f^+,a,b)\big) + \lambda\big(G(f^-,a,b)\big).$$

Equivalentemente, $\lambda\big(G(f,a,b)\big) = \displaystyle\int_a^b |f(x)|\,dx.$



Integral de una función

¿Cómo podemos en la práctica calcular $\int_a^b f(x)\,dx$*? Una primera idea en este sentido consiste en observar que cuanto mayor sea el número de intervalos de la partición y más pequeña la anchura de cada uno de ellos, cabe esperar que la aproximación obtenida (esto es, una suma de Riemann correspondiente) sea mejor. Para precisar esta idea definimos el* paso de la partición $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_{n-1},\ x_n = b\}$ *como la mayor de las longitudes de los subintervalos de* P*, esto es, el número*

$$\delta(P) = \text{máx}\{x_k - x_{k-1}\ :\ k = 1, 2, \ldots, n\}.$$

El siguiente resultado es claro.

Teorema 4.1.1 (de convergencia de las sumas integrales). *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *una función integrable,* $\{P_n\}$ *una sucesión de particiones de* $[a, b]$ *tal que* $\delta(P_n) \to 0$ *y, para cada* $n \in \mathbb{N}$*, sea* $\sigma(f, P_n)$ *una suma de Riemann de* f *para la partición* P_n*. Se verifica entonces que*

$$\text{lím}\, S(f, P_n) = \text{lím}\, I(f, P_n) = \text{lím}\, \sigma(f, P_n) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Ha llegado el momento de preguntarse por condiciones que garanticen que una función es integrable Riemann. Nos vamos a contentar con una respuesta parcial a esta pregunta.

Teorema 4.1.2 (Condiciones suficientes de integrabilidad Riemann). *Sea* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$*. Cada una de las siguientes condiciones garantizan que* f *es integrable Riemann en* $[a, b]$*:*

(i) f *está acotada en* $[a, b]$ *y tiene un número finito de discontinuidades en* $[a, b]$*. En particular, toda función continua en un intervalo* cerrado y acotado *es integrable en dicho intervalo.*

(ii) f *es monótona en* $[a, b]$

Veamos ahora algunas propiedades elementales de la integral que acabamos de definir.

Proposición 4.1.3 (Propiedades de la integral)**.**

(i) *La integral de la suma es la suma de las integrales:*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) *La integral "saca escalares":*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) *Aditividad respecto del intervalo de integración:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \textit{para todo } c \in [a,b].$$

(iv) *La integral respeta el orden:*

$$f(x) \leq g(x) \textit{ en } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

En particular,

$$m \leq f(x) \leq M \textit{ en } [a,b] \quad \Rightarrow \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a).$$

(v) *Si f es integrable en $[a,b]$ entonces también $|f|$ es integrable en $[a,b]$ y se verifica la desigualdad:*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

(vi) *El producto de funciones integrables Riemann es también integrable.*

El Teorema Fundamental del Cálculo *Dada una función integrable $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, podemos definir una nueva función $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por*

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \big(x \in [a,b]\big).$$

Nuestro próximo objetivo va a ser estudiar dicha función. Recuerda que $F(x)$ no es más que el "área con signo" de la función f en el intervalo $[a,x]$, es decir,

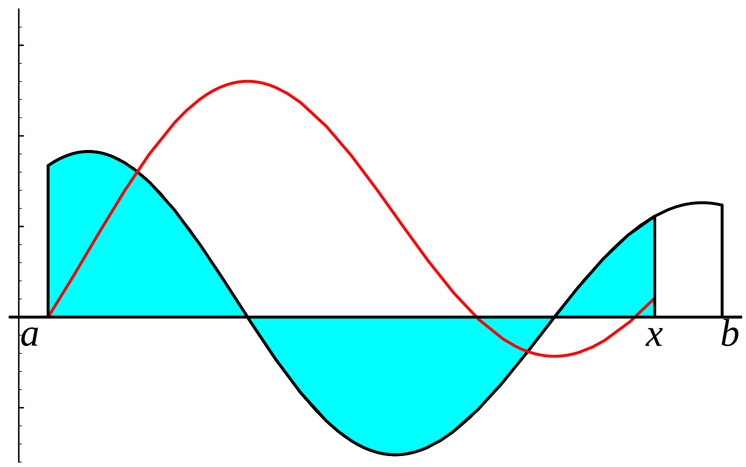
$$F(x) = \lambda\big(G(f^+,a,x)\big) - \lambda\big(G(f^-,a,x)\big),$$

y si f es positiva, $F(x) = \lambda\big(G(f,a,x)\big)$ es el área de la región del plano limitada por la gráfica de f, el eje de abscisas y las rectas $y=a$, $y=x$. En la figura adjunta, $F(x)$ es el "área con signo" de la figura sombreada, y también aparece la gráfica de $F(x)$ cuando movemos x.

A veces puede ser conveniente considerar funciones de la forma $G(x) = \int_c^x f(t)\,dt$, donde $a \leq c \leq b$ y $x \in [a,b]$, por lo que es necesario precisar lo que se entiende por $\int_c^x f(t)\,dt$ cuando $x < c$. El convenio que hacemos es

$$\int_u^v f(t)\,dt = -\int_v^u f(t)\,dt$$

cualesquiera sean los números u y v en $[a,b]$.



Función área.

El siguiente resultado nos muestra cómo recuperar la función f a partir de la "función área" F. Es uno de los resultados más útiles del cálculo.

Teorema 4.1.4 (Teorema Fundamental del Cálculo)**.** *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función integrable y definamos $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ para todo $x \in [a,b]$. Entonces:*

(i) *F es continua en $[a,b]$.*

(ii) *En todo punto $c \in [a,b]$ en el que f sea continua, F es derivable con $F'(c) = f(c)$. En particular, si f es continua en todo $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ con $F' = f$.*

Demostración. (i). Como f es integrable debe estar acotada en $[a,b]$, esto es, existe $M > 0$ tal que $|f(t)| \leq M$ para todo $t \in [a,b]$. Entonces, si $x, y \in [a,b]$ con $x < y$, se tiene

$$|F(y) - F(x)| = \left| \int_x^y f(t)\,dt \right| \leq \int_x^y |f(t)|\,dt \leq M(y-x).$$

Si $x, y \in [a,b]$ con $y < x$, entonces se tendrá de forma análoga que $|F(x) - F(y)| \leq M(x-y)$. Estas dos desigualdades nos dicen que

$$|F(x) - F(y)| \leq M\,|x-y|$$

para cualesquiera $x, y \in [a,b]$ y la continuidad es entonces inmediata.

(ii). Pongamos

$$\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)=\frac{F(x)-F(c)-(x-c)f(c)}{x-c}$$
$$=\frac{\displaystyle\int_c^x f(t)\,dt-f(c)\int_c^x dt}{x-c}=\frac{\displaystyle\int_c^x \big(f(t)-f(c)\big)\,dt}{x-c}.$$

Dado $\varepsilon>0$, la continuidad de f en c nos dice que hay un $\delta>0$ tal que para todo $t\in[a,b]$ con $|t-c|<\delta$ se tiene $|f(t)-f(c)|<\varepsilon$. Tomemos ahora $x\in[a,b]$ con $|x-c|<\delta$. Entonces, cualquier t comprendido entre x y c también verificará que $|t-c|<\delta$, con lo que se tendrá $|f(t)-f(c)|<\varepsilon$ y por tanto

$$\left|\int_c^x \big(f(t)-f(c)\big)\,dt\right|\leq \varepsilon|x-c|.$$

Deducimos que para todo $x\in[a,b]$ tal que $0<|x-c|<\delta$ se tiene que

$$\left|\frac{F(x)-F(c)}{x-c}-f(c)\right|=\left|\frac{\int_c^x \big(f(t)-f(c)\big)\,dt}{x-c}\right|\leq\frac{\varepsilon|x-c|}{|x-c|}=\varepsilon.$$

Hemos probado que $\displaystyle\lim_{x\to c}\frac{F(x)-F(c)}{x-c}=f(c)$, esto es, F es derivable en c con $F'(c)=f(c)$. □

Definición. Dada una función $h:[a,b]\to\mathbb{R}$, cualquier función $H:[a,b]\to\mathbb{R}$ que sea continua en $[a,b]$, derivable en $]a,b[$ y que verifique $H'(x)=h(x)$ para todo $x\in]a,b[$, se llama una *primitiva* de f en el intervalo $[a,b]$. Por extensión, si I es un intervalo cualquiera una primitiva de $h:I\to\mathbb{R}$ es cualquier función $H:I\to\mathbb{R}$ continua en I, derivable en el interior de I y tal que $H'(x)=h(x)$ para todo $x\in I$.

Observaciones:

- *Dos primitivas de una función en un mismo intervalo se diferencian en una constante. Por ello, si conocemos una primitiva de una función en un intervalo las conocemos todas.*
- *Una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo es que cualquier función continua en un intervalo tiene primitivas en dicho intervalo (demuéstrese como ejercicio).*
- *Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función continua, dada cualquier primitiva $H:[a,b]\to\mathbb{R}$, las funciones $x\mapsto H(x)-H(a)$ y $x\mapsto\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ son dos primitivas de f en $[a,b]$ que coinciden en $x=a$. Por tanto son iguales. Deducimos que*

$$\int_a^b f(t)\,dt=H(b)-H(a).$$

Este resultado puede extenderse a funciones no continuas, como veremos enseguida.

Teorema 4.1.5 (Regla de Barrow). *Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrable y supongamos que H es una primitiva de f en $[a,b]$. Entonces $\int_a^b f(t)\,dt = H(b) - H(a)$.*

Obsérvese que en este resultado no se supone que f sea continua, sino tan solo que es integrable y que, además, *tiene una primitiva.*

Demostración. Tomemos una partición $P = \{x_0 = a,\ x_1,\ x_2, \ldots,\ x_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ y escribamos

$$\begin{aligned} H(b) - H(a) &= \sum_{k=1}^{n} \big(h(x_k) - h(x_{k-1})\big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} h'(t_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(t_k)(x_k - x_{k-1}) \longrightarrow \int_a^b f(t)\,dt, \end{aligned}$$

donde hemos usado el Teorema del valor medio. □

Una notación muy cómoda es escribir $H(b) - H(a) = [H(x)]_a^b$. Así, si H es una primitiva de f en $[a,b]$, la Regla de Barrow dice

$$\int_a^b f(t)\,dt = \Big[H(x)\Big]_a^b$$

Cálculo de áreas de regiones no acotadas. Integrales impropias.

Hasta ahora hemos definido la integral de funciones continuas definidas en intervalos cerrados y acotados. Sin embargo, el método empleado para calcular integrales mediante primitivas puede extenderse a situaciones más generales: funciones continuas definidas en intervalos no acotados (es decir, intervalos de la forma $]-\infty, b]$ o $[a, +\infty[$), o a funciones continuas definidas en intervalos abiertos. A estas integrales se les suele dar el nombre de integrales impropias *y, como se verá, nosotros las trataremos de forma muy parecida a las que ya conocemos. Estudiaremos tres casos posibles.*

• *Integración en intervalos no acotados.*

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a, +\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f, llamémosla F, y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a, +\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - F(a)}$$

y si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Es decir, la integral vale "$F(+\infty) - F(a)$" o "$\big[F(x)\big]_a^{+\infty}$", considerando $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$.

NOTA: *El caso de una función definida en un intervalo de la forma* $]-\infty, b]$ *es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo* $\mathbb{R}$*, podemos dividir la integral como:*

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_{c}^{+\infty} f(x)\,dx}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$*. El único problema de esta definición es que la suma puede valer "*$\infty - \infty$*". En este caso, NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.*

☐ ***Ejemplo:*** Calcular el área comprendida bajo la curva $y = 1/x^2$ en el intervalo $[1, +\infty[$. *Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que*

$$A = \int_{1}^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_{1}^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x}\right) - (-1) = 1.$$

☐

• *Integración de funciones continuas en intervalos abiertos.*

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a, b]$*; el caso de un intervalo* $[a, b[$ *es completamente análogo.*

Sea pues $f :]a, b] \to \mathbb{R}$ *una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea* F *una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en* a*, y si existe podemos calcular la integral de* f*:*

$$\boxed{\int_{a}^{b} f(x)\,dx = F(b) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)}$$

NOTA: *Si el límite de la primitiva es* $+\infty$ *o* $-\infty$*, diremos que la integral vale* $+\infty$ *o* $-\infty$*. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto* $f :]a, b[\to \mathbb{R}$*, su integral valdrá*

$$\int_{a}^{b} f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to b^-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right).$$

Otra vez, si la suma vale "$\infty - \infty$*", NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.*

Al igual que antes, podemos generalizar el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

☐ ***Ejemplo:*** Calcular el área bajo la curva $y = 1/\sqrt{x}$ en $]0, 1]$. *Aplicamos la fórmula dada, y tenemos*

$$A = \int_{0}^{1} \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\right]_{0}^{1} = 2 - \left(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\right) = 2.$$

☐

• *Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior.*

Supongamos que tenemos una función $f : [a,b] - \{c\} \to \mathbb{R}$ que es continua en $[a,b] - \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b, tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a,c[$ y la integral en $]c,b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.}$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga "$\infty - \infty$", en cuyo caso NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

□ ***Ejemplo:*** Calcular la integral de la función $f(x) = \log(x^2)$ entre -1 y 1. *La función que nos dan es $f : [-1,1] - \{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1,0[$ y $]0,1]$. Cada una de las dos integrales vale:*

$$\int_{-1}^{0} \log(x^2)\,dx = \Big[x\log(x^2) - 2x\Big]_{-1}^{0} = -2$$

$$\int_{0}^{1} \log(x^2)\,dx = \Big[x\log(x^2) - 2x\Big]_{0}^{1} = -2$$

con lo que se tiene que

$$\int_{-1}^{1} \log(x^2)\,dx = -2 - 2 = -4.$$

□

□ ***Ejemplo:*** Calcular $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx$. *Si hacemos*

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - (+1) = -2!!!!!$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¡no tiene sentido que tenga integral negativa! ¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx + \int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx,$$

pero

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{x\to 0^-}(-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{0}^{1} = -1 - \lim_{x\to 0^+}(-1/x) = +\infty,$$

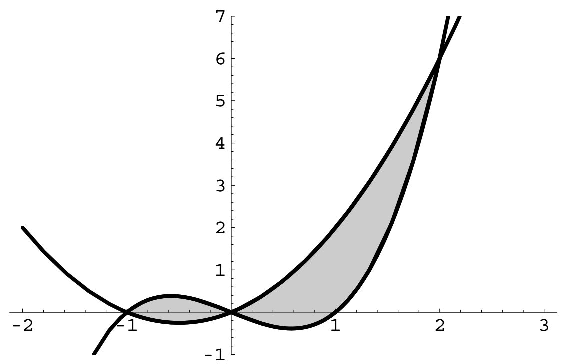
y por tanto

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

□

Aplicaciones de la integral

Dedicamos esta sección a comentar algunas aplicaciones de la integral, tales como cálculo de longitudes, áreas y volúmenes. Sólo expondremos la principales fórmulas. En las prácticas de ordenador de la asignatura podrás ver un desarrollo más detallado.



Área entre dos curvas.

• ***Área entre dos curvas:*** *Dadas dos funciones integrables* $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ *con* $f(x) \geq g(x)\ \forall x \in [a, b]$*, llamamos* área encerrada entre f y g en $[a, b]$ *al área de la región plana acotada por arriba por* $y = f(x)$*, por abajo por* $y = g(x)$*, y lateralmente por* $x = a$ *y* $x = b$*. En este caso, dicho área vale*

$$\boxed{A = \int_a^b \big(f(x) - g(x)\big)\, dx}$$

En el caso general en que las funciones no estén ordenadas en todo el intervalo (hay trozos donde f *es mayor y trozos donde lo es* g*), dividiremos el intervalo* $[a, b]$ *en trozos disjuntos buscando los puntos de corte de las dos funciones, de forma que en cada trozo una de ellas sea mayor que la otra, y calcularemos el área entre las curvas en cada trozo. El área total entre las curvas será pues la suma de estas áreas. De forma equivalente, se tiene*

$$\boxed{A = \int_a^b |f(x) - g(x)|\, dx}$$

Veamos un ejemplo:

□ ***Ejemplo:*** Calcular el área entre las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$. (área de la región sombreada en la figura anterior).
NOTA: *En general, cuando no se especifica el intervalo donde tenemos que calcular el área, se toma el intervalo comprendido entre el primer y el último punto de corte de las gráficas.*

Lo primero que necesitamos son los puntos de corte de las dos gráficas, que se obtienen resolviendo la ecuación

$$x^3 - x = x^2 + x.$$

Dichos puntos son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, con lo que dividimos el área en dos partes: A_1, la parte en el intervalo $[-1, 0]$ (donde $y = x^3 - x$ está encima de $y = x^2 + x$), y A_2, la parte en el intervalo $[0, 2]$ (donde pasa lo contrario). Entonces

$$A_1 = \int_{-1}^{0} [x^3 - x - (x^2 + x)]\, dx = \frac{5}{12} \qquad A_2 = \int_{0}^{2} [x^2 + x - (x^3 - x)]\, dx = \frac{8}{3},$$

con lo que el área buscada será $A = A_1 + A_2 = 5/12 + 8/3 = 37/12$. □

• ***Longitudes de curvas:***

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a, b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

□ ***Ejemplo:*** Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1. *La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva:*

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Así, la longitud de media circunferencia será:

$$l = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = [\operatorname{arc\,sen} x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

□

• ***Áreas de sólidos de revolución:***

Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\boxed{S = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

□ ***Ejemplo:*** Superficie de una esfera de radio 1. *Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior*

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$S = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$$

□

• ***Volúmenes de sólidos de revolución:***

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$\boxed{V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2 \, dx}$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$\boxed{V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x) \, dx}$$

☐ ***Ejemplo:*** Volumen de una esfera de radio 1. *Igual que antes, podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva*

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1,1]$$

Con ello, el volumen será

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2) \, dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \pi \Big((1 - 1/3) - (-1 + 1/3) \Big) = 4\pi/3$$

☐

Métodos de cálculo de primitivas.

Dada una función continua f en un intervalo I y un punto $a \in I$, sabemos, como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, que la función $F \colon I \to \mathbb{R}$ dada por $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ para todo $x \in I$, es la *primitiva de f en el intervalo I que se anula en el punto a. Ahora, si lo que queremos es aplicar la regla de Barrow para calcular el número $\int_a^b f(x)dx$, entones la primitiva $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ no nos sirve para nada porque si la evaluamos en a y en b y hacemos la diferencia obtenemos una identidad perfectamente inútil para nuestros propósitos. Lo que necesitamos es conocer una primitiva f que sea realmente evaluable, es decir que al evaluarla en a y en b proporcione valores numéricos. En otros términos,* ***el problema del cálculo de primitivas consiste en tratar de expresar la*** **"primitiva trivial"** $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ ***por medio de funciones elementales*** [1] ***que permitan una evaluación efectiva de la integral****. Para eso sirven las técnicas de cálculo de primitivas. Pero no hay que olvidar que, si bien la derivada de una función elemental también es una función elemental, es frecuente que una función elemental no tenga primitivas que puedan expresarse por medio de funciones elementales. Esto ocurre, por ejemplo, con las funciones e^{-x^2}, $\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$, $\operatorname{sen}(x^2)$, $\sqrt{x^3+1}$, y muchas más. En tales casos la forma más sencilla de representar una primitiva de f es justamente mediante la función $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ y, para obtener valores concretos de dicha función hay que recurrir a métodos numéricos de cálculo de integrales.*

[1] Las funciones que se obtienen por medio de sumas, productos, cocientes y composiciones a partir de las funciones racionales, exponenciales, logarítmicas, trigonométricas y sus inversas, se llaman funciones elementales.

En lo que sigue vamos a considerar algunos tipos de funciones elementales cuyas primitivas también pueden expresarse por medio de funciones elementales y pueden calcularse con procedimientos más o menos sistemáticos.

*Para leer lo que sigue necesitas tener papel y un bolígrafo a mano para ir haciendo los ejercicios que se proponen. A calcular primitivas se aprende practicando; la imprescindible agilidad en los cálculos la lograrás haciendo decenas de ejercicios. Fíjate que, en la mayoría de los casos, se trata de ejercicios en los que tan sólo tienes que aplicar una técnica general a un caso particular. Esto es tan "*fácil*" que lo saben hacer los programas de cálculo simbólico, como* Mathematica, Derive, Mapple *y otros. Cuando se logre fabricar una calculadora de bolsillo que pueda ejecutar estos programas quizás ya no sea imprescindible aprender a calcular primitivas, pero hasta que llegue ese momento sigue siendo necesario que aprendas a calcular primitivas con agilidad. Sería lamentable que, por no saber calcular una primitiva, no puedas resolver una sencilla ecuación diferencial, ni calcular una probabilidad, ni el área de una superficie,... Las aplicaciones del cálculo integral son tan variadas, que el tiempo que dediques a la práctica del cálculo de primitivas será más rentable de lo que ahora puedas imaginar.*

Observaciones sobre la notación y terminología usuales

Para representar una primitiva de una función f, suele usarse la notación $\int f(x)dx$. Así, por ejemplo, se escribe $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a|$. Esta notación es algo imprecisa porque no especifica el intervalo en que se considera definida f. En el ejemplo anterior hay que interpretar que la función $\dfrac{1}{x-a}$ está definida en uno de los intervalos $]-\infty, a[$ o $]a, +\infty[$ y elegir la primitiva correspondiente. Estos pequeños inconvenientes están compensados por la comodidad en los cálculos que proporciona esta notación. Es frecuente también, aunque no lo haremos en lo que sigue (pero mira el ejercicio 3), añadir una constante arbitraria, C, y escribir $\displaystyle\int \frac{1}{x-a}\,dx = \log|x-a| + C$.

*La integral de una función en un intervalo, $\int_a^b f(x)dx$, se llama a veces "*integral definida*" de f (y es un número), y al símbolo $\int f(x)dx$ se le llama "*integral indefinida*" o, simplemente, "*integral*" de f (y representa una primitiva cualquiera de f). Aunque esto puede ser confuso, no olvides que,* cuando hablamos de calcular la integral $\int f(x)dx$ lo que realmente queremos decir es que queremos calcular una primitiva de f.

*Como ya sabes, en los símbolos $\int f(x)dx$ o $\int_a^b f(x)dx$ la letra "x" puede sustituirse por cualquier otra y el símbolo "dx" (que se lee "*diferencial x*") sirve para indicar la variable de integración. Esto es muy útil si la función f contiene parámetros. Por ejemplo, son muy diferentes las integrales $\int x^y dx$ y $\int x^y dy$.*

Te recuerdo también que, si $y = y(x)$ es una función de x, suele usarse la notación $dy = y'dx$ que es útil para mecanizar algunos cálculos pero que no tiene ningún significado especial: es una forma de indicar que y' es la derivada de y respecto a x.

Finalmente, si φ es una función, se usa la notación $\varphi(x)\big|_{x=c}^{x=d}$ o sencillamente, $\varphi(x)\big|_c^d$ para indicar el número $\varphi(d) - \varphi(c)$, y usaremos la notación $\varphi(x)\big|_{x\to a}^{x\to b}$ para indicar $\lim_{x\to b}\varphi(x) - \lim_{x\to a}\varphi(x)$. Esta notación es cómoda cuando estudiamos integrales impropias.

Integración por partes

Si u y v son funciones con derivada primera continua en un intervalo, por la regla de derivación para un producto sabemos que: $(u(x)\,v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$. Deducimos que la función producto $u\,v$ es una primitiva de la función $u'v + v'u$, es decir, $\int (u'(x)v(x) + u(x)v'(x))dx = u(x)\,v(x)$. Lo que suele escribirse en la forma:

$$\int u\,dv = u\,v - \int v\,du$$

Por supuesto, esta igualdad podemos usarla para calcular integrales definidas:

$$\int_c^d u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x=c}^{x=d} - \int_c^d v(x)u'(x)dx \qquad (4.1)$$

Finalmente, si u y v están definidas en un intervalo abierto de extremos $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$ y existen los límites $\lim\limits_{x\to a} u(x)v(x)$ *y* $\lim\limits_{x\to b} u(x)v(x)$, *entonces se tiene que*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x)\Big|_{x\to a}^{x\to b} - \int_a^b v(x)u'(x)dx \qquad (4.2)$$

Naturalmente, si queremos usar este método para calcular una integral $\int f(x)dx$ lo primero que hay que hacer es expresar $f(x) = u(x)w(x)$ de forma que el cálculo de $v(x)$ por la condición, $v'(x) = w(x)$, es decir la integral $v(x) = \int w(x)dx$, sea inmediata. Tenemos entonces

$$\int f(x)dx = \int u(x)w(x)dx = \int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \qquad (4.3)$$

Veamos algunas situaciones en las que este método puede aplicarse con éxito.

- *Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es inmediata. Por ejemplo, para calcular una integral $\int f(x)dx$ en la que la derivada de $f(x)$ es más sencilla que la propia función, como es el caso de* $\log x$, $\operatorname{arc\,sen} x$, $\operatorname{arc\,tg} x$. *Entonces conviene tomar $u(x) = f(x)$ y $v'(x) = w(x) = 1$ en (4.3).*

- ***Ejemplo 1.***

$$\int \operatorname{arc\,tg} x\,dx = \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{arc\,tg} x \to d\,u = \dfrac{1}{1+x^2}\,dx \\ d\,v = dx \to v = x \end{array}\right] = x\,\operatorname{arc\,tg} x - \int \frac{x}{1+x^2}\,dx$$
$$= x\,\operatorname{arc\,tg} x + \frac{1}{2}\log(1+x^2)$$

- *Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es del mismo tipo que la integral de partida, pero más sencilla, de manera que reiterando el proceso se llega a una integral inmediata. Este es el caso cuando $f(x)$ es de la forma $P(x)\,\mathrm{e}^{ax}$, $P(x)\operatorname{sen}(ax)$, $P(x)\cos(ax)$, donde $P(x)$ es una función polinómica. En todos los casos se elige $u(x) = P(x)$, y $v'(x) = \mathrm{e}^{ax}$, $v'(x) = \operatorname{sen}(ax)$, $v'(x) = \cos(ax)$.*

- ***Ejemplo 2.***

$$\int P(x)\,\mathrm{e}^{ax}\,dx = \left[\begin{array}{l} u = P(x) \to du = P'(x)dx \\ d\,v = \mathrm{e}^{ax}\,dx \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{a} \end{array}\right] = P(x)\frac{\mathrm{e}^{ax}}{a} - \frac{1}{a}\int P'(x)e^{ax}dx$$

La última integral es del mismo tipo que la primera pero con el grado del polinomio rebajado en una unidad. *El proceso se repite tantas veces como sea necesario.*

- *Cuando la integral $\int v(x)u'(x)dx$ es parecida a la de partida, de forma que al volver a aplicar el proceso la integral de partida se repite y es posible despejarla de la igualdad obtenida.*

- ***Ejemplo 3.***

$$\int \cos(\log x)dx = \left[\begin{array}{l} u = \cos(\log x) \to du = -\dfrac{1}{x}\operatorname{sen}(\log x)dx \\ dv = dx \to v = x \end{array}\right] = x\,\cos(\log x) + \int \operatorname{sen}(\log x)dx =$$

$$= \left[\begin{array}{l} u = \operatorname{sen}(\log x) \to du = \dfrac{1}{x}\cos(\log x)dx \\ dv = dx \to v = x \end{array}\right] = x\,\cos(\log x) + x\,\operatorname{sen}(\log x) - \int \cos(\log x)dx$$

deducimos que $\displaystyle\int \cos(\log x)dx = \frac{x}{2}\big(\cos(\log x) + \operatorname{sen}(\log x)\big)$.

Ejercicios

1. *Calcular las integrales:*

$$\int_1^2 \log x\,dx\,,\quad \int s^2\,e^{2s}\,ds\,,\quad \int \operatorname{arc\,sen} x\,dx,\,,\quad \int_1^4 \sqrt{t}\,\log t\,dt\,,\quad \int_1^e (\log x)^2 dx$$
$$\int x^3\,e^{x^2}\,dx\,,\quad \int \log(x^2+1)dx\,,\quad \int_0^{\pi/4} \frac{\vartheta}{\cos^2\vartheta}\,d\vartheta\,,\quad \int x^2\operatorname{sen} x\,dx\,,\quad \int_1^e \cos^2(\log x)dx$$

2. *Calcular las integrales* $\displaystyle\int e^{a\,x}\cos(bx)\,dx$, *y* $\displaystyle\int e^{a\,x}\operatorname{sen}(bx)\,dx$. *Y deducir, para* $a > 0$ *el valor de* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\cos(bx)\,dx$ *y* $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-a\,x}\operatorname{sen}(bx)\,dx$.

3. *Explica la aparente contradicción*

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{\operatorname{sen} x\,\cos x}\,dx &= \int \frac{\operatorname{cotg} x}{\cos^2 x}\,dx = \int \operatorname{cotg} x\,\operatorname{tg}' x\,dx = \operatorname{cotg} x\,\operatorname{tg} x - \int \operatorname{tg} x\,\operatorname{cotg}' x\,dx \\ &= 1 + \int \frac{\operatorname{tg} x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = 1 + \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\,\cos x}\,dx\,.\end{aligned}$$

¡Luego $1 = 0$*!*

Ahora que estás empezando a hacer ejercicios de cálculo de primitivas es una buena práctica que compruebes los resultados. Además es muy sencillo: basta derivar la primitiva que has obtenido.

Integración por recurrencia

La técnica de integración por partes permite en algunas ocasiones relacionar una integral de la forma $I_n = \int f(x,n)dx$ *en la que interviene un parámetro* n *(con frecuencia un número natural) con otra del mismo tipo en la que el parámetro ha disminuido en una o en dos unidades. Las expresiones así obtenidas se llaman fórmulas de reducción o de recurrencia y permiten el cálculo efectivo de la integral cuando se particularizan valores del parámetro. Los siguientes ejemplos son ilustrativos de esta forma de proceder.*

- ***Ejemplo 4.***

$$\int (\log x)^n dx = \left[\begin{array}{c} u = (\log x)^n \to du = n\dfrac{(\log x)^{n-1}}{x}\, dx \\ dv = dx \to v = x \end{array} \right] = x(\log x)^n - n \int (\log x)^{n-1} dx$$

- ***Ejemplo 5.***

$$I_n = \int x^n\, \mathrm{e}^{a\,x}\, dx = \left[\begin{array}{c} u = x^n \to du = n\, x^{n-1} \\ dv = \mathrm{e}^{a\,x}\, dx \to v = \dfrac{\mathrm{e}^{a\,x}}{a}\, dx \end{array} \right] = \frac{1}{a}\,(x^n\, \mathrm{e}^{a\,x} - n\, I_{n-1})$$

- ***Ejemplo 6.***

$$\begin{aligned} I_n = \int \operatorname{sen}^n x\, dx &= \left[\begin{array}{c} u = \operatorname{sen}^{n-1} x \to du = (n-1)\operatorname{sen}^{n-2} x\, \cos x\, dx \\ dv = \operatorname{sen} x\, dx \to v = -\cos x \end{array} \right] = \\ &= -\cos x\, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, \cos^2 x\, dx \\ &= -\cos x\, \operatorname{sen}^{n-1} x + (n-1) \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx - (n-1) I_n \end{aligned}$$

Y deducimos fácilmente que $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\, dx = -\frac{1}{n} \cos x\, \operatorname{sen}^{n-1} x + \frac{n-1}{n} \int \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$. *En particular,* $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^n x\, dx = \frac{n-1}{n} \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{n-2} x\, dx$. *De aquí se obtienen las igualdades*

$$\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n+1} x\, dx = \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdots (2n+1)}, \qquad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2n} x\, dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\, \frac{\pi}{2}$$

Ejercicios

4. *Calcula, haciendo uso de los resultados anteriores, las integrales*

$$\int (\log x)^3 dx, \quad \int x^4\, \mathrm{e}^x\, dx, \quad \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^4 x\, dx, \quad \int \operatorname{sen}^5 x\, dx$$

5. *Prueba las siguientes relaciones de recurrencia*

   (a) $I_n = \displaystyle\int \cos^n x\, dx = \frac{1}{n}\big(\cos^{n-1} x\, \operatorname{sen} x + (n-1) I_{n-2}\big)$

   (b) $I_n = \displaystyle\int \operatorname{tg}^n x\, dx = \frac{1}{n-1}\, \operatorname{tg}^{n-1} x - I_{n-2}$

6. *Prueba la igualdad* $I_n = \displaystyle\int \frac{1}{(1+x^2)^n}\, dx = \frac{x}{(2n-2)(1+x^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2n-2}\, I_{n-1}$

Sugerencias: $I_n = \displaystyle\int \frac{(1+x^2)-x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = I_{n-1} - \int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx$. *Ahora:*

$$\int \frac{x^2}{(1+x^2)^n}\,dx = \left[\begin{array}{lcl} u = x & \to & du = dx \\ dv = \dfrac{x}{(1+x^2)^n}\,dx & \to & v = \dfrac{1}{2(n-1)}\dfrac{1}{(1+x^2)^{n-1}} \end{array}\right] = \cdots$$

Integración por sustitución o cambio de variable

Sean $g\colon J \to \mathbb{R}$ *una función con derivada primera continua en un intervalo* J *que toma valores en un intervalo* I, *y* f *una función continua en* I. *Sea* F *una primitiva de* f *en* I, *y pongamos* $H = F \circ g$. *Tenemos, por la regla de la cadena, que* $H'(t) = F'(g(t))g'(t) = f(g(t))g'(t)$, *es decir, la función* H *es una primitiva en* J *de la función* $h(t) = f(g(t))g'(t)$. *Si* c, d *son puntos de* J, *deducimos que*

$$\int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt = H(d) - H(c) = F(g(d)) - F(g(c)) = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)\,dx$$

Esta igualdad se conoce con el nombre de "fórmula de integración por sustitución o cambio de variable". *En ella se supone que queremos calcular, por ejemplo, la integral* $\int_a^b f(x)\,dx$ *y lo que hacemos es la sustitución* $x = g(t)$, *con lo que* $dx = g'(t)dt$ *y se eligen* c *y* d *por la condición de que* $g(c) = a$, $g(d) = b$. *Naturalmente, esto tiene interés cuando la función* $f(g(t))g'(t)$ *es más fácil de integrar que la función* f. *Simbólicamente este proceso suele representarse en la forma*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\begin{array}{l} x = g(t),\ dx = g'(t)dt \\ a = g(c),\ b = g(d) \end{array}\right] = \int_c^d f(g(t))g'(t)\,dt$$

Para el caso de integrales indefinidas este proceso de sustitución de representa de forma menos precisa y se escribe simplemente

$$\int f(x)\,dx = \left[\begin{array}{c} x = g(t) \\ dx = g'(t)dt \end{array}\right] = \int f(g(t))g'(t)\,dt$$

En este contexto, es frecuente calcular $\int f(g(t))g'(t)\,dt = H(t)$, *y escribir* $\int f(x)\,dx = H(t)$, *igualdad que no tiene mucho sentido si no se especifica también la relación entre las variables* t *y* x, *escribiendo "* $\int f(x)\,dx = H(t)$ donde $x = g(t)$*". Desde luego, el conocimiento de* $H(t)$ *y de la relación* $x = g(t)$ *es suficiente para calcular integrales definidas de* f, *pero también podemos* "deshacer el cambio" *para obtener una primitiva de* f. *Para eso la función* g *debe ser una biyección de* J *sobre* I *con derivada no nula. En tal caso, la función* $F(x) = H(g^{-1}(x))$ *es una primitiva de* f *en* I. *En efecto:*

$$\begin{aligned} F'(x) &= H'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) = f(g(g^{-1}(x)))g'(g^{-1}(x))(g^{-1})'(x) \\ &= f(x)g'(g^{-1}(x))\frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = f(x) \end{aligned}$$

No olvides que la fórmula del cambio de variables puede usarse en un sentido (de izquierda a derecha) o en otro (de derecha a izquierda) según convenga.

- ***Ejemplo 7.*** *Con frecuencia se hacen cambios de variable para quitar radicales.*

$$\int_{2/\sqrt{3}}^{2} \frac{1}{x^2\sqrt{x^2+4}}\,dx = \begin{bmatrix} x = 2\operatorname{tg} t,\ dx = \dfrac{2}{\cos^2 t} \\ 2/\sqrt{3} = 2\operatorname{tg}(\pi/6),\ 2 = 2\operatorname{tg}(\pi/4) \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{\cos t}{\operatorname{sen}^2 t}\,dt$$
$$= \frac{1}{4}\left[\frac{-1}{\operatorname{sen} t}\right]_{\pi/6}^{\pi/4} = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$$

- ***Ejemplo 8.*** *Un cambio de variable en una integral impropia. Consideremos la integral:*

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx$$

Suponemos que $a < b$. El cambio que hacemos consiste en llevar el intervalo $]-1,1[$ al $]a,b[$ por una biyección del tipo $g(t) = \alpha\, t + \beta$. Las condiciones $g(-1) = a$, $g(1) = b$ nos dan que $\alpha = (b-a)/2$, $\beta = (b+a)/2$. Con ello:

$$\int_a^b \frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}\,dx = \begin{bmatrix} x = g(t),\ dx = \dfrac{b-a}{2} \\ a = g(-1),\ b = g(1) \end{bmatrix} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \pi$$

Ejercicios

7. *Calcular las siguientes integrales utilizando el cambio de variable indicado*

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^3 x}{\cos^4 x}\,dx \quad x = \arccos t\,; \quad \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^4 x}\,dx \quad x = \operatorname{arc\,tg} t\,; \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + 1} \quad x = \log t$$

8. *Calcular las integrales*

$$\int \sqrt{4-x^2}\,dx\,, \quad \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}}\,, \quad \int_e^{e^4} \frac{dx}{x\sqrt{\log x}}\,, \quad \int_1^4 \frac{1}{x^2}\sqrt{1+\frac{1}{x}}\,dx\,, \quad \int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$$

9. *Sea $a > 0$. Prueba que si f es una función impar, es decir, $f(-x) = -f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 0$. Y si f es una función par, es decir, $f(-x) = f(x)$, entonces $\int_{-a}^{a} f(t)dt = 2\int_0^a f(t)dt$.*

Integración de funciones racionales

Dadas dos funciones polinómicas $P(x)$ y $Q(x)$, queremos calcular $\displaystyle\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q. Supondremos también que el coeficiente líder del polinomio Q es *1. La técnica para calcular la integral consiste en descomponer la fracción $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ en otras más sencillas llamadas* "fracciones simples"*. Estudiaremos dos formas de hacerlo: el método de los coeficientes indeterminados y una variante del mismo conocida como Método de Hermite.*

■ ***Paso 1. Descomposición del denominador en factores irreducibles***
Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1} \cdots (x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m} \tag{4.4}$$

Observaciones
• *Esto se dice muy pronto, pero puede ser muy difícil de hacer si no imposible. Afortunadamente, en los casos prácticos esta descomposición o se conoce o es muy fácil de realizar.*
• *En la descomposición (4.4) cada a_j es una raíz real de orden α_j del polinomio Q, y los factores cuadráticos del tipo $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ corresponden a raíces complejas conjugadas de orden β_j. Tales factores cuadráticos son irreducibles, es decir, su discriminante es negativo o, lo que es igual, $x^2+b_jx+c_j>0$ para todo $x\in\mathbb{R}$.*

■ ***Paso 2.***
Método de los coeficientes indeterminados
Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones de la siguiente forma:
• *Por cada raíz real a_j de orden α_j escribimos α_j fracciones cuyos numeradores son constantes A_{k_j} que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x-a_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta α_j.*
• *Por cada factor cuadrático irreducible $(x^2+b_jx+c_j)^{\beta_j}$ escribimos β_j fracciones cuyos numeradores son de la forma $B_{k_j}x+C_{k_j}$ siendo B_{k_j} y C_{k_j} constantes que hay que determinar, y los denominadores son de la forma $(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}$ donde k_j toma valores de 1 hasta β_j.*
• *La descomposición es de la forma:*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n}\left[\sum_{k_j=1}^{\alpha_j}\frac{A_{k_j}}{(x-a_j)^{k_j}}\right] + \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{k_j=1}^{\beta_j}\frac{B_{k_j}x+C_{k_j}}{(x^2+b_jx+c_j)^{k_j}}\right] \tag{4.5}$$

Método de Hermite
Escribimos el cociente $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_1}{x-a_1}+\cdots+\frac{A_n}{x-a_n}+\frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}+\cdots+\frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m}+ \\ &\quad+\frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned}$$

donde $A_1,\dots,A_n,B_1,\dots,B_m,C_1,\dots,C_m$ son coeficientes que tenemos que determinar y, en la fracción que aparece con una derivada, $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$. Observa que en ambos métodos hay que calcular tantos coeficientes como el grado de Q.

■ ***Paso 3. Determinación de los coeficientes***

Tanto en un caso como en otro, se reducen todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), y se iguala a $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes. Naturalmente, en el método de Hermite hay que efectuar la derivada antes de reducir a común denominador.

Observaciones

• *En ambos métodos tenemos que calcular el mismo número de coeficientes pero en el método de Hermite la obtención del sistema de ecuaciones es un poco más trabajosa debido a la presencia de la derivada.*

• *El método de Hermite es interesante de aplicar cuando hay factores cuadráticos de orden elevado (raíces imaginarias múltiples).*

■ ***Paso 4. Integración de las fracciones simples***

En el método de Hermite, una vez escrita la función racional $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots + \\ + \frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}$$

Sólo nos queda saber calcular las integrales que hemos dejado pendientes:

• $\displaystyle\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a|.$

• $\displaystyle\int \frac{B\,x+C}{x^2+bx+c}\,dx$. *Siempre se puede escribir $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:*

$$\begin{aligned}\int \frac{B\,x+C}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{B\,x+C}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{B(x-d)+C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \int \frac{B(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{C+Bd}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \frac{B}{2}\log\left((x-d)^2+k^2\right) + (C+Bd)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable $t=\dfrac{x-d}{k}$.

En el método de los coeficientes indeterminados aparecen también, cuando hay raíces múltiples, otros dos tipos de fracciones elementales:

• *Fracciones del tipo $\dfrac{A}{(x-a)^k}$ donde $k\in\mathbb{N}$ y $k\geqslant 2$, correspondientes a raíces reales múltiples, las cuales no ofrecen dificultad pues*

• $\displaystyle\int \frac{A}{(x-a)^k}\,dx = -\frac{A}{k-1}\frac{1}{(x-a)^{k-1}}.$

• *Fracciones del tipo* $\dfrac{B\,x+C}{(x^2+bx+c)^k}$ *donde* $k\in\mathbb{N}$ *y* $k\geqslant 2$*, correspondientes a raíces imaginarias múltiples, la integración de las cuales ofrece bastante dificultad a partir de* $k\geqslant 3$*. Suelen hacerse usando la fórmula de reducción del ejercicio número 6.*

• ***Ejemplo 9.*** *Calcular* $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$*. Como hay raíces imaginarias múltiples aplicaremos el método de Hermite.*

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}=\frac{A}{x}+\frac{B\,x+C}{x^2+1}+\frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right)$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$a=0,\qquad b=5/2,\qquad c=0,\qquad d=1,\qquad A=5,\qquad B=-5,\qquad C=0;$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx=\frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)}+5\log x-\frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

• ***Ejemplo 10.*** *Calcular la integral* $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx$*. Aplicaremos el método de los coeficientes indeterminados.*

$$\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}=\frac{-A+(A+B-D)x+(-A-C+D)x^2+(A+B+C)x^3}{x(x+1)(x^2+1)}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{aligned} A+B+C &= 0\\ -A-C+D &= 0\\ A+B-D &= 1\\ -A &= 1\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{ll} A=-1 & B=1\\ C=0 & D=-1\end{array}\right.$$

Deducimos que:

$$\int_2^t\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx=\int_2^t\frac{dx}{x-1}-\int_2^t\frac{dx}{x}-\int_2^t\frac{dx}{x^2+1}=\log\left(2\frac{t-1}{t}\right)-\operatorname{arc\,tg} t+\operatorname{arc\,tg} 2$$

Por tanto:

$$\int_2^{+\infty}\frac{x+1}{x(x+1)(x^2+1)}\,dx=\log 2-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,tg} 2$$

Ejercicios

10. *Calcular las siguientes integrales*

$$\int \frac{2-x^2}{x^3-3x^2}\,dx\,, \quad \int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{x^4-1}\,dx\,, \quad \int \frac{x^4+6x^3-7x^2-4x-3}{x^3-2x^2+x-2}\,dx$$

$$\int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5}\,dx\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{(x^2-2x+2)^2}\,dx\,, \quad \int_0^1 \frac{dx}{1+x^4}\,dx$$

$$\int \frac{x^2}{(x^4-1)^2}\,dx\,, \quad \int \frac{dx}{x(1+x^4)}\,, \quad \int \frac{3x^2+30}{x^4+2x^2-8}\,dx\,, \quad \int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,dx$$

Integración por racionalización

Acabamos de ver que la primitiva de una función racional siempre puede expresarse mediante funciones elementales. Nos vamos a ocupar ahora de algunos tipos de funciones no racionales cuyas integrales se pueden transformar, por medio de un cambio de variable, en integrales de funciones racionales. Se dice entonces que la integral de partida se ha racionalizado *y esta técnica se conoce como* "integración por racionalización". *Conviene advertir que los cambios de variable que siguen son los que la práctica ha confirmado como más útiles en general, pero que en muchas ocasiones la forma concreta de la función que queremos integrar sugiere un cambio de variable específico que puede ser más eficaz.*

En lo que sigue, representaremos por $R = R(x,y)$ *una función racional de dos variables, es decir, un cociente de funciones polinómicas de dos variables. Te recuerdo que una función polinómica de dos variables es una función de la forma* $P(x,y) = \sum_{i=0}^{n} \sum_{j=0}^{m} c_{ij} x^i y^j$.

Integración de funciones del tipo $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$

Las integrales del tipo $\displaystyle\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ *donde* $R = R(x,y)$ *una función racional de dos variables, se racionalizan con el cambio de variable* $t = \operatorname{tg}(x/2)$. *Con lo que*

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}$$

Con ello resulta:

$$\int R(\operatorname{sen} x, \cos x)dx = \Big[t = \operatorname{tg}(x/2)\Big] = \int R\left(\frac{2t}{1+t^2}, \frac{1-t^2}{1+t^2}\right)\frac{2\,dt}{1+t^2}$$

• ***Ejemplo 11.***

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \operatorname{tg} x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x \cos x - \operatorname{sen} x} = \Big[\operatorname{tg} x/2 = t\Big] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log t}{2} = \frac{1}{4\operatorname{tg}^2(x/2)} + \frac{1}{2}\log|\operatorname{tg}(x/2)|.$$

Casos particulares

• *Cuando* $R(-\operatorname{sen} x, -\cos x) = R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *se dice que* "R es par en seno y coseno". *En este caso es preferible el cambio* $\operatorname{tg} x = t$. *Con lo que*

$$\operatorname{sen} x = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \qquad dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

En el caso particular de tratarse de una integral del tipo

$$\int \operatorname{sen}^n x \, \cos^m x \, dx$$

con n y m números enteros pares, *es preferible simplificar la integral usando las identidades*

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

• *Cuando* $R(-\operatorname{sen} x, \cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *se dice que* "R es impar en seno" *y el cambio* $\cos x = t$ *suele ser eficaz.*

• *Cuando* $R(\operatorname{sen} x, -\cos x) = -R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *se dice que* "R es impar en coseno" *y el cambio* $\operatorname{sen} x = t$ *suele ser eficaz.*

• ***Ejemplo 12.*** *Calcular* $\mathbf{I} = \int \operatorname{sen}^2 x \cos^2 x \, dx$. *Tenemos:*

$$\begin{aligned}
\mathbf{I} &= \int (1-\cos^2 x)\cos^2 x\, dx = \int \cos^2 x\, dx - \int \cos^4 x\, dx \\
&= \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx - \int \left(\frac{1+\cos 2x}{2}\right)^2 dx \\
&= \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{1}{4}\int (1+2\cos 2x + \cos^2 2x) dx \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}\int \cos 2x\, dx - \frac{1}{4}\frac{1+\cos 4x}{2}\, dx \\
&= \frac{x+\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{\operatorname{sen} 2x}{4} - \frac{x}{8} - \frac{\operatorname{sen} 4x}{32} = \frac{1}{8}\left(x - \frac{\operatorname{sen} 4x}{4}\right)
\end{aligned}$$

• ***Ejemplo 13.***

$$\begin{aligned}
\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\, dx &= \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\, dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[\begin{array}{l} t = \operatorname{sen} x \\ dt = \cos x\, dx \end{array}\right] = \int \frac{1-t^2}{t^2}\, dt \\
&= \frac{-1}{t} - t = \frac{-1}{\operatorname{sen} t} - \operatorname{sen} t.
\end{aligned}$$

• ***Ejemplo 14.*** *Sea* $\mathbf{I} = \int \frac{\operatorname{sen}^2 x \cos x}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$. *Se trata de una función par en seno y en coseno. Haciendo* $t = \operatorname{tg} x$, *obtenemos:*

$$\mathbf{I} = \int \frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2}\, dt$$

Aplicando el método de Hermite escribimos:

$$\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B\,t + C}{t^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{\alpha\, t + \beta}{t^2+1}\right)$$

Haciendo la derivada y reduciendo a común denominador obtenemos:

$$\begin{aligned}
&\frac{t^2}{(t+1)(t^2+1)^2} \\
&= \frac{A+C+\beta+(B+C-2\alpha+\beta)t+(2A+B+C-2\alpha-\beta)t^2+(B+C-\beta)t^3+(A+B)t^4}{(t+1)(t^2+1)^2}
\end{aligned}$$

Identificando coeficientes resulta el sistema de ecuaciones lineales:

$$\left.\begin{array}{rl}
A+C+\beta & = 0 \\
B+C-2\alpha+\beta & = 0 \\
2A+B+C-2\alpha-\beta & = 1 \\
B+C-\beta & = 0 \\
A+B & = 0
\end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll}
A = 1/4 & B = -1/4 \\
C = 0 & D = -1 \\
\alpha = -1/4 & \beta = -1/4
\end{array}\right.$$

Deducimos que:

$$\mathbf{I} = \frac{1}{4}\log|t+1| - \frac{1}{8}\log(t^2+1) - \frac{1}{4}\frac{1+t}{1+t^2} = \frac{1}{4}\log|\operatorname{sen} x + \cos x| - \frac{1}{4}\cos x(\operatorname{sen} x + \cos x)$$

• *Cuando la función* $R(\operatorname{sen} x, \cos x)$ *sea de la forma*

$$\operatorname{sen}(a\,x+b)\operatorname{sen}(c\,x+d), \quad \operatorname{sen}(a\,x+b)\cos(c\,x+d), \quad \cos(a\,x+b)\cos(c\,x+d)$$

puede resolverse la integral usando las fórmulas:

$$\operatorname{sen}\alpha\cos\beta = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)+\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{2}, \quad \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{\cos(\alpha-\beta)+\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{2}$$

• ***Ejemplo 15.***

$$\int \operatorname{sen}(3x)\ \cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int \operatorname{sen}(5x)\,dx + \frac{1}{2}\int \operatorname{sen} x\,dx = -\frac{1}{10}\cos(5x) - \frac{1}{2}\cos x$$

• *Integrales de la forma* $\displaystyle\int \operatorname{tg}^n x\,dx$, $\displaystyle\int \operatorname{cotg}^n x\,dx$. *Se reducen a una con grado inferior separando* $\operatorname{tg}^2 x$ *o* $\operatorname{cotg}^2 x$ *y sustituyéndola por* $\sec^2 x - 1$ *o* $\operatorname{cosec}^2 x - 1$.

• ***Ejemplo 16.***

$$\int \operatorname{tg}^5 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \operatorname{tg}^2 x\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x(\sec^2 x - 1)\,dx = \int \operatorname{tg}^3 x \sec^2 x\,dx - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg}^3 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\, \operatorname{tg}^2 x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x(\sec^2 x - 1)\,dx$$
$$= \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \int \operatorname{tg} x\, \sec^2 x\,dx + \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{tg}^4 x}{4} - \frac{1}{2}\operatorname{tg}^2 x + \log|\cos x|$$

Ejercicios

11. *Calcular las integrales*
$$\int \frac{1}{a + b\,\cos x}\,dx\,, \quad \int_0^{\pi} \frac{1}{\cos x + 2\,\operatorname{sen} x + 3}\,dx\,,$$
$$\int \frac{1 - 2\cos x}{5 - 4\cos x}\,dx\,, \quad \int \frac{dx}{\cos x}\,, \quad \int \frac{1}{\operatorname{sen} x\,\cos x}\,dx$$

12. *Calcular las integrales*
$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x\,\cos^2 x}\,, \quad \int_0^{\pi/4} \frac{\cos(3x+4)}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2(x+2)}}\,dx\,,$$
$$\int \frac{dx}{(1 + \operatorname{sen} x)\cos x}\,, \quad \int \operatorname{sen}^2 x\,\cos^3 x\,dx\,, \quad \int \frac{dx}{\cos^3 x}$$

13. *Calcular* $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\,\cos qx\,dx\,, \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sen} px\,\operatorname{sen} qx\,dx\,, \int_{-\pi}^{\pi} \cos px\,\cos qx\,dx$ *donde* p *y* q *son enteros.*

14. *Para* $x \in \mathbb{R}$, *y* $n \in \mathbb{N}$, *definamos* $F(x) = \dfrac{a_o}{2} + \displaystyle\sum_{\substack{k=-n\\ k\neq 0}}^{n} (a_k \cos kx + b_k \operatorname{sen} kx)$. *Para* $-n \leqslant p \leqslant n$ *prueba que:*
$$a_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\cos px\,dx \quad y \quad b_p = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(x)\,\operatorname{sen} px\,dx$$

Integrales del tipo $\int R\big(x, [L(x)]^r, [L(x)]^s, \dots\big)\,dx$ donde $L(x) = \dfrac{a\,x + b}{c\,x + d}$, $(a,b,c,d \in \mathbb{R})$ con $ad - bc \neq 0$ y $r, s, \dots$ son números racionales.

Se racionalizan con el cambio $t^q = L(x)$ *donde* q *es el mínimo común denominador de las fracciones* $r, s, \dots$. *Pues entonces tenemos que*
$$x = \frac{d\,t^q - b}{a - c\,t^q} = r(t)$$
y la integral se transforma en
$$\int R(r(t), t^{rq}, t^{sq}, \dots) r'(t)\,dt$$
en la que el integrando es una función racional de t.

• ***Ejemplo 17.*** *Sea* $\mathbf{I} = \displaystyle\int \left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{1/3} \frac{1}{1+x}\,dx$. *El cambio de variable* $\dfrac{x+1}{x-1} = t^3$ *racionaliza la integral pues se tiene que* $x = \dfrac{t^3+1}{t^3-1}$, *con lo que:*

$$\mathbf{I} = -3\int \frac{1}{t^3-1}\,dt = \int \left(\frac{t+2}{t^2+t+1} - \frac{1}{t-1}\right) dt = \frac{1}{2}\log\left(\frac{t^2+t+1}{(t-1)^2}\right) + \sqrt{3}\,\mathrm{arc\,tg}\,\frac{2\,t+1}{\sqrt{3}}$$

donde $t = \sqrt[3]{\dfrac{x+1}{x-1}}$.

Integrales binomias. *Se llaman así las de la forma*

$$\int x^{\alpha}(a+b\,x^{\beta})^{\gamma}dx$$

donde α, β, γ *son números racionales y* a, b *números reales todos ellos distintos de cero. Haciendo la sustitución*

$$x^{\beta} = t\,, \quad x = t^{\frac{1}{\beta}}\,, \quad dx = \frac{1}{\beta}\,t^{\frac{1}{\beta}-1}$$

la integral se transforma en

$$\frac{1}{\beta}\int t^{\frac{\alpha+1}{\beta}-1}(a+b\,t)^{\gamma}dt$$

que es de la forma $\displaystyle\int t^{r}(a+b\,t)^{\gamma}dt$ *donde* $r = \dfrac{\alpha+1}{\beta} - 1$. *Esta integral es del tipo de las consideradas en el apartado anterior cuando el número:*

- γ *es entero, pues es de la forma* $\displaystyle\int R(t,t^{r})dt$
- r *es entero, pues es de la forma* $\displaystyle\int R\big(t,(a+b\,t)^{\gamma}\big)dt$
- $\gamma + r$ *es entero, pues es de la forma* $\displaystyle\int \left(\frac{a+b\,t}{t}\right)^{\gamma} t^{\gamma+r}dt$

P.L. Chebyshev probó que si no se da ninguna de estas circunstancias la integral no puede expresarse por medio de funciones elementales.

• ***Ejemplo 18.*** *Sea* $\mathbf{I} = \displaystyle\int x\sqrt{x^{2/3}+2}\,dx$. *En este caso es* $\alpha = 1$, $\beta = 2/3$, $\gamma = 1/2$ *y* $\dfrac{\alpha+1}{\beta} = 3$. *Deducimos que la primitiva buscada puede expresarse por funciones elementales. Haciendo* $x^{2/3} = t$ *obtenemos* $\mathbf{I} = \dfrac{3}{2}\displaystyle\int t^2\sqrt{t+2}\,dt$, *la cual se racionaliza haciendo* $t+2 = s^2$ $(s > 0)$, *con lo que* $\mathbf{I} = 3\displaystyle\int (s^2-2)^2 s\,ds$ *que es inmediata.*

Integrales del tipo $\displaystyle\int R(\mathrm{e}^{x})dx$. *Se racionalizan con el cambio* $x = \log t$. *Un caso particular de este es el de las integrales de la forma* $\displaystyle\int R(\cosh x, \operatorname{senh} x)dx$ *que también admiten un tratamiento parecido al de las trigonométricas.*

• ***Ejemplo 14.*** *Sea* $\mathbf{I}=\displaystyle\int \frac{2}{\operatorname{senh} x+\operatorname{tgh} x}\,dx$. *Desarrolla los cálculos para comprobar que*

$$\mathbf{I}=[x=\log t]=\int \frac{2(1+t^2)}{(t-1)(1+t)^3}\,dt=\log\left(\operatorname{tgh}\left(\frac{x}{2}\right)\right)-\frac{1}{1+\cosh x}$$

Por otra parte, como la función $\dfrac{2}{\operatorname{senh} x+\operatorname{tgh} x}$ *es impar en* $\operatorname{senh} x$, *también podemos proceder como sigue*

$$\mathbf{I}=[t=\cosh x]=\int \frac{2t}{(-1+t)(1+t)^2}\,dt=-\frac{1}{1+\cosh x}+\frac{1}{2}\log(-1+\cosh x)-\frac{1}{2}\log(1+\cosh x)$$

Por supuesto, puedes comprobar que las dos primitivas encontradas son de hecho iguales.

Integración de funciones del tipo $R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)$

Una integral de la forma $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$ *puede racionalizarse por medio de las sustituciones siguientes.*

• *Si el trinomio* ax^2+bx+c *tiene dos raíces reales* α *y* β, *distintas entonces*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=[a(x-\alpha)(x-\beta)]^{1/2}=(x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{1/2}$$

Donde, por comodidad, hemos supuesto que $x-\alpha>0$. *Deducimos que la sustitución*

$$\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}=t^2\ \ (t>0),\quad x=\frac{\alpha\, t^2-\beta\,\alpha}{t^2-a}=r(t)$$

transforma la integral en $\displaystyle\int R\big(r(t),(r(t)-\alpha)t\big)r'(t)dt$ *donde el integrando es una función racional de* t.

• *Si el trinomio* ax^2+bx+c *no tiene raíces reales, entonces debe ser* $ax^2+bx+c>0$ *para todo* $x\in\mathbb{R}$, *en particular* $c>0$. *La sustitución:*

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=t\,x+\sqrt{c}\,,\quad x=\frac{b-2t\sqrt{c}}{t^2-a}=g(t)$$

transforma la integral en $\displaystyle\int R\big(g(t),t\,g(t)+\sqrt{c}\,\big)g'(t)dt$ *donde el integrando es una función racional de* t.

Las sustituciones anteriores se conocen como sustituciones de Euler.

• ***Ejemplo 20.*** *Cálcular* $\displaystyle\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,dx$. *Observa que, si* $R(x,y)=\dfrac{x}{y^3}$, *la integral que nos piden es* $\int R(x,\sqrt{7x-10-x^2})dx$ *del tipo que acabamos de considerar. Como* $7x-10-x^2=(x-2)(5-x)$, *tenemos que*

$$\int \frac{x}{(7x-10-x^2)^{3/2}}\,dx=\left[x=\frac{5+2t^2}{1+t^2}\right]=-\frac{6}{27}\int\frac{5+2t^2}{t^2}\,dt=-\frac{2}{9}\left(-\frac{5}{t}+2t\right)$$

donde $t=\dfrac{(7x-10-x^2)^{1/2}}{x-2}$.

• ***Ejemplo 21.*** $\displaystyle\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,dx$. *Haciendo la sustitución* $\sqrt{1+x+x^2} = x+t$, *es decir,* $x = \dfrac{t^2-1}{1-2t}$ *tenemos*

$$\int \frac{1}{(1+x)\sqrt{1+x+x^2}}\,dx = \left[x = \frac{t^2-1}{1-2t}\right] = \int \frac{2}{t^2-2t}\,dt$$
$$= \int \left(\frac{-1}{t} + \frac{1}{t-2}\right) dt = -\log t + \log|t-2|$$

donde $t = \sqrt{1+x+x^2} - x$.

También es posible transformar una integral del tipo $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$ *en otra de la forma* $\displaystyle\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ *donde* F *es una función racional de dos variables las cuales ya hemos estudiado. Para ello se sigue el siguiente procedimiento.*

• *Con un primer cambio de variable, de la forma* $x = \alpha\, t + \beta$ *que después explicaremos, se transforma la integral* $\displaystyle\int R(x, \sqrt{ax^2+bx+c}\,)dx$ *en otra de alguna de las formas*

$$\textbf{\textit{a)}} \int G(t, \sqrt{t^2-1}\,)dt\,, \quad \textbf{\textit{b)}} \int G(t, \sqrt{1-t^2}\,)dt\,, \quad \textbf{\textit{c)}} \int G(t, \sqrt{1+t^2}\,)dt$$

donde G *es una función racional de dos variables. Los cambios de variable respectivos*

$$\textbf{\textit{a)}}\; x = \sec u\,, \quad \textbf{\textit{b)}}\; x = \operatorname{sen} u\,, \quad \textbf{\textit{c)}}\; x = \operatorname{tg} u$$

convierten las integrales anteriores en otras de la forma $\displaystyle\int F(\operatorname{sen} x, \cos x)dx$ *donde* F *es una función racional de dos variables.*

Alternativamente, en el caso ***a)*** *puede hacerse también* $x = \cosh u$ *, y en el caso* ***c)*** $x = \operatorname{senh} u$ *, lo que transforma dichas integrales en otras del tipo* $\displaystyle\int T(\mathrm{e}^x)dx$ *donde* T *es una función racional de una variable, que ya han sido estudiadas.*

Nos queda por explicar cómo se hace el primer cambio de variable.

• *Si el trinomio* $h(x) = ax^2 + bx + c$ *tiene dos raíces reales* $\alpha < \beta$, *lo que se hace es transformar dicho trinomio en otro que tenga como raíces* -1 *y* 1. *Para ello llevamos* -1 *a* α *y* 1 *a* β *mediante una función de la forma* $\varphi(t) = \lambda t + \mu$. *Las condiciones* $\varphi(-1) = \alpha$, $\varphi(1) = \beta$, *determinan que* $\lambda = \dfrac{\beta - \alpha}{2}$, $\mu = \dfrac{\beta + \alpha}{2}$. *Con el cambio*

$$x = \varphi(t) = \frac{\beta - \alpha}{2}\, t + \frac{\beta + \alpha}{2}$$

tenemos que $h(\varphi(t)) = a\dfrac{(\beta - \alpha)^2}{4}(t^2 - 1)$. *Ahora, si* $a > 0$, *deducimos que*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)dx = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{a}\,\frac{(\beta - \alpha)}{2}\sqrt{t^2 - 1}\right)\frac{\beta - \alpha}{2}\, dt$$

que es del tipo ***a)*** *anterior. Si* $a < 0$, *entonces*

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)dx = [x = \varphi(t)] = \int R\left(\varphi(t), \sqrt{-a}\,\frac{(\beta - \alpha)}{2}\sqrt{1 - t^2}\right)\frac{\beta - \alpha}{2}\, dt$$

que es del tipo ***b)*** *anterior.*

• *Si el trinomio* $ax^2 + bx + c$ *no tiene raíces reales, entonces debe ser* $d = 4ac - b^2 > 0$ *y también* $a > 0$. *Poniendo* $\gamma = \dfrac{\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}$, *podemos escribir:*

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = \left(\sqrt{a}x + \frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2 + \gamma^2 \\ &= \gamma^2\left[\left(\frac{\sqrt{a}}{\gamma}\, x + \frac{b}{2\sqrt{a}\,\gamma}\right)^2 + 1\right] == \gamma^2\left[\left(\frac{2a}{\sqrt{d}}\, x + \frac{b}{\sqrt{d}}\right)^2 + 1\right] \end{aligned}$$

El cambio

$$\frac{2a}{\sqrt{d}}\, x + \frac{b}{\sqrt{d}} = t\,,\ \textit{esto es}\ ,\ x = \frac{\sqrt{d}\, t - b}{2a} = \phi(t)$$

transforma la integral en

$$\int R(x, \sqrt{ax^2 + bx + c}\,)dx = [x = \phi(t)] = \int R\big(\phi(t), \gamma\sqrt{t^2 + 1}\,\big)\frac{\sqrt{d}}{2a}\, dt$$

que es del tipo ***c)*** *anterior.*

Casos particulares

• *Las integrales de la forma* $\displaystyle\int \frac{P(x)}{\sqrt{ax^2 + bx + c}}\, dx$ *donde* $P(x)$ *es una función polinómica pueden resolverse con facilidad por el* método de reducción. *Se procede de la siguiente forma.*

Escribimos

$$\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}=\frac{d}{dx}\left(Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}\right)+\frac{C}{\sqrt{ax^2+bx+c}}$$

donde $Q(x)$ *es un polinomio, cuyos coeficientes hay que calcular, de grado una unidad menos que el polinomio* $P(x)$ *y* C *es una constante que también hay que calcular. Observa que la igualdad anterior puede escribirse*

$$P(x)=Q'(x)(ax^2+bx+c)+\frac{1}{2}Q(x)(2ax+b)+C$$

y a la derecha queda un polinomio de igual grado que $P(x)$ *lo que permite identificar coeficientes. Una vez calculados el polinomio* Q *y la constante* C *tenemos que*

$$\int\frac{P(x)}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx=Q(x)\sqrt{ax^2+bx+c}+C\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

con lo que todo se reduce a calcular una integral de la forma $\displaystyle\int\frac{1}{\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$*. Haciendo uso de los cambios antes visto, esta integral, salvo constantes, puede escribirse de alguna de las formas*

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,dt=\operatorname{arc\,sen}(t)\,,\quad\int\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\,dt=\operatorname{argsenh}(t)\,,\quad\int\frac{1}{\sqrt{t^2-1}}\,dt=\operatorname{argcosh}(t)$$

Recuerda que $\operatorname{argsenh}(t)=\log\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$ *y* $\operatorname{argcosh}(t)=\log\left(t+\sqrt{t^2-1}\right)$.

- *Finalmente, las integrales de la forma*

$$\int\frac{1}{(x-\alpha)^k\sqrt{ax^2+bx+c}}\,dx$$

se reducen a las del tipo anterior con el cambio $x-\alpha=\dfrac{1}{t}$.

Ejercicio

15. *Calcular la integrales*

$$\begin{array}{ll}
\displaystyle\int\frac{x+3}{\sqrt{x^2+2x+2}}\,dx\,, & \displaystyle\int\frac{x^2}{\sqrt{2x-x^2}}\,dx\,,\\
\displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt{x^2-x+1}}\,dx\,, & \displaystyle\int\sqrt{2ax-x^2}\,dx\\
\displaystyle\int\frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1+x^2}}\,dx\,, & \displaystyle\int\frac{1}{x^2\sqrt[3]{(4+x^3)^5}}\,dx\\
\displaystyle\int x^{7/2}(1-x^3)^{-2}dx\,, & \displaystyle\int\frac{\sqrt{x^2+9x}}{x^2}\,dx\\
\displaystyle\int\frac{1}{2\operatorname{senh}x-\cosh x}\,dx\,, & \\
\displaystyle\int\sqrt[3]{x}(1+\sqrt{x})^{-2}dx\,, & \displaystyle\int\frac{\sqrt{5-8x-4x^2}}{x+5/2}\,dx\,,\\
\displaystyle\int x^{-4}(1+x^2)^{-1/2}dx &
\end{array}$$

TABLA DE PRIMITIVAS INMEDIATAS	
Funciones potenciales y racionales	
$\displaystyle\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (si\ n \neq -1)$	$\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert$
$\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$
$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x$
Funciones exponenciales y logarítmicas	
$\displaystyle\int e^x\,dx = e^x$	$\displaystyle\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (si\ a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$\displaystyle\int \log x\,dx = x\log x - x$	
Funciones trigonométricas	
$\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$	$\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
$\displaystyle\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
Funciones hiperbólicas	
$\displaystyle\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	$\displaystyle\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
$\displaystyle\int (1-\tanh^2 x)\,dx = \tanh x$	$\displaystyle\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$

4.2. Relación de ejercicios

Problema 24. Calcular las siguientes primitivas:

$$\int \arctan x\, dx \qquad \int x^2 e^x\, dx \qquad \int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \tan x}$$
$$\int \operatorname{sen}^2 x \cos^3 x\, dx \quad \int \cos x\, \log(\operatorname{sen} x)\, dx \quad \int \frac{x}{\cos^2 x}\, dx$$

Problema 25. Hallar las derivadas de cada una de las funciones siguientes:

a) $F(x) = \displaystyle\int_a^x \operatorname{sen}^3(t)\, dt$

b) $F(x) = \displaystyle\int_3^{\int_1^x \frac{\operatorname{sen} s}{s} ds} \frac{1}{1+\operatorname{sen}^6 t + t^2}\, dt$

c) $F(x) = \displaystyle\int_x^b \frac{1}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt.$

d) $F(x) = \displaystyle\int_a^b \frac{x}{1+t^2+\operatorname{sen}^2 t}\, dt$

e) $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(\int_1^{y^2} \frac{dt}{1+\operatorname{sen}^2 t} \right) dy$

f) $F(x) = \displaystyle\int_0^{\int_1^{\cos^2 x} \operatorname{sen} t^2 dt} \cos s^3 ds$

Problema 26. Calcular las siguientes áreas:

a) Area limitada por las curvas $y = x^2$ y $y^2 = 8x$

b) Area limitada por $y = x\mathrm{e}^{-x^2}$, el eje OX, la ordenada en el punto $x = 0$ y la ordenada en el máximo.

c) Area de la figura limitada por la curva $y = x(x-1)(x-2)$ y el eje OX.

d) Area comprendida entre la curva $y = \operatorname{tg}(x)$, el eje OX y la recta $x = \pi/3$.

e) Area del recinto limitado por las rectas $x = 0,\ x = 1,\ y = 0$ y la gráfica de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^2}$

f) Area de la superficie obtenida por la revolución de la parábola $y^2 = 4x$ y la recta $x = 5$ alrededor del eje OX.

Problema 27. Al girar alrededor del eje OX, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a, engendra un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie equivale a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a.

Problema 28. Longitudes de curvas.

a) Hallar la longitud de la curva $y = \dfrac{x^4+48}{24x}$ en $[2,4]$

b) Hallar la longitud de la curva $y = \log(1-x^2)$ en $[1/3, 2/3]$.

c) Hallar la longitud de la catenaria. Ecuación :

$$f : [-a, a] \to \mathbb{R} \quad : \quad f(x) = \frac{1}{2} a(\mathrm{e}^{x/a} + \mathrm{e}^{-x/a})$$

Problema 29. Probar las siguientes igualdades:

$$\int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2} \qquad \int_0^{\pi/2} \frac{\cos x\, dx}{\sqrt{1-\operatorname{sen} x}} = 2 \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{-x}} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-\sqrt{x}}\, dx}{\sqrt{x}} = 2 \qquad \int_2^{+\infty} \frac{dx}{x(\log(x))^2} = \frac{1}{\log(2)} \qquad \int_0^1 \log x\, dx = -1$$

Problema 30. La curva $y = \operatorname{sen}^2(x)$, $x \in [0, \pi]$, gira en torno al eje OX determinando un sólido. Calcular su volumen.

Problema 31. Hallar el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \dfrac{18x}{x^2+9}$.

Problema 32. Hallar el área del recinto limitado por las gráficas de $f(x) = \cosh x$ y $g(x) = \operatorname{senh} x$, en el primer cuadrante.

Problema 33. Calcular el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $x = y^2$ e $y = x^2$

a) alrededor del eje OX.
b) alrededor del eje OY.

Problema 34. Idéntico ejercicio que el anterior para la región limitada por las rectas $y = 1$, $x = 1$ y la curva $y = x^3 + 2x + 1$.

Problema 35. Hállense todas las funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}$ tales que

$$(f(x))^2 = \int_0^x (\,(f(t))^2 + (f'(t))^2)dt \; + 2{,}000$$

Problema 36. Pruébese que para todo $x \in [0, \pi/2]$ se verifica que

$$\int_0^{\cos^2 x} \arccos\sqrt{t}\, dt + \int_0^{\operatorname{sen}^2 x} \operatorname{arc\,sen}\sqrt{t}\, dt = \frac{\pi}{4}$$

Problema 37. Sea g una función derivable en $\mathbb{R}$ y dos veces derivable en 0 siendo además $g(0) = 0$. Estúdiese la derivabilidad de la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(0) = g'(0)$ y para $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{1}{x}\int_0^x \frac{g(t)}{t}\, dt\,.$$

¿Es f de clase C^1?

Capítulo 5

Series de números reales.

5.1. Desarollo teórico

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. "¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera?– dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita *de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse".*

Lewis Carroll

Introducción

En este capítulo continuamos con el estudio de las sucesiones empezado en el Capítulo 4. La novedad es que ahora vamos a considerar un tipo particular *de sucesiones que, sin exagerar, puede afirmarse que son las más útiles del Cálculo. Estas sucesiones se llaman* series. *Lo más llamativo en el estudio de las* series *es el punto de vista que se adopta en el mismo; a saber: se trata de estudiar* una sucesión a partir del conocimiento que se tiene de otra sucesión. *Precisemos estas ideas.*

Dada una sucesión, $\{a_n\}$, podemos formar a partir de ella otra sucesión, $\{A_n\}$, cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente *los términos de $\{a_n\}$, es decir:*

$$A_1 = a_1,\ A_2 = a_1 + a_2,\ A_3 = a_1 + a_2 + a_3, \dots,\ A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$$

Pues bien, la sucesión así obtenida se llama serie de término general a_n. *Al estudiar las sucesiones vimos algunos ejemplos importantes de series como la serie geométrica $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$, y la serie armónica $\{1 + 1/2 + 1/3 + \cdots + 1/n\}$.*

La característica que distingue el estudio de las series es la siguiente: se trata de deducir propiedades de la serie $\{A_n\} = \{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, *a partir del comportamiento de* $\{a_n\}$; *es decir: los resultados de la teoría de series dan información sobre la sucesión* $\{A_n\}$ *haciendo hipótesis sobre la sucesión* $\{a_n\}$. *¿Por qué esto es así?, ¿no sería más lógico, puesto que lo que queremos es estudiar la serie* $\{A_n\}$, *hacer hipótesis directamente sobre ella? La razón de esta forma de proceder es que, por lo general, no se conoce una expresión de* $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *que permita hacer su estudio de forma directa; es decir, la suma* $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ *no es posible "realizarla" en la práctica. Por ello, en el estudio de las series se supone implícitamente que* la sucesión $\{a_n\}$ es el dato que podemos utilizar. *Naturalmente, esto hace que el estudio de las series se preste a muchas confusiones porque, aunque su objetivo es obtener propiedades de la serie* $\{A_n\}$, *las hipótesis hacen siempre referencia a la sucesión* $\{a_n\}$. *Si bien lo pensamos, esta forma de proceder no es del todo nueva. Ya estás acostumbrado a usar la derivada de una función para estudiar propiedades de la función; pues bien, la situación aquí es parecida: para estudiar la serie* $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ *(la función) estudiamos la sucesión* $\{a_n\}$ *(la derivada).*

Conceptos y resultados básicos

Todas las sucesiones que vamos a considerar en lo que sigue son sucesiones de números reales por lo que evitaremos esa innecesaria precisión.

Definición

Dada una sucesión $\{a_n\}$, *la sucesión* $\{A_n\}$ *definida por:*

$$A_1 = a_1, \;\; A_{n+1} = a_{n+1} + A_n \qquad \textit{para todo } \; n \in \mathbb{N}$$

se llama ***serie de término general*** a_n.

Debe quedar claro desde ahora que una serie es una sucesión cuyos términos se obtienen sumando consecutivamente los términos de otra sucesión.

Convenio de notación

Usaremos la notación $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ *para representar la serie de término general* a_n.

Ni que decir tiene que, siendo las series sucesiones, todos los conceptos y resultados estudiados ya para sucesiones conservan su misma significación cuando se aplican a series. *Por tanto, es innecesario volver a definir qué se entiende cuando se dice que una serie es "convergente", o "divergente positivamente", o "acotada".*

Serie armónica

Se llama así la serie de término general $1/n$; *es decir, la serie* $\{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$. *Se verifica que la serie armónica diverge positivamente; de hecho, dicha serie es asintóticamente equivalente a la sucesión* $\{\log n\}$.

Serie geométrica
Dado $x \in \mathbb{R}$, la sucesión $\{1 + x + x^2 + \cdots + x^n\}$ se llama serie geométrica de razón x. Dicha serie converge si, y sólo si, $|x| < 1$, en cuyo caso su límite es igual a $\dfrac{1}{1-x}$.
Todas las afirmaciones hechas se deducen de que si $x \neq 1$, se tiene:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

Condición necesaria para la convergencia de una serie
Para que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ sea convergente es necesario que $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

En la práctica se usa de la siguiente forma:
Si $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \neq 0$, entonces la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ no converge.

Demostración
Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, y supongamos que $\{A_n\}$ es convergente. Entonces se tiene que

$$0 = \lim\{A_{n+1}\} - \lim\{A_n\} = \lim\{A_{n+1} - A_n\} = \lim\{a_n\}.$$

La serie armónica $\{1 + 1/2 + \cdots + 1/n\}$ prueba que esta condición necesaria de convergencia no es suficiente.

Criterios de convergencia para series de términos positivos

Una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ tal que $a_n \geqslant 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, se dice que es una serie de términos positivos. *Nótese que una serie de términos positivos es una sucesión creciente, por lo que deducimos el siguiente criterio de convergencia.*

Criterio básico de convergencia
Una serie de términos positivos, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, es convergente si, y sólo si, está mayorada, es decir, existe un número $M > 0$, tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N}$, en cuyo caso se tiene que

$$\lim\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\} = \sup\left\{\sum_{j=1}^{n} a_j \,:\, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Nótese que una serie de términos positivos que no es convergente es positivamente divergente. El criterio básico de convergencia da lugar al siguiente criterio de comparación, *sin duda uno de los más útiles.*

Criterio de comparación
Sean $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ dos series de términos positivos. Supongamos que hay un número $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \leqslant b_n$ para todo $n > k$. Se verifica que:

i) Si la serie $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es convergente, también $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Si la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente, también la serie $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es divergente.

Demostración
i) Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$. Las hipótesis hechas implican que para todo $n > k$ es $A_n \leqslant B_n + A_k$. Deducimos que si $\{B_n\}$ está mayorada también lo está $\{A_n\}$.

El punto ii) se deduce de i).

Criterio de comparación por paso al límite
Dadas dos series de términos positivos $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$, tales que $\{a_n/b_n\} \to L \in \mathbb{R}^+_o \cup \{+\infty\}$ se verifica:

a) Si $L = +\infty$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es divergente también $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

b) Si $L = 0$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ es convergente también $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

c) Si $L \in \mathbb{R}^+$ las series $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ y $\{b_1 + b_2 + \cdots + b_n\}$ son ambas convergentes o ambas divergentes.

Demostración
Supongamos que $L \in \mathbb{R}^+$. Sea $0 < \alpha < L < \beta$. Todos los términos de la sucesión $\{a_n/b_n\}$, a partir de uno en adelante, están en el intervalo $]\alpha, \beta[$, es decir, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant k$ es $\alpha < a_n/b_n < \beta$, y, por tanto, $\alpha\, b_n < a_n < \beta\, b_n$. Concluimos, por el criterio de comparación, que la convergencia de una de las series implica la convergencia de la otra. Queda, así, probado el punto c) del enunciado. Los puntos a) y b) se prueban de manera parecida.

Criterio integral
Sea $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ una función continua, decreciente y positiva. Se verifica entonces que la serie $\{f(1) + f(2) + \cdots + f(n)\}$ converge si, y sólo si, la integral impropia $\int_1^{+\infty} f(x)\, dx$ es convergente, es decir el límite

$$\lim_{x \to +\infty} \int_1^x f(t)\, dt$$

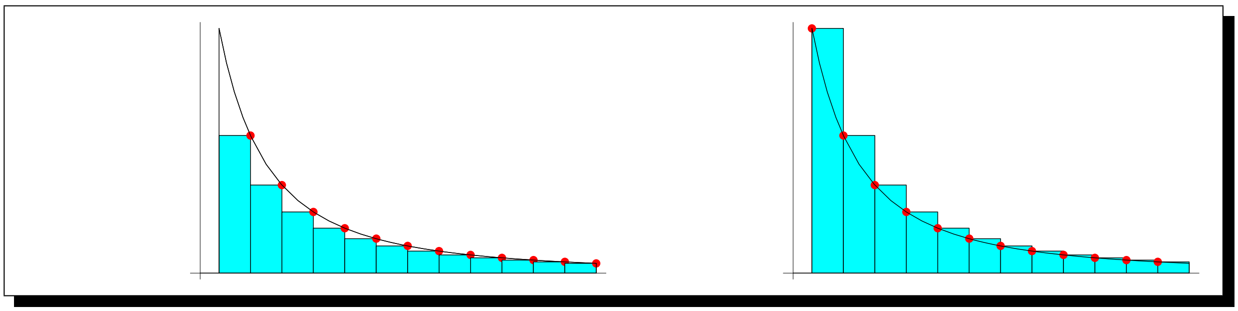
es finito.

Demostración

Sea $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt$*. Nótese que, por ser* f *positiva,* F *es creciente. Ahora, por ser* f *decreciente, se tiene que:*

$$\begin{aligned} f(2)+f(3)+\cdots+f(n+1) &\leqslant \int_1^2 f(t)\,dt + \int_2^3 f(t)\,dt + \cdots + \int_n^{n+1} f(t)\,dt = \\ &= \int_1^{n+1} f(t)\,dt \leqslant f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(n). \end{aligned}$$

Las gráficas siguientes pueden ayudar a comprender la demostración.



Deducimos que la sucesión $\{f(1)+f(2)+\cdots+f(n)\}$ *está mayorada si, y sólo si, existe* $M > 0$ *tal que para todo* $n\in\mathbb{N}$ *es* $F(n) = \int_1^n f(t)\,dt \leqslant M$*, lo que equivale a que la función* F *esté mayorada y, por tanto,* $\lim_{x\to+\infty} F(x) = \sup\{F(x) : x\in\mathbb{R}^+\} < +\infty$.

Vamos a introducir a continuación una familia de series, llamadas series de Riemann*, que se utilizan frecuentemente para comparar otras series con ellas.*

Series de Riemann

Dado un número real α*, la serie* $\{1+1/2^\alpha+1/3^\alpha+\cdots+1/n^\alpha\}$ *se llama serie de Riemann de exponente* α*. Dicha serie es convergente si, y sólo si,* $\alpha > 1$.

Demostración

Si $\alpha \leqslant 0$*,* $\{1/n^\alpha\}$ *no converge a cero y, por tanto, la serie* $\{1+1/2^\alpha+1/3^\alpha+\cdots+1/n^\alpha\}$ *es divergente. Si* $\alpha > 0$*, podemos aplicar el criterio integral tomando* $f(x) = 1/x^\alpha$*, con lo que*

$$F(x) = \int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\,dt = \begin{cases} \log x\,, & si\ \alpha = 1; \\ \dfrac{1}{1-\alpha}x^{1-\alpha} - \dfrac{1}{1-\alpha}, & si\ \alpha \neq 1. \end{cases}$$

En consecuencia, $\lim_{x\to+\infty} F(x) < +\infty$ *si, y sólo si,* $1-\alpha < 0$.

Si en el criterio de comparación por paso al límite hacemos $b_n = 1/n^\alpha$*, obtenemos el siguiente criterio de convergencia.*

Criterio de Prinsheim
Sea $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ una serie de términos positivos, α un número real y supongamos que $\{n^\alpha a_n\} \to L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}$. Entonces:

i) Si $L = +\infty$ y $\alpha \leqslant 1$, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

ii) Si $L = 0$ y $\alpha > 1$, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

iii) Si $L \in \mathbb{R}^+$, $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ converge si $\alpha > 1$ y diverge si $\alpha \leqslant 1$.

Series de Bertrand
Dados dos números reales α y β, la serie

$$\left\{\frac{1}{2^\alpha (\log 2)^\beta} + \frac{1}{3^\alpha (\log 3)^\beta} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta}\right\}$$

converge si $\alpha > 1$ cualquiera sea β, y también si $\alpha = 1$ y $\beta > 1$. En cualquier otro caso es divergente.

Demostración

Sabemos que $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(\log n)^\mu}{n^\rho} = 0$, cualesquiera sean $\rho > 0$ y $\mu \in \mathbb{R}$. Supongamos que $\alpha > 1$ y sea λ un número verificando que $1 < \lambda < \alpha$. Entonces

$$n^\lambda \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = \frac{(\log n)^\mu}{n^\rho}$$

donde $\rho = \alpha - \lambda$, $\mu = -\beta$, y deducimos que

$$\lim_{n\to\infty} n^\lambda \frac{1}{n^\alpha (\log n)^\beta} = 0.$$

El criterio de Prinsheim implica que la serie $\left\{\displaystyle\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^\alpha (\log k)^\beta}\right\}$ es convergente.

Si $\alpha < 1$ un razonamiento parecido muestra que la serie diverge cualquiera sea β.

Sea ahora $\alpha = 1$. Entonces, si $\beta \leqslant 0$, tenemos que $\dfrac{1}{n(\log n)^\beta} \geqslant \dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant 3$, y el criterio de comparación implica que la serie es divergente. Si $\beta > 0$ podemos aplicar el criterio integral con $f(x) = \dfrac{1}{(x+1)(\log(x+1))^\beta}$, con lo que

$$F(x) = \int_1^x f(t)\,dt = \frac{\log(x+1))^{1-\beta}}{1-\beta} - \frac{(\log 2)^{1-\beta}}{1-\beta}$$

si $\beta \neq 1$ y $F(x) = \log(\log(x+1)) - \log(\log 2))$ si $\beta = 1$. Por tanto, $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x) < +\infty$ si, y sólo si, $1 - \beta < 0$.

Vamos a estudiar a continuación dos criterios de convergencia que se aplican a series que pueden compararse con una serie geométrica. Observemos que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = x < 1$. Esto nos lleva a considerar, en el caso general de una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de términos positivos, el comportamiento de la sucesión $\{a_{n+1}/a_n\}$.

Criterio del cociente o de D'Alembert (1768)
Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y que existe

$$\lim \frac{a_{n+1}}{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración
i) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_o$ se verifica que $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \lambda$, con lo que:

$$a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{a_n}\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdots \frac{a_{n_o+1}}{a_{n_o}}\, a_{n_o} \leqslant \lambda^{n+1-n_o} a_{n_o} = \frac{a_{n_o}}{\lambda^{n_o}}\, \lambda^{n+1}$$

y como, por ser $0 < \lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente, deducimos, en virtud del criterio de comparación, que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Basta notar que la hipótesis hecha implica que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero.

Puesto que la serie geométrica de término general $a_n = x^n$, donde $x > 0$, converge si $\sqrt[n]{a_n} = x < 1$, esto nos lleva, en el caso general de una serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ de términos positivos, a considerar el comportamiento de la sucesión $\{\sqrt[n]{a_n}\}$.

Criterio de la raíz o de Cauchy (1821)
Supongamos que para todo $n \in \mathbb{N}$ es $a_n \geqslant 0$, y que existe

$$\lim \sqrt[n]{a_n} = L \in \mathbb{R}_o^+ \cup \{+\infty\}.$$

Entonces se verifica que:

a) Si $L < 1$ la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente;

b) Si $L > 1$ o si $L = +\infty$, entonces $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración
i) Sea λ un número tal que $L < \lambda < 1$. La definición de límite implica que existe $n_o \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geqslant n_o$ es $\sqrt[n]{a_n} \leqslant \lambda$, es decir, $a_n \leqslant \lambda^n$. Puesto que $0 < \lambda < 1$, la serie geométrica de razón λ es convergente y, en virtud del criterio de comparación, se sigue que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Basta notar que la hipótesis hecha implica que la sucesión $\{a_n\}$ no converge a cero.

Es importante observar que ni el criterio del cociente ni el de la raíz permiten deducir la convergencia o divergencia de una serie cuando $L = 1$. Sabemos que si $\lim\{a_{n+1}/a_n\} = 1$ entonces también $\lim \sqrt[n]{a_n} = 1$. En estos casos suele ser útil el siguiente criterio de convergencia.

Criterio de Raabe (1832)

Supongamos que $a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y sea $R_n = n\left(1 - \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right)$. Se verifica que:

i) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L > 1$ o $L = +\infty$, la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente.

ii) Si $\{R_n\} \to L$, donde $L < 1$ o $L = -\infty$, o bien si existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

Demostración

i) Las hipótesis hechas implican que existen $\alpha > 1$ y $n_o \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geqslant n_o$ es $R_n \geqslant \alpha$. Sea $\delta = \alpha - 1 > 0$. Tenemos que

$$R_n - 1 = (n-1) - n\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \delta \quad (n \geqslant n_o)$$

por lo que

$$a_n \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n-1)a_n - na_{n+1}\big) \quad (n \geqslant n_o).$$

Como $a_n > 0$, deducimos que $na_{n+1} < (n-1)a_n$ para todo $n \geqslant n_o$. Así la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es decreciente para $n \geqslant n_o$ y, como es de números positivos, deducimos que es convergente. Sea $\gamma = \lim\{na_{n+1}\} = \inf\{na_{n+1} : n \geqslant n_o\}$. Tenemos que

$$\sum_{j=n_o}^{n} a_n \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_o - 1)a_{n_o} - na_{n+1}\big) \leqslant \frac{1}{\delta}\big((n_o - 1)a_{n_o} - \gamma\big)$$

y, por el criterio general de convergencia para series de términos positivos, deducimos que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es convergente (lo que, dicho sea de paso, implica que $\gamma = 0$).

ii) Si $R_n \leqslant 1$ para todo $n \geqslant k$, entonces $(n-1)a_n - na_{n+1} \leqslant 0$ y resulta que la sucesión $\{na_{n+1}\}$ es creciente para $n \geqslant k$, luego $na_{n+1} \geqslant ka_{k+1}$, es decir, $a_{n+1} \geqslant ka_{k+1}\dfrac{1}{n}$ para todo $n \geqslant k$, y, por el criterio de comparación, deducimos que $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ es divergente.

La utilidad de los criterios de convergencia para series de términos positivos se debe en gran parte al siguiente resultado.

Proposición

Si la serie $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$ es convergente, entonces también lo es $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

Demostración

Pongamos $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $B_n = |a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|$. *Puesto que* $\{B_n\}$ *es convergente, dado* $\varepsilon > 0$, *la condición de Cauchy nos dice que existe* $n_o \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\left|B_q - B_p\right| = \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2}, \text{ para todos } p,q \in \mathbb{N} \text{ tales que } q > p \geqslant n_o.$$

Deducimos que para todos $p,q \in \mathbb{N}$ *tales que* $q > p \geqslant n_o$ *se verifica que*

$$\left|A_q - A_p\right| = \left|a_{p+1} + a_{p+2} + \cdots + a_q\right| \leqslant \sum_{k=p+1}^{q} |a_k| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

Lo que prueba que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ *cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente.*

Es usual utilizar la siguiente terminología.

Convergencia absoluta

Se dice que la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ *es* ***absolutamente convergente****, si la serie de término general* $|a_n|$*, es decir la sucesión* $\{|a_1| + |a_2| + \cdots + |a_n|\}$*, es convergente.*

Con esta terminología, la proposición anterior afirma que una serie absolutamente convergente es convergente. Ahora bien, hay que advertir que una serie puede ser convergente y no ser absolutamente convergente. Veremos ejemplos de este fenómeno enseguida.

Los criterios de convergencia para series de términos positivos se aplican, obvio es decirlo, para estudiar la convergencia absoluta de cualquier serie. Pero, ¿qué hacer cuando una serie no es absolutamente convergente? Naturalmente, podemos intentar comprobar si la serie verifica la condición de Cauchy, pero este procedimiento con frecuencia es complicado. Afortunadamente, se conocen criterios que proporcionan información sobre la convergencia no absoluta. No estudiaremos, por ahora, tales criterios generales y nos limitaremos a considerar unas series particulares conocidas como ***series alternadas****. Se llaman así las series de la forma* $\{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\}$ *donde* $a_n \geqslant 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Criterio de Leibnitz

Supongamos que la sucesión $\{a_n\}$ *es decreciente y convergente a cero.*
Entonces la serie alternada $\{a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n\}$ *es convergente.*

Además, si $A_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots + (-1)^{n+1}a_n$ *y* $S = \lim\{A_n\}$*, se verifica para todo* $n \in \mathbb{N}$ *que* $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$.

Demostración

Es inmediato comprobar que la sucesión $\{A_{2n-1}\}$ *es decreciente y* $\{A_{2n}\}$ *es creciente. Como* $A_2 \leqslant A_{2n} \leqslant A_{2n-1} \leqslant A_1$*, deducimos que ambas sucesiones convergen. Además, como* $A_{2n-1} - A_{2n} = a_{2n} \to 0$*, concluimos que* A_n *converge.*

Sea $S = \text{lím}\,\{A_n\}$. *Puesto que*

$$S = \text{lím}\{A_{2n-1}\} = \text{ínf}\{A_{2n-1} : n \in \mathbb{N}\} = \text{lím}\{A_{2n}\} = \sup\{A_{2n} : n \in \mathbb{N}\}$$

se sigue que $A_{2p} \leqslant S \leqslant A_{2q+1}$, $(p, q \in \mathbb{N})$, *de donde:*

$$0 \leqslant S - A_{2n} \leqslant a_{2n+1}\,, \quad y \quad -a_{2n} \leqslant S - A_{2n-1} \leqslant 0$$

es decir, $|S - A_n| \leqslant a_{n+1}$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Terminología y notaciones tradicionales para series

La terminología y la notación que se usan para series son, con frecuencia, confusas pero es conveniente conocerlas pues son las que aparecen en casi todos los textos. De hecho, el propio concepto de serie suele definirse de forma bastante confusa, unas veces como un par de sucesiones y otras como una suma infinita. Si en un libro lees una definición de serie de este estilo lo mejor es que no le hagas ningún caso.

Respecto a la notación usada, para empezar, la serie de término general a_n *que hemos notado como* $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, *suele representarse por los símbolos* $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots$, *y también por* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *El primero, pese a su ambigüedad, puede ser aceptable. No así el segundo por lo que ahora se dirá. Es frecuente llamar al número* $A_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$ ***suma parcial n-ésima*** *de la serie y, cuando la serie es convergente, a su límite se le llama* ***suma de la serie*** *que ¡también! suele representarse por* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. *De esta manera en muchos textos un número,* $\text{lím}\,\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, *y una sucesión,* $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, *se representan igual, lo que no es aceptable.*

Nótese que el límite de una serie convergente, $L = \text{lím}\,\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$, *no es, como a veces se dice, la "suma de los infinitos términos" de la sucesión* $\{a_n\}$. *¿Qué sentido tiene eso de "sumar infinitos términos"? Ninguno, desde luego. Lo que dicho número* L *verifica es que* $|L - \sum_{j=1}^{n} a_j|$ *se conserva menor que cualquier número* $\varepsilon > 0$, *a partir de un cierto* $n \in \mathbb{N}$ *en adelante. Si bien, puede ser sugerente la interpretación de* L *como "la suma de los términos de la sucesión* $\{a_n\}$*" no hay que olvidar que esto no es más que una forma de hablar, y que el límite de una serie convergente es, justamente, el límite de una sucesión y no debe confundirse con una operación algebraica.*

Una notación cómoda y matemáticamente correcta para la serie $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$ *es* $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n$. Cuando dicha serie sea convergente, *representaremos su límite por*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{n\geqslant 1} a_n\,.$$

Nótese que $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ ***es la sucesión que a cada*** $n\in\mathbb{N}$ ***hace corresponder el número*** $\sum_{j=1}^{n} a_j$ *y que* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^{n} a_j$. *En consecuencia el símbolo* $\sum_{n\geqslant 1} a_n$ *siempre tiene sentido (es una sucesión) pero el símbolo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *sólo tiene sentido si la serie converge. El posible inconveniente de estas notaciones es que centran demasiado la atención en la sucesión* $\{a_n\}$ *con lo que se corre el riesgo de olvidar que lo que estamos estudiando es la sucesión* $\{a_1 + a_2 + \cdots + a_n\}$.

Decíamos al principio de esta introducción que las series son "un tipo particular *de sucesiones". Pues bien, esto no es del todo cierto:* cualquier sucesión puede considerarse como una serie. *En efecto, dada una sucesión,* $\{x_n\}$, *definamos la sucesión* $\{y_n\}$ *por* $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$ *y, en general,* $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$. *Es evidente que la sucesión* $\{x_n\} = \{y_1 + y_2 + \cdots + y_n\}$ *es la serie de término general* y_n. *En resumen, series y sucesiones son lo mismo: toda serie es una sucesión y toda sucesión es una serie.* ***Lo que distingue a la teoría de series es el punto de vista específico de su estudio****, pero sus resultados pueden aplicarse a cualquier sucesión.*

5.2. Relación de ejercicios

1. *Estúdiese la convergencia de las siguientes series:*

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{3^n n!}; \qquad \sum_{n\geqslant 2}\frac{n^{\log n}}{(\log n)^n}$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{n^2+1}{n^2+n+1}\right)^{n^2}; \qquad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(n+1)^n}{n^{n+2}}$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\log\left(\frac{(n+1)^2}{n(n+2)}\right); \qquad \sum_{n\geqslant 1}(n^{1/n^2}-1)$$

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{3^n n!}{\sqrt[3]{n}\,5\cdot 8\cdot 11\cdots(5+3n)}; \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 3\cdots(n+2)}{5\cdot 6\cdots(n+5)}\right)^{1/2}$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n}\left(e-(1+1/n)^n\right); \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\log(1+1/n)\right)$$

$$\sum_{n\geqslant 1}(n\ \mathrm{sen}(1/n))^{n^3} \qquad \sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n)}{5\cdot 7\cdots(2n+3)}\right)^{\alpha}, \quad (\alpha\in\mathbb{R})$$

2. *Estúdiese la convergencia absoluta y la convergencia no absoluta de las series:*

   a) $\displaystyle\sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{\log(n+2)}{n+2}$

   b) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}\left(\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}\right)^{\alpha}, \quad (\alpha\in\mathbb{R})$

3. *Sea* $\alpha\in\mathbb{R}$. *Pruébese que la función* $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^{\alpha}}$ $(x>0)$ *es creciente siempre que* $\alpha<1$. *Aplíquese este resultado para estudiar la convergencia no absoluta de la serie*

$$\sum_{n\geqslant 1}(-1)^{n+1}n^{\alpha}(e^{\frac{1}{n}}-1)$$

¿Para qué valores de α *es dicha serie absolutamente convergente?.*

Capítulo 6

Sucesiones y series de Funciones

6.1. Desarollo teórico

Una sucesión de funciones es una aplicación *que a cada número natural n hace corresponder una función f_n. Supondremos en lo que sigue que las funciones f_n son funciones reales definidas en un intervalo I. Usaremos el símbolo $\{f_n\}$ para representar la sucesión de funciones dada por $n \mapsto f_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Ejemplos

Sea $\{f_n\}$ la sucesión de funciones definida por:

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1+x^{2n}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \sqrt{x^2 + \frac{1}{n}}$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = nx(1-x)^n$$

$$f_n : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

$$f_n :]0,1[\longrightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{n\ \mathrm{e}^{nx}}{x(1-x)^n}$$

Convergencia puntual

Dado $x \in I$ se dice que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ *converge puntualmente en* x, *si* la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ *es convergente.*

El conjunto $\mathcal{C}$ de todos los puntos $x \in I$ en los que la sucesión de funciones $\{f_n\}$ converge puntualmente, se llama ***campo de convergencia puntual****. Simbólicamente:*

$$\mathcal{C} = \{x \in I : \{f_n(x)\} \text{ converge}\}$$

Supuesto que $\mathcal{C} \neq \emptyset$, la función $f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$$

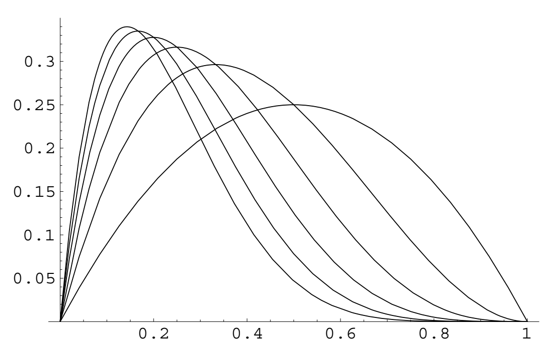
se llama ***función límite puntual*** *de la sucesión $\{f_n\}$.*

Para entender la definición de convergencia puntual y en general en todo este capítulo, es muy importante *no confundir la sucesión de funciones $\{f_n\}$ con la sucesión de números reales $\{f_n(x)\}$ obtenida evaluando las funciones de dicha sucesión en un número $x \in I$. Tampoco debes olvidar que en una sucesión la variable es siempre $n \in \mathbb{N}$ y nunca $x \in I$. Así, la sucesión $\{f_n(x)\}$ es la aplicación que a cada número natural $n \in \mathbb{N}$ (la variable) le asigna el número real $f_n(x)$* **donde** x **está fijo**.

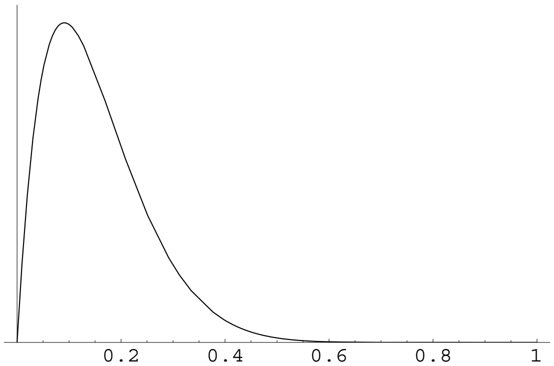
Ejemplo 1 *Sea la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definida por:*

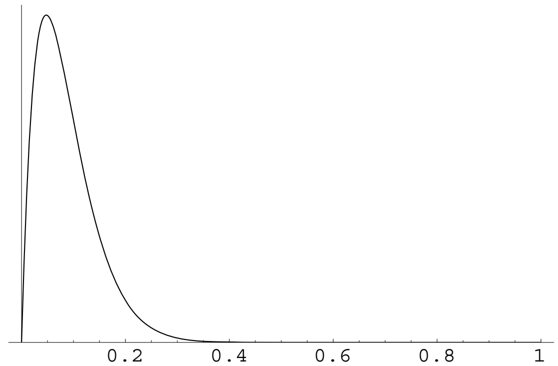
$$f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$f_n(x) = nx(1-x)^n$$

Observa que si $x = 0$ o $x = 1$, la sucesión $\{f_n(0)\} = \{f_n(1)\} = \{0\}$ es, evidentemente, convergente a 0. Si $0 < x < 1$ entonces $0 < 1-x < 1$ y se verifica que $\{f_n(x)\} \to 0$ porque es una sucesión de la forma $\{n^p\lambda^n\}$ donde $|\lambda| < 1$. Deducimos que el campo de convergencia puntual de esta sucesión es el conjunto $\mathcal{C} = [0,1]$ y la función límite puntual es la función idénticamente nula, $f(x) = 0$ para todo $x \in [0,1]$. Observa las gráficas de las primeras seis funciones de esta sucesión.



Fíjate cómo por el extremo derecho del intervalo las gráficas se van pegando al eje de abscisas pero su comportamiento es muy diferente en el extremo izquierdo. Ello es así porque cuando $1-x$ es pequeño (es decir, x está cerca de 1) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge muy rápidamente a cero, pero cuando $1-x$ está próximo a 1 (es decir, x está cerca de 0) la sucesión $\{f_n(x)\}$ converge lentamente a cero. Observa las gráficas de las funciones f_{10} y f_{20}.





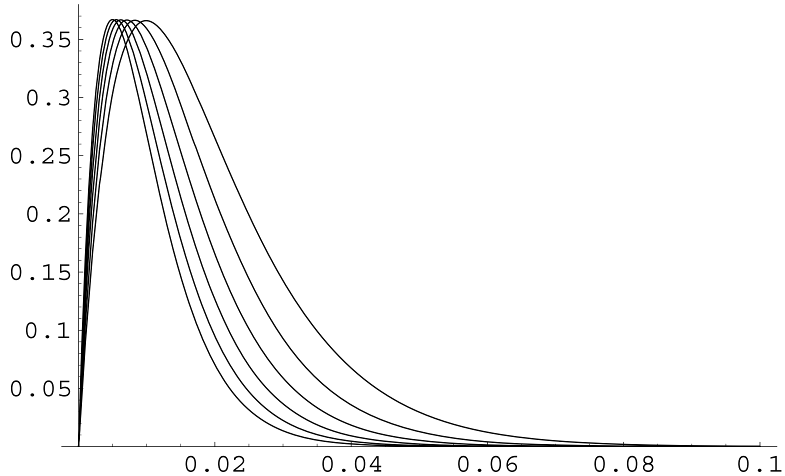
¿Te parece que la función f_{20} *está* muy próxima *a la función límite puntual* $f \equiv 0$*? Observa que, aunque para cada* $x \in [0,1]$ *es* $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$*, la función* f_n *no se acerca mucho a la función límite puntual* $f \equiv 0$.

Para evitar ambigüedades necesitamos precisar qué entendemos por proximidad *entre dos funciones. Para ello, considera dos funciones* $f, g : I \to \mathbb{R}$*. Dichas funciones son iguales cuando* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in I$ *o, lo que es igual, cuando* $\text{máx}\{|f(x) - g(x)| : x \in I\} = 0$*. En general, el número* $\text{máx}\{|f(x) - g(x)| : x \in I\}$ *proporciona una buena idea de la proximidad entre las funciones* f *y* g *pues dicho número es tanto más pequeño cuanto más cercanas estén las gráficas de las dos funciones.*

Volviendo al ejemplo anterior, con $f_n(x) = nx(1-x)^n$ *y* $f \equiv 0$*, podemos calcular fácilmente el número* $\text{máx}\{|f_n(x) - f(x)| : x \in [0,1]\} = \text{máx}\{f_n(x) : x \in [0,1]\}$*. Basta derivar* f_n *para comprobar que la función* f_n *alcanza su máximo absoluto en el intervalo* $[0,1]$ *en el punto* $x_n = \frac{1}{n+1}$*. Luego*

$$\text{máx}\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = f_n(x_n) = \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}$$

y la sucesión $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ *converge a* $1/\mathrm{e}$*. Fíjate en que* $\lim\limits_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ *pero* $\lim\limits_{n\to\infty} \text{máx}\{f_n(x) : x \in [0,1]\} = 1/\mathrm{e} > 0$*, es decir, las funciones* f_n *no se aproximan a la función nula. De hecho, como la sucesión* $\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}\right\}$ *es creciente, cuanto mayor sea* n *mayor es la distancia entre la función* f_n *y la función nula. Observa cómo son las gráficas de las funciones* f_n *cerca de cero para* $n = 100, 120, 140, 160, 180, 200$.



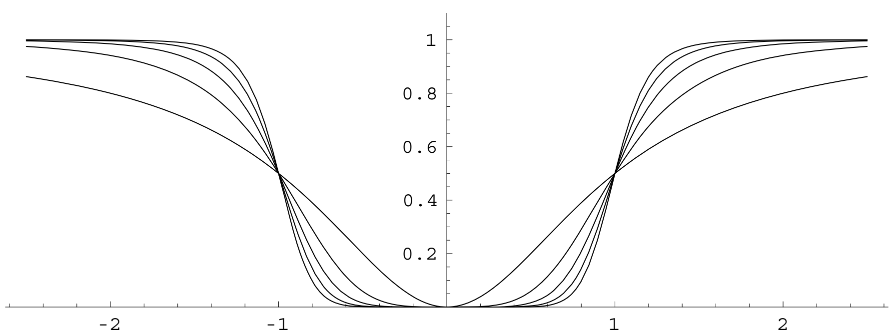
Ejemplo 2 *Sea la sucesión de funciones* $\{f_n\}$*, donde* $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *es la función dada por*

$$f_n(x) = \frac{x^{2n}}{1 + x^{2n}}$$

Es claro que si $|x| < 1$ *se tiene que* $\{f_n(x)\} \to 0$*, y si* $|x| > 1$ *se tiene que* $\{f_n(x)\} \to 1$*. Para* $x = \pm 1$ *es* $\{f_n(\pm 1)\} = \{1/2\}$ *que, evidentemente, converge a* $1/2$*. Por tanto, el campo de convergencia puntual de* $\{f_n\}$ *es* $\mathcal{C} = \mathbb{R}$*, y la función límite puntual está definida por*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = \begin{cases} 1 \text{ si } |x| > 1 \\ 1/2 \text{ si } |x| = 1 \\ 0 \text{ si } |x| < 1 \end{cases}$$

Aquí ocurre que la función límite puntual es discontinua (tiene discontinuidades de salto en -1 y en 1) a pesar de que las funciones de la sucesión son continuas. Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Tenemos que

$$\begin{aligned} \max\{|f(x) - f_n(x)| : x \in \mathbb{R}\} &\geqslant \left| f(1 + 1/2n) - f_n(1 + 1/2n) \right| \\ &= 1 - \frac{(1 + 1/2n)^{2n}}{1 + (1 + 1/2n)^{2n}} \longrightarrow 1 - \frac{\mathrm{e}}{1 + \mathrm{e}} = \frac{1}{1 + \mathrm{e}}. \end{aligned}$$

Por tanto, la distancia entre la función f_n *y la función límite puntual,* f*, no converge a cero.*

Este ejemplo y el anterior ponen de manifiesto que la convergencia puntual de $\{f_n\}$ *a* f *no proporciona una buena idea de la aproximación entre las funciones* f_n *y* f. *Además las propiedades de continuidad de las funciones* f_n *pueden no conservarse para la función límite puntual. Esto lleva a definir un tipo de convergencia mejor que la convergencia puntual.*

Convergencia Uniforme

Sea J *un intervalo no vacío contenido en el campo de convergencia puntual de la sucesión* $\{f_n\}$. *Y sea* f *la función límite puntual de* $\{f_n\}$. *Se dice que* $\{f_n\}$ *converge uniformemente a* f *en* J *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *(que sólo dependerá de* ε*) tal que para todo* $n \geqslant n_0$ *se verifica que* $\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon$.

Para comprender bien esta definición, analicemos la última desigualdad. Tenemos que:

$$\sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in J\} \leqslant \varepsilon \Leftrightarrow |f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon \ \ \forall x \in J \Leftrightarrow -\varepsilon \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \varepsilon \ \ \forall x \in J \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow f(x) - \varepsilon \leqslant f_n(x) \leqslant f(x) + \varepsilon \ \ \forall x \in J$$

Cuya interpretación gráfica es la siguiente (donde hemos considerado $J = [a, b]$*).*

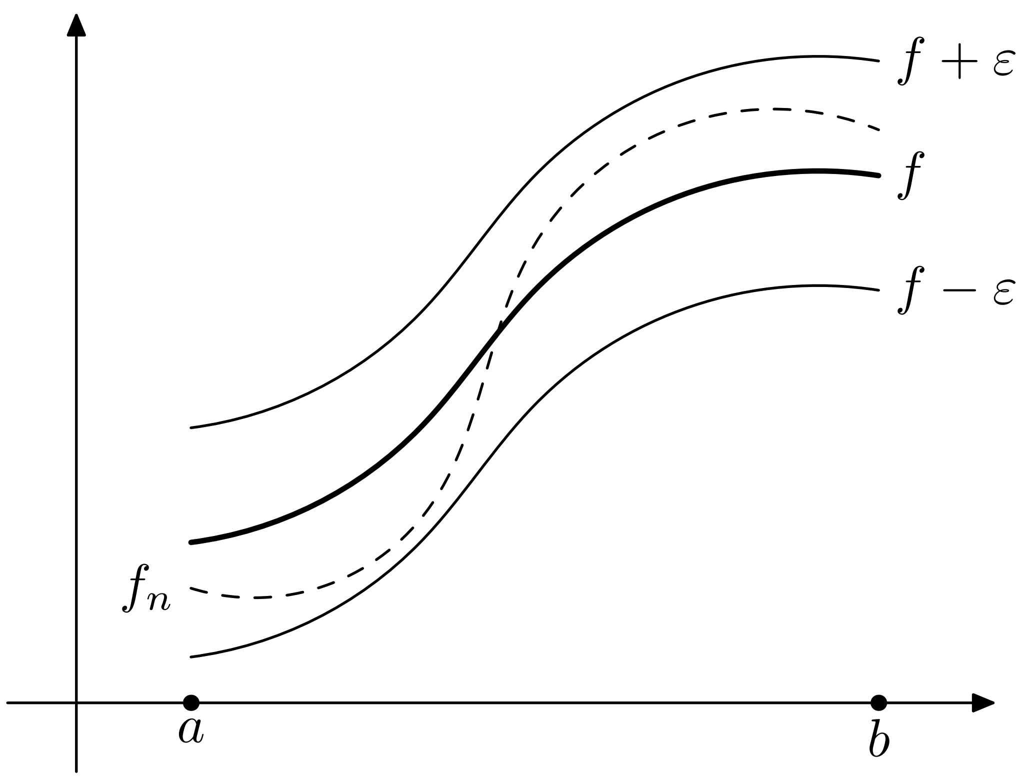


Figura 6.1: Interpretación gráfica de la convergencia uniforme

Esto nos dice que la gráfica de la función f_n *se queda dentro de un* tubo *centrado en la gráfica de* f *de anchura* 2ε *(ver figura 6.1). Ahora debe estar claro que en el ejemplo 1 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo del tipo* $[0, a]$ *con* $0 < a < 1$ *y en el ejemplo 2 no hay convergencia uniforme en ningún intervalo que contenga a* -1 *o a* 1.

Observa que la diferencia entre la convergencia puntual y la convergencia uniforme en J *es la siguiente.*

Decir que $\{f_n\}$ *converge a* f *puntualmente en* J *significa que:*

• *Fijas un* $x \in J$*;*

• *La correspondiente sucesión de números reales* $\{f_n(x)\}$ *converge a* $f(x)$*, es decir: para todo* $\varepsilon > 0$*, existe un número natural* n_0 *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant n_0$ *se verifica que* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$*.*

Naturalmente, el número n_0 *dependerá del* ε *y, en general,* ***también de*** x *porque si cambias* x *por otro punto* $z \in J$ *la sucesión* $\{f_n(z)\}$ *es distinta de* $\{f_n(x)\}$ *y el* n_0 *que vale para una no tiene por qué valer también para la otra.*

Decir que $\{f_n\}$ *converge a* f *uniformemente en* J *significa que:*

• *Fijas un* $\varepsilon > 0$*;*

• *Existe un número natural* n_0 *tal que para todo* $n \in \mathbb{N}$ *con* $n \geqslant n_0$ *se verifica que* $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$ ***para todo*** $x \in J$*.*

Es decir, en la convergencia uniforme, hay un mismo número n_0 *que es válido simultáneamente para todos los* $x \in J$*.*

En la práctica, el estudio de la convergencia puntual se reduce a calcular el límite $\lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\}$*, lo que suele ser muy sencillo. Mientras que para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo* J*, lo que se hace es calcular, con las técnicas usuales de derivación, el* máximo absoluto *de* $|f_n(x) - f(x)|$ *en* J*. La presencia del valor absoluto en* $|f_n(x) - f(x)|$ *es incómoda para derivar por lo que conviene quitarlo, lo que casi siempre puede hacerse con facilidad. Supongamos que el* máximo absoluto *de* $|f_n(x) - f(x)|$ *en* J *se alcanza en un punto* $c_n \in J$*. Entonces si* $\lim_{n\to\infty}\{f_n(c_n) - f(c_n)\} = 0$*, hay convergencia uniforme en* J*.*

Ejemplo 3 *Estudiemos la convergencia uniforme en* $\mathbb{R}_o^+$ *y en intervalos de la forma* $[a, +\infty[$*,* $(a > 0)$*, de la sucesión de funciones* $\{f_n\}$ *definidas para todo* $x \in \mathbb{R}_o^+$ *por* $f_n(x) = n^2 x\, \mathrm{e}^{-n x}$*.*

Observa que $f_n(0) = 0$*, y si* $x > 0$*,*

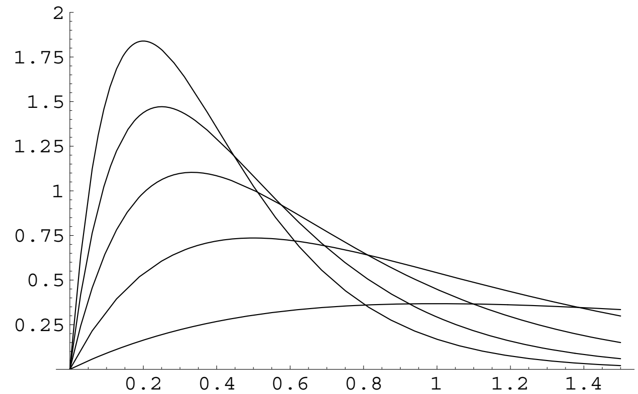
$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \lim_{n\to\infty} n^2 (\mathrm{e}^{-x})^n = 0$$

(porque es una sucesión de la forma $n^p \lambda^n$ *donde* $0 < |\lambda| < 1$*). Por tanto, el campo de convergencia puntual es* $\mathcal{C} = \mathbb{R}_o^+$*, y la función límite puntal está dada por* $f(x) = \lim_{n\to\infty}\{f_n(x)\} = 0$ *para todo* $x \in \mathbb{R}_o^+$*.*

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$*. Observa que* $f_n(x) \geqslant 0$*, por lo que* $|f_n(x) - f(x)| = f_n(x)$*. Ahora, como,* $f_n'(x) = n^2 \mathrm{e}^{-n x}(1 - n x)$*, se deduce que* $f_n'(x) > 0$ *para* $0 \leqslant x < 1/n$*, y* $f_n'(x) < 0$ *para* $x > 1/n$*. Luego* $f_n(x) \leqslant f_n(1/n)$ *para todo* $x \geqslant 0$*. Deducimos que* $f_n(1/n) = \max\{f_n(x) : x \in \mathbb{R}_o^+\}$*, y como* $f_n(1/n) = n/e$*, sucesión que, evidentemente, no converge a 0, concluimos que no hay convergencia uniforme en* $\mathbb{R}_o^+$*.*

Estudiemos si hay convergencia uniforme en un intervalo de la forma $[a, +\infty[$*, con* $a > 0$*. Por lo antes visto, sabemos que la función* f_n *es decreciente en el intervalo* $[1/n, +\infty[$*. Sea* n_o *un número natural tal que* $\frac{1}{n_o} < a$*. Entonces, para todo* $n \geqslant n_o$*, tenemos que* $[a, +\infty[\subseteq [1/n, +\infty[$*, por lo que,* $\max\{f_n(x) : x \in [a, +\infty[\} = f_n(a)$*. Como* $\lim\{f_n(a)\} = 0$*, concluimos que hay convergencia uniforme en* $[a, +\infty[$*.*

Observa las gráficas de las primero cinco funciones de la sucesión.



Puedes comprobar fácilmente, integrando por partes, que $\int_0^1 n^2 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,dx = 1-(1+n)\,\mathrm{e}^{-n}$ *para todo* $n\in\mathbb{N}$. *Por tanto*

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx = 1 \neq 0 = \int_0^1 (\lim_{n\to\infty} f_n(x))dx$$

Es decir, en general, no se puede permutar la integración con el límite puntual.

El concepto de convergencia uniforme requiere algunas precisiones importantes.

• *La convergencia uniforme se refiere siempre a un conjunto. No tiene sentido decir que* "la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente" *si no se indica inmediatamente a continuación el conjunto en el que afirmamos que hay convergencia uniforme. Además, siempre hay convergencia uniforme en subconjuntos finitos del campo de convergencia puntual (si no sabes probarlo es que no has entendido la definición de convergencia uniforme). Por ello, sólo tiene interés estudiar la convergencia uniforme en conjuntos infinitos, por lo general en intervalos.*

• *No existe* "el campo de convergencia uniforme". *Es decir, el concepto de* campo de convergencia puntual *no tiene un análogo para la convergencia uniforme. La razón es que no tiene por qué existir un* más grande *conjunto en el que haya convergencia uniforme. Así, en el ejemplo anterior, hay convergencia uniforme en intervalos de la forma* $[a,+\infty[$ *con* $a>0$. *La unión de todos ellos es* $\mathbb{R}^+$ *y en* $\mathbb{R}^+$ *no hay convergencia uniforme.*

Condición de Cauchy para la convergencia uniforme

La sucesión $\{f_n\}$ *converge uniformemente en* J *si, y sólo si, para todo* $\varepsilon>0$, *existe un número natural* n_0 *tal que para todos* $n,m\geqslant n_0$ *se verifica que* $\sup\{|f_n(x)-f_m(x)| : x\in J\}\leqslant\varepsilon$

La utilidad de esta condición es que es intrínseca a la sucesión, es decir, no involucra a la función límite.

A continuación enunciamos una condición que implica que no hay convergencia uniforme.

Proposición. *Supongamos que hay una sucesión* $\{z_n\}$ *de valores de* J *tal que la sucesión* $\{|f_n(z_n)-f(z_n)|\}$ *no converge a* 0, *entonces* $\{f_n\}$ *no converge uniformemente a* f *en* J.

Series de funciones

Dada una sucesión de funciones $\{f_n\}$, *podemos formar otra,* $\{F_n\}$, *cuyos términos se obtienen sumando* consecutivamente *los de* $\{f_n\}$. *Es decir,* $F_1 = f_1$, $F_2 = f_1 + f_2$, $F_3 = f_1 + f_2 + f_3$,... *En general,* $F_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$, *esto es, la sucesión* $\{f_1 + f_2 + \cdots + f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *La sucesión* $\{F_n\}$ *así definida se llama* serie de término general f_n *y la representaremos por el símbolo* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$. *Los conceptos de convergencia puntual y uniforme para sucesiones de funciones se aplican igual para series. Así el campo de convergencia puntual de la serie* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *cuyas funciones* f_n *suponemos definidas en un intervalo* I, *es el conjunto* $\mathcal{C} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ *es convergente*$\}$. *La función límite puntual, llamada* función suma *de la serie, es la función* $F\colon \mathcal{C} \to \mathbb{R}$ *dada por* $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ *para todo* $x \in \mathcal{C}$. *La única novedad es que ahora también podemos considerar el* campo de convergencia absoluta *de la serie, que es el conjunto* $\mathcal{A} = \{x \in I : \sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ *es convergente*$\}$. *El siguiente resultado es el más útil para estudiar la convergencia uniforme y absoluta de una serie.*

Criterio de Weierstrass. *Sea* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *una serie de funciones y* A *un conjunto tal que para todo* $x\in A$ *y todo* $n\in\mathbb{N}$ *se tiene que* $|f_n(x)| \leqslant \alpha_n$, *donde la serie* $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ *es convergente. Entonces* $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge uniformemente y absolutamente en* A.

Demostración

Es inmediato, en virtud del criterio de comparación para series de términos positivos, que la serie $\sum_{n\geqslant 1} |f_n(x)|$ *converge para todo* $x \in A$. *Esto implica que la serie* $\sum_{n\geqslant 1} f_n(x)$ *converge para todo* $x \in A$. *Veamos que la convergencia es uniforme. Utilizaremos el criterio de Cauchy.*

Como $\sum_{n\geqslant 1} \alpha_n$ *es convergente cumplirá la condición de Cauchy, esto es, dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $n_0 \in \mathbb{N}$ *tal que si* $n, m \geqslant n_0$ *entonces*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \alpha_k - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\right| = (n > m) = \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$$

Deducimos que

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f_k(x) - \sum_{k=1}^{m} f_k(x)\right| = \left|\sum_{k=m+1}^{n} f_k(x)\right| \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} |f_k(x)| \leqslant (\forall x \in A) \leqslant \sum_{k=m+1}^{n} \alpha_k < \varepsilon$$

Concluimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *cumple la condición de Cauchy para la convergencia uniforme en* A.

Los resultados siguientes, relativos a la convergencia uniforme, se aplican, claro está, tanto a sucesiones como a series de funciones.

Conservación de la continuidad

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un intervalo J y que las funciones f_n son todas ellas continuas en J. Se verifica entonces que la función f es continua en J.

Demostración

Sea $a \in J$. Dado $\varepsilon > 0$, la hipótesis de convergencia uniforme implica que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant n_0$ se verifica que $|f_n(u) - f(u)| \leqslant \varepsilon/3$ para todo $u \in J$. Tenemos:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| + |f_{n_0}(a) - f(a)|$$

Pero por la forma en que hemos tomado n_0 se sigue que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{2\varepsilon}{3} + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \tag{*}$$

Además, como por hipótesis f_{n_0} es continua en a , se verifica que existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in J$ con $|x - a| < \delta$ es $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(a)| \leqslant \varepsilon/3$, lo que, en virtud de (*) implica que:

$$|f(x) - f(a)| \leqslant \frac{3\varepsilon}{3} = \varepsilon$$

Resumiendo, hemos probado que dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, tal que si tomamos $|x - a| < \delta$ y $x \in J$ entonces $|f(x) - f(a)| \leqslant \varepsilon$, que es, precisamente, la continuidad de f en a.

Como la continuidad de f en $a \in J$ se expresa por $f(a) = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (\lim_{n \to \infty} f_n(x))$ y, por otra parte, por ser f_n continua en a, $f(a) = \lim_{n \to \infty} f_n(a) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to a} f_n(x))$; el resultado anterior nos dice que

$$\lim_{x \to a} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to a} f_n(x))$$

El ejemplo 2 anterior con $a = 1$ o $a = -1$ muestra que esta igualdad puede ser falsa si no hay convergencia uniforme.

Permutación de la integración con el límite uniforme

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en un intervalo $[a, b]$ y que las funciones f_n son todas ellas continuas en $[a, b]$. Se verifica entonces que

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b (\lim_{n \to \infty} f_n(x))dx$$

Demostración

Sea $f(x) = \lim_{n\to\infty} \{f_n(x)\}$*. La hipótesis de convergencia uniforme nos dice que dado* $\varepsilon > 0$ *existe un* n_0 *tal que para todo* $n > n_0$ *se cumple:*

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant \varepsilon \quad \textit{para todo } x \textit{ de } [a,b]$$

Así pues, si $n > n_0$ *tenemos:*

$$\left|\int_a^b f(x)dx - \int_a^b f_n(x)dx\right| = \left|\int_a^b [f(x) - f_n(x)]dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x) - f_n(x)|dx \leqslant \int_a^b \varepsilon dx = \varepsilon(b-a)$$

Al cumplirse esto para todo $\varepsilon > 0$ *se sigue que*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx$$

En particular, si una serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n$ *converge uniformemente en* $[a,b]$ *se verifica que:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\right)dx$$

Ejemplo 4 *Para cada* $n \in \mathbb{N}$ *sea* $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ *la función dada por* $f_n(x) = x^n(\log x)^2$*, y* $f_n(0) = 0$*. Estúdiese si la serie* $\sum f_n$ *converge uniformemente en* $[0,1]$ *y dedúzcase que*

$$\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1-x}dx = 2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^3}$$

Observa que f_n *es continua y positiva en* $[0,1]$ *y se anula en los extremos del intervalo. Como* $f_n'(x) = (n\,\log x + 2)x^{n-1}\log x$*, se sigue que en el punto* $c_n = \exp(-2/n)$ *la función* f_n *alcanza un máximo absoluto en* $[0,1]$*. Luego* $|f_n(x)| = f_n(x) \leqslant f_n(c_n) = \mathrm{e}^{-2}\,4/n^2$ *y, puesto que la serie* $\sum \frac{4\,\mathrm{e}^{-2}}{n^2}$ *es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que* $\sum f_n$ *converge uniformemente en* $[0,1]$*. En consecuencia, se verificará que* $\int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1 f_n(x)\,dx$*. Puesto que*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \frac{x(\log x)^2}{1-x} \quad \textit{y} \quad \int_0^1 f_n(x)\,dx = 2\frac{1}{(n+1)^3}$$

como fácilmente puedes comprobar integrando por partes, se deduce la igualdad del enunciado.

La convergencia uniforme no conserva la derivabilidad. Esto es fácil de entender si consideras que puedes sacar pequeños dientes de sierra a la gráfica de una función derivable con lo que resulta una nueva función no derivable y arbitrariamente próxima a la primera. Por ello, el siguiente resultado tiene hipótesis más exigentes que los anteriores.

Derivabilidad y convergencia uniforme

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones definidas en un intervalo I, y supongamos que:

a) f_n *es derivable en I para todo n.*
b) $\{f_n\}$ *converge uniformemente a f en I.*
c) $\{f_n'\}$ *converge uniformemente a g en I*

Entonces f es derivable en I y $g(x) = f'(x)$ para todo $x \in I$.

Demostraremos este resultado en el caso particular de que las funciones f_n tengan derivada primera continua en I. En tal caso, fijemos un punto $a \in I$. Ahora, para $x \in I$, en virtud del teorema fundamental del Cálculo, tenemos que

$$f_n(x) = f_n(a) + \int_a^x {f_n}'(t)dt$$

Tomando límites y haciendo uso del resultado anterior, deducimos que

$$f(x) = f(a) + \int_a^x g(t)dt$$

Una nueva aplicación del teorema fundamental del Cálculo nos dice ahora que f es derivable en I y que $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in I$.

El teorema anterior suele enunciarse de una forma más general en apariencia. Tú mismo puedes deducirla a partir del siguiente resultado que se prueba, con algún trabajo, haciendo uso del teorema del valor medio.

Proposición

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones derivables en un intervalo I. Supongamos que la sucesión $\{f_n'\}$ converge uniformemente en I a una función g y que hay un punto $a \in I$ tal que $\{f_n(a)\}$ es convergente. Entonces la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en todo intervalo acotado contenido en I.

Teorema de Stone–Weierstrass (1868)

Toda función continua en un intervalo cerrado y acotado es límite uniforme en dicho intervalo de una sucesión de funciones polinómicas.

Series de potencias

Dados un número real, $a \in \mathbb{R}$, y una sucesión de números reales, $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$, sea $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la función dada para todo $x \in \mathbb{R}$ por $f_n(x) = c_n(x-a)^n$ y, por convenio, $f_0(x) = c_0$. La serie de funciones $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ se llama serie de potencias centrada en a. La sucesión $\{c_n\}_{n\geqslant 0}$ se llama ***sucesión de coeficientes de la serie****. El coeficiente c_0 se llama* término independiente *de la serie. Suele usarse, y nosotros también seguiremos la costumbre, la notación $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ para representar la serie de potencias centrada en a con coeficientes c_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$.*

Un tipo particular de series de potencias son las ***series de Taylor****. Dada una función f que tiene derivadas de todo orden en un punto a, la serie de potencias*

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n}(a)}{n!}(x-a)^n$$

se llama serie de Taylor de f en a. Recuerda que, por convenio, $f^{(0} \equiv f$ y $0! = 1$.

Observa que esta serie de Taylor es *la sucesión de los polinomios de Taylor de f en a. Recuerda que el polinomio de Taylor de orden n de f en a es la función polinómica dada por*

$$T_n(f,a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k}(a)}{k!}(x-a)^k$$

El resultado básico para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente.

Lema de Abel

Sea $\rho > 0$ y supongamos que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ está mayorada. Entonces se verifica que la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ converge absolutamente en el intervalo $]a-\rho, a+\rho[$ y converge uniformemente en todo intervalo cerrado y acotado contenido en $]a-\rho, a+\rho[$.

Demostración

Por hipótesis, existe $M > 0$ tal que $|c_n|\rho^n \leqslant M$ para todo n. Sea $0 < r < \rho$. Será suficiente probar que la serie converge absolutamente y uniformemente en el intervalo $[a-r, a+r]$. Aplicaremos para ello el criterio de Weierstrass. Para todo $x \in [a-r, a+r]$, tenemos que:

$$|c_n(x-a)^n| = |c_n|\rho^n \frac{|x-a|^n}{\rho^n} \leqslant M \leqslant M\frac{r^n}{\rho^n} = M\left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

y basta tener en cuenta que la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente por ser una serie numérica de razón positiva $\frac{r}{\rho} < 1$.

El resultado anterior nos lleva, de forma natural, a considerar el más grande $\rho > 0$ tal que la sucesión $\{|c_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

Radio de convergencia de una serie de potencias

Consideremos el conjunto

$$A = \{\rho \geq 0 : \textit{ la sucesión } \ \{|c_n|\rho^n\} \ \textit{ está mayorada}\}$$

Observa que $A \neq \emptyset$ ya que el $0 \in A$. Si A está mayorado definimos $R = \sup(A)$, si no lo está definimos $R = +\infty$. Se dice que R es el radio de convergencia *de la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$. El intervalo $I =]a-R, a+R[$ o, cuando $R = +\infty$, el intervalo $I = \mathbb{R}$, se llama* intervalo de convergencia *de la serie.*

La razón de esta terminología queda clara en el siguiente resultado, fácil consecuencia del Lema de Abel.

Convergencia de una serie de potencias

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia no nulo y sea* I *el intervalo de convergencia de la serie. Se verifica que la serie converge absolutamente en todo punto de* I *y converge uniformemente en cualquier intervalo cerrado y acotado contenido en* I. *Además la serie no converge para valores de* $x \in \mathbb{R}$ *tales que* $|x-a| > R$.

Este resultado nos dice que el estudio de la convergencia de una serie de potencias se reduce a calcular el radio de convergencia. La única duda corresponde a los extremos del intervalo de convergencia, los puntos $a-R$ *y* $a+R$, *en los cuales puede darse cualquier comportamiento como veremos enseguida con ejemplos.*

Fíjate que el radio de convergencia sólo depende de la sucesión de coeficientes de la serie y que el punto a *en que la serie está centrada no interviene para nada en la definición del radio de convergencia.*

Todo esto está muy bien, dirás, pero ¿cómo se calcula el radio de convergencia? Desde luego, la definición que hemos dado de radio de convergencia tiene utilidad teórica pero no sirve para calcularlo. Hay una fórmula general para calcular el radio de convergencia pero este curso no la veremos y vamos a limitarnos a dos casos particulares.

Cálculo del radio de convergencia

Podemos aplicar los criterios del cociente y de la raíz para estudiar la convergencia absoluta de una serie de potencias. Ello permite deducir con facilidad los siguientes dos resultados.

Criterio del cociente

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\dfrac{|c_{n+1}|}{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L=0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=+\infty$, *si* $L=+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=0$ *y si* $0<L<+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=1/L$.

Criterio de la raíz

Sea $\sum\limits_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias y supongamos que* $\sqrt[n]{|c_n|} \to L$ *donde* $0 \leqslant L \leqslant +\infty$. *Entonces si* $L=0$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=+\infty$, *si* $L=+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=0$ *y si* $0<L<+\infty$ *el radio de convergencia de la serie es* $R=1/L$.

Observa que los criterios anteriores son bastante restrictivos pues, por ejemplo, a la serie $\sum\limits_{n\geqslant 0} x^{2n}$ *no puedes aplicarle ninguno de ellos. En particular, el criterio del cociente no puede aplicarse cuando hay infinitos coeficientes nulos. El siguiente artificio es de bastante utilidad práctica.*

Consideremos una serie de potencias de la forma $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ *donde* q *es un número natural fijo. Para calcular su radio de convergencia podemos hacer* $z=(x-a)^q$ *y calcular el radio de convergencia de la serie* $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$. *Si éste es* $R\in\mathbb{R}^+$, *entonces la* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^{qn}$ *converge para* $|x-a|^q < R$, *es decir, para* $|x-a| < \sqrt[q]{R}$, *luego su radio de convergencia es* $\sqrt[q]{R}$.

El siguiente importante resultado nos dice, entre otras cosas, que si una serie de potencias tiene radio de convergencia no nulo entonces dicha serie es la serie de Taylor de su función suma. Las series de potencias con radio de convergencia nulo suelen llamarse series de potencias triviales. Por tanto: toda serie de potencias no trivial es una serie de Taylor. La demostración utiliza el hecho, fácil de probar, de que la serie $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *y la serie* $\sum_{n\geqslant 1} nc_n(x-a)^{n-1}$, *obtenida derivando término a término la anterior, tienen igual radio de convergencia.*

Las series de potencias pueden derivarse término a término

Sea $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *una serie de potencias con radio de convergencia no nulo* R. *Sea* I *el intervalo de convergencia de la serie y* $f: I\to\mathbb{R}$ *la función suma de la serie definida ara todo* $x\in I$ *por:*

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$$

Entonces se verifica que:

i) f *es indefinidamente derivable en* I.

ii) La derivada de orden k *de* f *está dada para todo* $x\in I$ *por*

$$f^{(k}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)c_n(x-a)^{n-k}$$

En particular, se verifica que $f^{(k}(a)=c_k\cdot k!$, *es decir,* $c_k=\dfrac{f^{(k}(a)}{k!}$ *y, por tanto, la serie de potencias* $\sum_{n\geqslant 0} c_n(x-a)^n$ *coincide con la serie de Taylor en* a *de su función suma.*

Desarrollos en serie de potencias de las funciones elementales

El siguiente problema es importante

Problema

Dada una función f *con derivadas de todos órdenes en un intervalo* I *y un punto* $a\in I$, *¿se verifica que la serie de Taylor de* f *centrada en* a *tiene radio de convergencia no nulo? En caso de que así sea, ¿se verifica que la función suma de la serie de Taylor de* f *coincide con* f?

Contrariamente a lo que, en principio, puede parecer la respuesta a ambas preguntas es, en general, negativa. Un estudio en profundidad de este problema requiere el uso de técnicas de variable compleja que no son propias de este curso. A continuación consideraremos algunas de las funciones más usuales del Cálculo y probaremos que, en determinados intervalos, coinciden con la suma de sus respectivas series de Taylor. La herramienta básica para estudiar la convergencia de una serie de Taylor es, precisamente, el teorema de Taylor. Conviene recordarlo.

Teorema de Taylor

Sea f un función $n+1$ veces derivable en un intervalo I y sean $a, x \in I$ entonces existe un punto $c \in I$ con $|a-c| < |a-x|$ tal que:

$$f(x) = T_n(f,a)(x) + \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1}(c)(x-a)^{n+1}$$

Series de Taylor de la función exponencial

Los polinomios de Taylor de la función exp *son particularmente fáciles de calcular. Puesto que* $\exp^{(k}(0) = \exp(0) = 1$ *para todo k, el polinomio de Taylor de orden n en 0 es:*

$$T_n(\exp, 0)(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

Consideremos la serie

$$\sum_{n \geq 0} \frac{x^n}{n!}$$

Llamando $c_n = \dfrac{1}{n!}$ *tenemos que* $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} = \dfrac{1}{n+1} \longrightarrow 0$*, por tanto la serie converge y su radio de convergencia es $R = +\infty$. Llamemos h a la función suma de la serie:*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Vamos a probar que h es la función exponencial. Por el teorema de derivación tenemos que

$$h'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n x^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = h(x)$$

Acabamos de probar que h es una función que coincide con su derivada, esto es, $h(x) = h'(x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Consideremos ahora la función $g(x) = h(x)\,\mathrm{e}^{-x}$,

$$g'(x) = h'(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = h(x)\,\mathrm{e}^{-x} - h(x)\,\mathrm{e}^{-x} = 0 \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}$$

Como $g'(x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$ tenemos que la función g es constante. Como $g(0) = 1$, deducimos que $g(x) \equiv g(0) = 1$. Concluimos, por tanto, que $h(x) = \exp x$.

La serie de Taylor centrada en un punto a se deduce de la anterior sin más que tener en cuenta que $\exp(x) = \exp(a)\exp(x-a)$.

Series de Taylor del seno y del coseno

Sabemos que:

$$\operatorname{sen}'(x) = \cos(x) = \operatorname{sen}\left(x + \frac{\pi}{2}\right);$$
$$\operatorname{sen}^{(k}(x) = \operatorname{sen}\left(x + k\frac{\pi}{2}\right)$$

Por tanto

$$T_n(\operatorname{sen}, a)(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k$$

Como para todo $z \in \mathbb{R}$ *es* $|\operatorname{sen} z| \leqslant 1$, *el teorema de Taylor implica que:*

$$\left|\operatorname{sen} x - \sum_{k=0}^{n} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k\right| \leqslant \frac{1}{(n+1)!}|x-a|^{n+1}$$

Pero sabemos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} = 0$$

De donde deducimos

$$\operatorname{sen} x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Es decir, la serie de Taylor del seno converge a $\operatorname{sen} x$ *cualquiera sea* $x \in \mathbb{R}$.

Por el teorema de derivación obtenemos la serie del coseno, que también será convergente cualquiera sea $x \in \mathbb{R}$.

$$\cos x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sen}\left(a + (k+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(k-1)!}(x-a)^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos\left(a + k\frac{\pi}{2}\right)}{k!}(x-a)^k \quad \textit{para todo} \quad x \in \mathbb{R}$$

Si hacemos $a = 0$ *tenemos que para todo* $x \in \mathbb{R}$:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1}, \qquad \cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

Series de Taylor de la función logaritmo

Seguiremos el siguiente método. Supongamos una función f *de la que queremos calcular su desarrollo en serie de Taylor centrada en* a. *Supongamos que la derivada de* f, f', *es más "sencilla" que* f *y que conocemos la serie de Taylor de la derivada en un punto* a *(por comodidad supondremos que* $a = 0$*). Entonces el teorema de derivación nos permite obtener la serie de Taylor de* f *integrando término a término la serie de su derivada* f'. *Si*

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in I =]-R, R[)$$

Entonces

$$f(x) = f(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \quad (x \in I =]-R, R[)$$

Para calcular la serie de Taylor de log*, pongamos* $f(x) = \log(1+x)$ *definida para* $x > -1$. *Tenemos que*

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n \quad (|x| < 1)$$

Integrando formalmente esta expresión, definamos para $|x| < 1$*:*

$$h(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$$

Tenemos, en virtud del teorema de derivación, que $h'(x) = f'(x)$ *para todo* $x \in]-1, 1[$*, esto implica que* $h(x) - f(x)$ *es constante y, como* $h(0) - f(0) = 0$*, concluimos que* $f(x) = h(x)$*. Hemos probado así que:*

$$\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1} \quad (|x| < 1)$$

Observa que, efectivamente, $]-1, 1[$ *es el intervalo de convergencia de la serie.*

La serie de Taylor centrada en $a > 0$ *se deduce de lo anterior:*

$$\log(x) = \log(a + (x-a)) = \log a + \log\left(\frac{x-a}{a}\right) = \log a + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)a^{n+1}} (x-a)^{n+1} \quad (|x-a| < a)$$

Observa que la serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ *cuya suma para* $|x| < 1$ *es igual a* $\log(1+x)$ *es también convergente para* $x = 1$ *puesto que se trata de la serie armónica alternada. En esta situación ¿cabe esperar que la igualdad* $\log(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$ *válida, en principio, para* $|x| < 1$ *sea también válida para* $x = 1$*? En este caso particular, la respuesta es afirmativa porque sabemos que* $\log 2 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$*. El siguiente resultado establece que esto es cierto en general.*

Teorema de Abel

Supongamos $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n$ *para todo* $x \in]a-R, a+R[$ *donde* $0 < R < +\infty$. *Supongamos además que la serie* $\sum_{n\geq 0} c_n R^n$ *converge. Entonces se verifica que la serie* $\sum_{n\geqslant 0} c_n (x-a)^n$ *converge uniformemente en el intervalo* $[a, a+R]$. *En consecuencia:*

$$\lim_{\substack{x\to a+R \\ x<a+R}} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n R^n \quad y \quad \int_a^{a+R} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \int_a^{a+R} c_n (x-a)^n dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n+1} R^{n+1}$$

Serie de Taylor de la función arcotangente centrada en cero

Puesto que

$$\operatorname{arc\,tg}'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \quad (|x| < 1)$$

se deduce fácilmente que

$$\operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} \quad (x \in]-1, 1[)$$

Además, como esta serie converge también para $x = 1$, *el teorema de Abel nos dice que:*

$$\lim_{\substack{x\to 1 \\ x<1}} \operatorname{arc\,tg} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \operatorname{arc\,tg} 1 = \frac{\pi}{4}$$

Serie binomial de Newton

Consideremos la función $f(x) = (1+x)^\alpha$*, donde* $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$*, ya que para* $\alpha \in \mathbb{Z}$ *el desarrollo es conocido. Calculemos la serie de Taylor de* f *centrada en* 0*. Tenemos que*

$$\begin{aligned} f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1} \\ f^{(n}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n} \end{aligned}$$

Los coeficientes de la serie serán

$$\frac{f^{(n}(0)}{n!} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} = \binom{\alpha}{n}$$

Por tanto la serie de Taylor de f *es*

$$\sum_{n\geq 0} \binom{\alpha}{n} x^n$$

Calculemos su radio de convergencia

$$c_n = \binom{\alpha}{n} \Rightarrow \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \frac{|\alpha - n|}{|n+1|} \longrightarrow 1$$

Por tanto, el radio de convergencia es $R = 1$*. Definamos para* $|x| < 1$

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Queremos probar ahora que la función suma de la serie, g*, coincide con la función* f *en el intervalo* $]-1,1[$*. Para esto consideremos la función* $h(x) = (1+x)^{-\alpha} g(x)$*, definida para* $|x| < 1$*. Calculemos* h'*.*

$$h'(x) = -\alpha(1+x)^{-\alpha-1} g(x) + (1+x)^{-\alpha} g'(x) = (1+x)^{-\alpha-1} \left[-\alpha g(x) + (1+x) g'(x) \right]$$

Analicemos ahora la expresión entre corchetes,

$$\begin{aligned} (1+x)g'(x) - \alpha g(x) &= (1+x) \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n \binom{\alpha}{n} x^n - \alpha \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} - \alpha \binom{\alpha}{n} + n \binom{\alpha}{n} \right] x^n = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left[(n+1) \binom{\alpha}{n+1} + (n-\alpha) \binom{\alpha}{n} \right] x^n \equiv 0 \end{aligned}$$

Hemos probado que $h'(x) = 0$ *para todo* $x \in]-1,1[$*, de donde deducimos que* $h(x)$ *es constante, y como* $h(0) = 1$*, concluimos que* $g(x) = (1+x)^\alpha$ *para* $|x| < 1$*. Hemos probado así que:*

$$(1+x)^\alpha = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n, \quad (|x| < 1)$$

Para centrar esta serie en un punto $a > -1$ podemos proceder como sigue:

$$(1+x)^\alpha = (1+a+(x-a))^\alpha = (1+a)^\alpha \left[1+\frac{x-a}{1+a}\right]^\alpha = (1+a)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\left(\frac{x-a}{1+a}\right)^\alpha =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}\frac{1}{(1+a)^{n-\alpha}}(x-a)^n \quad \textit{siempre que} \quad |x-a| < |1+a|$$

Serie de Taylor del arcoseno centrada en cero

Sea $f(x) = \operatorname{arc\,sen} x$, su derivada viene dada como

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1-x^2)^{-1/2}$$

Haciendo las sustituciones $x \to -x^2$ y $\alpha \to -1/2$ en la serie binomial de Newton obtenemos

$$f'(x) = (1-x^2)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}(-1)^n x^{2n} \quad (|x|<1)$$

Integrando término a término la expresión anterior obtenemos la serie del arcoseno

$$\operatorname{arc\,sen} x = \sum_{n=0}^{\infty}\binom{-1/2}{n}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

Como

$$\begin{aligned}\binom{-1/2}{n} &= \frac{-1/2(-1/2-1)\cdots(-1/2-n+1)}{n!}\\ &= (-1)^n\frac{1}{2^n}\frac{3\cdot 5\cdots(2n-1)}{n!} =\\ &= (-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\end{aligned}$$

Resulta finalmente

$$\operatorname{arc\,sen} x = x + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\,\frac{1}{2n+1}x^{2n+1} \quad (|x|<1)$$

Además, como la serie también converge para $x = 1$, por el teorema de Abel tenemos que

$$\operatorname{arc\,sen} 1 = \frac{\pi}{2} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot(2n)}\,\frac{1}{2n+1}$$

Ya dijimos que las series de Taylor de una función no siempre convergen a la misma función. Veamos un ejemplo de esto.

Consideremos la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida de la siguiente forma

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-1/x^2} & si \;\; x > 0 \\ 0 \quad si \;\; x \leqslant 0 \end{cases}$$

La función es de clase infinito, y $f^{(n}(0) = 0$ para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$, por lo que su serie de Taylor en $a = 0$ es la serie idénticamente nula que, evidentemente, no converge a f en ningún intervalo abierto que contenga a 0.

Funciones analíticas

*Sea $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, donde I es un intervalo abierto. Se dice que f es **analítica** en I si*

1. $f \in C^\infty(I)$,
2. *En todo punto $a \in I$ la serie de Taylor de f centrada en a converge en un intervalo no vacío, $J \subset I$, y su suma es igual a f en ese intervalo.*

6.2. Relación de ejercicios

1. *Estudiar la convergencia puntual de $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los intervalos $J \subseteq I$ que se indican en cada caso.*

   a) $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$, $J = [0, a]$, $J = [a, \frac{\pi}{2}]$, $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

   b) $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$, $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$, $J =]0, a]$, $J = [a, \pi[$, $J = [a, b]$, $0 < a < b < \pi$.

2. *Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, sea $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la sucesión de funciones dada por $f_n(x) = n^{\alpha} x (1 - x^2)^n$.*

   a) *¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0, 1]$?*

   b) *¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?*

3. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n(x) = \dfrac{x}{n^a(1 + nx^2)}$ $(x \in \mathbb{R}^+_o)$. Probar que la serie $\sum f_n$:*

   a) *Converge puntualmente en $\mathbb{R}^+_o$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.*

   b) *Converge uniformemente en $\mathbb{R}^+_o$ si $a > 1/2$.*

4. *Sea $b > 0$. Demuéstrese que:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1 + nb} = \int_0^1 \frac{1}{1 + t^b}\, dt$$

   Aplicación: Calcúlese $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n + 1}$.

5. *Calcular el radio de convergencia y la suma de las series:*

$$\sum_{n \geq 0} \frac{n^3 + n + 3}{n + 1} x^n; \quad \sum_{n \geq 0} \frac{n^3}{n!} x^n; \quad \sum_{n \geq 1} \frac{1}{1 + 2 + \cdots + n} x^n$$

6. *(i) Estúdiese para qué valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ la integral $I(\alpha, p) = \displaystyle\int_0^1 x^{\alpha} (\log x)^2 dx$ existe y calcúlese su valor (intégrese por partes).*

   (ii) Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ la función dada por $f_n(x) = x^n (\log x)^2$, y $f_n(0) = 0$. Estúdiese si la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[0, 1]$ y dedúzcase que $\displaystyle\int_0^1 \frac{x(\log x)^2}{1 - x} dx = 2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^3}$.

7. *Calcúlese la suma de las series:*

$$\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n(2n + 1)} \quad y \quad \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{1}{n(2n + 1)}$$

   Sugerencia: Hacer uso de los desarrollos en serie de potencias centrada en cero de la función $\log\left(\dfrac{1 + t}{1 - t}\right)$.

Capítulo 7

Números complejos

7.1. Desarollo teórico

Introducción

Los números que hoy llamamos "complejos" fueron durante muchos años motivo de polémicas y controversias entre la comunidad científica. Poco a poco, por la creciente evidencia de su utilidad, acabaron por ser comúnmente aceptados, aunque no fueron bien comprendidos hasta épocas recientes. Nada hay de extraño en ello si pensamos que los números negativos no fueron plenamente aceptados hasta finales del siglo XVII.

Los números complejos hacen sus primeras tímidas apariciones en los trabajos de Cardano (1501-1576) y Bombelli (1526-1672) relacionados con el cálculo de las raíces de la cúbica o ecuación de tercer grado. Fue René Descartes (1596-1650) quien afirmó que "ciertas ecuaciones algebraicas sólo tienen solución en nuestra imaginación" y acuñó el calificativo "imaginarias" para referirse a ellas. Desde el siglo XVI hasta finales del siglo XVIII los números complejos o imaginarios son usados con recelo, con desconfianza. Con frecuencia, cuando la solución es un problema resulta ser un número complejo se interpreta esto como que el problema no tiene solución. Para Leibnitz "el número imaginario es un recurso sutil y maravilloso del espíritu divino, casi un anfibio entre el ser y el no ser.".

Las razones de todo esto son claras. Así como los números reales responden al problema bien cotidiano de la medida de magnitudes, no ocurre nada similar con los números complejos. Mientras los matemáticos necesitaron interpretar en términos físicos sus objetos de estudio, no se avanzó mucho en la comprensión de los números complejos.

*El éxito de Euler y Gauss al trabajar con números complejos se debió a que ellos no se preocuparon de la "naturaleza" de los mismos; no se preguntaron "¿qué es un número complejo?", sino que se dijeron "a ver, para qué sirven, qué puede hacerse con ellos". Es Gauss quien definitivamente concede a los números complejos un lugar privilegiado dentro de las matemáticas al probar en 1799 el conocido como **Teorema Fundamental del Álgebra** que afirma que toda ecuación polinómica de grado n con coeficientes complejos tiene, si cada raíz se cuenta tantas veces como su orden, n raíces que también son números complejos. Aunque la demostración de este teorema la verás más adelante en cursos superiores ya puedes entender lo que significa. Fíjate en cada una de las ecuaciones:*

$$x+3=0, \quad 2x+3=0, \quad x^2-2=0, \quad x^2+2x+2=0$$

Cuyas soluciones

$$x=-3, \quad x=3/2, \quad x=\pm\sqrt{2}, \quad x=1\pm i$$

tienen sentido cuando x es es, respectivamente, un número entero, racional, real o complejo. Podría ocurrir que este proceso de ampliación del campo numérico continuara. ¿Qué ocurrirá si ahora consideramos ecuaciones polinómicas con coeficientes complejos? Por ejemplo:

$$x^5+(1-i)x^4+(1/5-i\sqrt{2})x^2-8x+3-i/\sqrt{3}=0$$

¿Cómo serán sus soluciones? ¿Aparecerán también nuevos tipos de números? El Teorema Fundamental del Álgebra nos dice que esa ecuación tiene soluciones que también son números complejos y, por tanto, que no aparecerán ya por este procedimiento nuevos tipos de números.

El término, hoy usado de "números complejos" se debe a Gauss, quien también hizo popular la letra "i" que Euler (1707-1783) había usado esporádicamente. En 1806 Argand interpreta los números complejos como vectores en el plano. La fecha de 1825 es considerada como el nacimiento de la teoría de funciones de variable compleja, pues se publica en dicho año la Memoria sobre la Integración Compleja que Cauchy había escrito ya en 1814.

Recordemos, finalmente, la afirmación de Hadamard "El camino más corto entre dos verdades del campo real pasa con frecuencia por el campo complejo".

Definición. *Consideremos en el conjunto $\mathbb{R}^2$ las operaciones de adición y producto definidas por*

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$$

$$(a,b)(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$$

Es muy fácil comprobar las propiedades asociativa, conmutativa y distributiva de las operaciones así definidas. El elemento neutro de la suma es $(0,0)$ y $(1,0)$ es la unidad del producto. Además, $(-a,-b)$ es el opuesto de (a,b), y todo $(a,b)\neq(0,0)$ tiene inverso

$$(a,b)\left(\frac{a}{a^2+b^2},\frac{-b}{a^2+b^2}\right)=(1,0)$$

Todas estas propiedades se resumen diciendo que $(\mathbb{R}^2,+,\cdot)$ (léase "el conjunto $\mathbb{R}^2$ con las operaciones de adición y producto") es un cuerpo. *Dicho cuerpo se representa simbólicamente por $\mathbb{C}$ y sus elementos se llaman **números complejos**.*

Comentarios a la definición

A los elementos de $\mathbb{R}^2$ *se les llama unas veces* pares ordenados de números reales, *otras* vectores *o* puntos *y también* números complejos. *La razón de esto es que en* $\mathbb{R}^2$ *conviven varias estructuras cada una con su terminología propia. Por eso a los elementos de* $\mathbb{R}^2$ *se les llama vectores si se está considerando la estructura de espacio vectorial, puntos si fijamos la atención en la estructura topológica o afín, pares ordenados cuando estamos pensando en* $\mathbb{R}^2$ *como conjunto sin ninguna estructura particular y números complejos cuando se considera la estructura de cuerpo antes definida. Ocurre que estos términos se usan a veces en un mismo párrafo lo que puede resultar confuso. La regla que debes tener siempre presente es que todo* ***concepto matemático*** *tiene sentido propio dentro de una determinada* ***estructura matemática***. *Por ello, a un elemento de* $\mathbb{R}^2$ *se le llama número complejo cuando se va a usar el producto antes definido que es lo que en realidad distingue a los números complejos de los vectores de* $\mathbb{R}^2$.

El símbolo usual (a,b) *para representar pares ordenados no es conveniente para representar el número complejo* (a,b). *Para convencerte calcula* $(1,-1)^4$. *Representaremos los números complejos con un simbolismo más apropiado en el que va a intervenir el producto complejo. Para ello, observa que:*

$$\begin{gathered}(a,0)+(b,0)=(a+b,0)\\(a,0)(b,0)=(ab,0)\end{gathered}$$

esto indica que los números complejos de la forma $(a,0)$ *se comportan respecto a la suma y la multiplicación de números complejos exactamente de la misma forma que lo hacen los números reales respecto a la suma y multiplicación propias. En términos, más técnicos,* $\mathbb{R}\times\{0\}$ *es un subcuerpo de* $\mathbb{C}$ *isomorfo a* $\mathbb{R}$. *Por esta razón, en las operaciones con números complejos podemos sustituir los complejos del tipo* $(a,0)$ *por el número real* a. *Es decir, hacemos la identificación* $(a,0)=a$.

Fíjate que con dicha identificación el producto $a(c,d)$ *tiene dos posibles interpretaciones: producto del escalar real* a *por el vector* (c,d) *(estructura vectorial de* $\mathbb{R}^2$*) y producto del complejo* $(a,0)$ *por el complejo* (c,d). *Pero ambos coinciden y son iguales a* (ac,ad).

El número complejo $(0,1)$ *lo representaremos por* i. *Con ello tenemos que*

$$i^2=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$$

Ahora podemos escribir

$$(a,b)=(a,0)+(0,b)=(a,0)+(b,0)(0,1)=a+bi$$

Se dice que a *es la* ***parte real*** *y* b *es la* ***parte imaginaria*** *del número complejo* $a+ib$. *El producto ahora es muy fácil de recordar pues*

$$(a+ib)(c+id)=ac+i^2bd+i(ad+bc)=ac-bd+i(ad+bc)$$

Es costumbre representar los números complejos con las letras z *y* w *y reservar las letras* x, y, u, v *para representar números reales. Una expresión de la forma* $z=x+iy$ *se interpreta como que* z *es el número complejo cuya parte real es* x *y cuya parte imaginaria es* y. *Se escribe* $\operatorname{Re}(z)$ *e* $\operatorname{Im}(z)$ *para representar las partes real e imaginaria de* z. *Naturalmente, dos números complejos son iguales cuando tienen igual parte real e igual parte imaginaria.*

Comentario

Acabamos de ver que $i^2 = -1$ *pero eso no nos permite escribir así, sin más ni más, que* $i = \sqrt{-1}$. *Fíjate lo que ocurre si ponemos* $i = \sqrt{-1}$ *y manejamos ese símbolo con las reglas a las que estamos acostumbrados:*

$$i^2 = -1 = i\,i = \sqrt{-1}\sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

Luego $1 = -1$. *Por tanto, las matemáticas son contradictorias y aquí hemos acabado.*

Naturalmente, el error, procede de que estamos haciendo disparates. Fíjate que en la expresión $\sqrt{-1}$ *no puedes interpretar que* -1 *es el número real* -1 *(porque, como sabes, los números reales negativos no tienen raíz cuadrada real), sino que tienes que interpretar* -1 *como el número complejo* -1 *(espero que ya tengas clara la diferencia). Resulta así que estamos usando raíces de números complejos sin haberlas definido y dando por supuesto que dichas raíces verifican las mismas propiedades que las de los números reales positivos.*

Antes de escribir $\sqrt{-1}$ *hay que definir qué significa* $\sqrt{z}$ *para* $z \in \mathbb{C}$. *Cuando lo hagamos veremos ¡sorpresa! que la igualdad* $\sqrt{z}\sqrt{w} = \sqrt{zw}$, *válida cuando* $z, w \in \mathbb{R}^+$, *no es cierta en general cuando* $z, w \in \mathbb{C}$.

Todavía más disparatado es definir $i = \sqrt{-1}$ *sin ni siquiera haber definido antes los números complejos. Sin embargo, y aunque parezca mentira, en muchos textos se define (porque sí, sin más explicaciones)* $i = \sqrt{-1}$ *y a continuación se dice que los números de la forma* $a + ib$ *son los números complejos. No es de extrañar que luego resulte que* $1 = -1$.

No hay un orden en $\mathbb{C}$ ***compatible con la estructura algebraica***

Al ampliar $\mathbb{R}$ *a* $\mathbb{C}$ *ganamos mucho (como te convencerás cuando estudies la teoría de funciones de variable compleja) pero también perdemos algo. Te recuerdo que* $\mathbb{R}$ *tiene dos estructuras: la algebraica y la de orden. Ambas estructuras están armoniosamente relacionadas. Pues bien, en* $\mathbb{C}$ *no hay nada parecido. Podemos definir relaciones de orden en* $\mathbb{C}$, *pero no hay ninguna de ellas que sea compatible con la estructura algebraica. En efecto, si suponemos que* $\leqslant$ *es una relación de orden en* $\mathbb{C}$ *compatible con su estructura algebraica, como* $i \neq 0$ *habría de ser* $0 < i^2 = -1$ *(esto todavía no es contradictorio porque pudiera ocurrir que la relación* $\leqslant$ *no respetara el orden de* $\mathbb{R}$*). Pero también* $0 < 1^2 = 1$, *luego* $0 < 1 + (-1) = 0$ *y eso sí que es contradictorio.*

Por tanto, es imposible definir un concepto de número complejo positivo de forma que la suma y el producto de complejos positivos sea positivo. Por ello no se define en $\mathbb{C}$ *ningún orden. Así que ya sabes: ¡mucho cuidado con no escribir desigualdades entre números complejos! Naturalmente, puedes escribir desigualdades entre las partes reales o imaginarias de números complejos, porque tanto la parte real como la parte imaginaria de un número complejo son números reales.*

Representación gráfica. Complejo conjugado y módulo de un número complejo

Es usual interpretar el número complejo $x + iy$ *como el vector del plano* (x, y) *y, en ese sentido, se habla del* plano complejo. *El eje horizontal recibe el nombre de* eje real, *y el eje vertical recibe el nombre de* eje imaginario.

*Si $z = x + iy$ es un número complejo (con x e y reales), entonces el **conjugado** de z se define como:*

$$\overline{z} = x - iy$$

*y el **módulo** o **valor absoluto** de z, se define como:*

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Observa que $\sqrt{x^2 + y^2}$ está definido sin ambigüedad; es la raíz cuadrada del número real no negativo $x^2 + y^2$.

*Geométricamente $\bar{z}$ es sencillamente la reflexión de z respecto al eje real, mientras que $|z|$ es la distancia euclídea del punto (x, y) a $(0, 0)$ o, también, la longitud o norma euclídea del vector (x, y) (ver figura 7.1). La **distancia** entre dos números complejos z y w se define como $|z - w|$.*

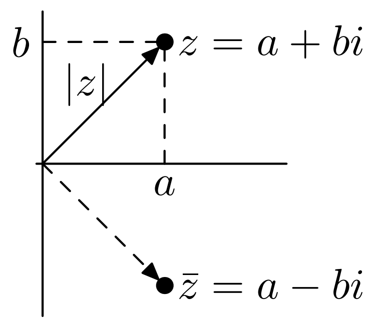


Figura 7.1: Representación de un número complejo

La representación gráfica de la suma es conocida. Dos números complejos $z = a + ib$ y $w = c + id$ determinan un paralelogramo cuya diagonal (ver figura 7.2) es $z + w$.

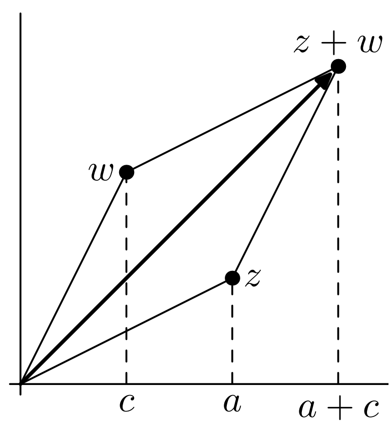


Figura 7.2: Suma de números complejos

Se comprueba fácilmente que si z y w son números complejos se verifica que $\overline{\overline{z}} = z$, $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$ y $\overline{z}\,\overline{w} = \overline{zw}$.

También son de comprobación inmediata las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$$

La igualdad $|z|^2 = z\overline{z}$ *que se deduce directamente de la definición de módulo de un número complejo, permite utilizar el producto complejo para trabajar con módulos y es de gran utilidad. La usaremos para probar que para todos* $z, w \in \mathbb{C}$ *es*

$$\textbf{\textit{a)}}\ |zw| = |z||w| \quad y \quad \textbf{\textit{b)}}\ |z+w| \leqslant |z| + |w|$$

a) *Basta observar que* $|zw|$ *y* $|z||w|$ *son números positivos cuyos cuadrados coinciden, pues*

$$|zw|^2 = zw\overline{zw} = zw\overline{z}\overline{w} = z\overline{z}w\overline{w} = |z|^2|w|^2 = (|z||w|)^2$$

b) *Es suficiente probar que* $|z+w|^2 \leqslant (|z|+|w|)^2$*. En efecto:*

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)} = (z+w)(\overline{z}+\overline{w}) = z\overline{z} + w\overline{w} + z\overline{w} + \overline{z}w = \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\overline{w}) \leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|\operatorname{Re}(z\overline{w})| \leqslant \\ &\leqslant |z|^2 + |w|^2 + 2|z\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = |z|^2 + |w|^2 + 2|z||\overline{w}| = \\ &= (|z|+|w|)^2 \end{aligned}$$

Deducimos también que se verifica la igualdad $|z+w| = |z| + |w|$ *si, y sólo si,* $\operatorname{Re} z\overline{w} = |z\overline{w}|$*, esto es, si* $z\overline{w} \in \mathbb{R}_o^+$*, o lo que es lo mismo* $z\overline{w} = \rho$ *donde* $\rho \in \mathbb{R}_o^+$*. Esta igualdad, puede escribirse de forma equivalente multiplicando por* w *como* $z|w|^2 = \rho w$*, esto es,* $z = \lambda w$ *para algún* $\lambda \in \mathbb{R}_o^+$ *lo que quiere decir que* z *y* w *están en una misma semirrecta a partir del origen.*

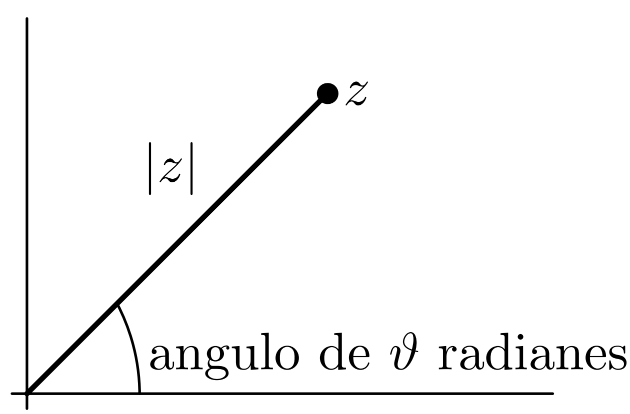


Figura 7.3: Forma polar de un número complejo

Forma polar de un número complejo

El uso de coordenadas polares en el plano facilita mucho los cálculos con productos de números complejos. Para cualquier número complejo $z = x + iy \neq 0$ *podemos escribir*

$$z = |z|\left(\frac{x}{|z|} + i\frac{y}{|z|}\right)$$

Como $(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|})$ *es un punto de la circunferencia unidad, puede escribirse en la forma*

$$(\frac{x}{|z|}, \frac{y}{|z|}) = (\cos\vartheta, \operatorname{sen}\vartheta)$$

para algún número $\vartheta \in \mathbb{R}$*. Resulta así que*

$$z = |z|(\cos\vartheta + i\operatorname{sen}\vartheta)$$

Esta forma de expresar un número complejo recibe el nombre de ***forma polar****, cuya interpretación gráfica vemos en la figura 7.3.*

Dado $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 0$*, hay infinitos números* $t \in \mathbb{R}$ *que verifican la igualdad* $z = |z|(\cos t, \operatorname{sen} t)$ *cualquiera de ellos recibe el nombre de* ***argumento*** *de* z*. El conjunto de todos los argumentos de un número complejo no nulo se representa por* $Arg(()z)$*.*

$$Arg(()z) = \{t \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos t + i\operatorname{sen} t)\}$$

Observa que

$$s,\, t \in Arg(()z) \iff \left\{\begin{matrix}\cos(t) = \cos(s)\\ \sin(t) = \sin(s)\end{matrix}\right\} \iff s = t + 2k\pi \;\; \textit{para algún} \;\; k \in \mathbb{Z}$$

Por tanto, conocido un argumento $t_o \in Arg(()z)$ *cualquier otro es de la forma* $t_o + 2k\pi$ *para algún* $k \in \mathbb{Z}$*, es decir,* $Arg(()z) = t_o + 2\pi\mathbb{Z}$*.*

De entre todos los argumentos de un número complejo $z \neq 0$ *hay uno único que se encuentra en el intervalo* $]-\pi, \pi]$*, se representa por* $\arg(z)$ *y viene dado por*

$$\arg(z) = 2\operatorname{arc\,tg}\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z + |z|} \quad \textit{si } z \notin \mathbb{R}^-$$
$$\arg(z) = \pi \quad \textit{si } z \in \mathbb{R}^-$$

A dicho argumento se le llama ***argumento principal*** *de* z*.*

La comprobación de las anteriores afirmaciones es fácil. Como $-\pi/2 < \operatorname{arc\,tg} t < \pi/2$*, se sigue que* $-\pi < \arg(z) < \pi$ *si* $z \notin \mathbb{R}^-$*. Luego,* $-\pi < \arg(z) \leqslant \pi$*. Si* $z = t \in \mathbb{R}^-$ *es evidente que* $z = |t|(\cos\pi + i\operatorname{sen}\pi)$*. Y para* $z \notin \mathbb{R}^-$ *se tiene:*

$$\cos(\arg(z)) = \frac{1 - \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 - (\operatorname{Im} z)^2}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2\operatorname{Re} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|}$$
$$\operatorname{sen}(\arg(z)) = \frac{2\operatorname{tg}(\arg(z)/2)}{1 + \operatorname{tg}^2(\arg(z)/2)} = \frac{2\operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{(|z| + \operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} = \frac{2\operatorname{Im} z(|z| + \operatorname{Re} z)}{2|z|(|z| + \operatorname{Re} z)} = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Donde se ha utilizado que $|z|^2 = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$*.*

No es difícil comprobar que el argumento principal de $z = x + iy \neq 0$ *viene también dado por:*

$$\arg(z) = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(y/x) - \pi \;\; \textit{si } y < 0, x < 0 \\ -\pi/2 \;\; \textit{si } y \leqslant 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) \;\; \textit{si } x > 0 \\ \pi/2 \;\; \textit{si } y > 0, x = 0 \\ \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi \;\; \textit{si } y \geqslant 0, x < 0 \end{cases}$$

Esta última forma es quizás más cómoda para los cálculos.

Observación

Puede parecer un poco extraña la forma de elegir el argumento principal de un número complejo. La elección que hemos hecho supone que medimos ángulos en el semiplano superior de 0 *a* π *y en el semiplano inferior de* 0 *a* $-\pi$.

Fíjate que si tomas un número complejo que esté situado en el tercer cuadrante $z = x + iy$ *con* $x < 0, y < 0$ *y supones que* y *es próximo a* 0*, su argumento principal está próximo a* $-\pi$*, y si tomas un número complejo que esté situado en el segundo cuadrante,* $w = x + iv$ *con* $x < 0, v > 0$*, y supones que* v *es próximo a* 0*, su argumento principal está próximo a* π*. Además, la distancia* $|w - z| = |v - y| = v - y$ *es tan pequeña como quieras. Esto nos dice que el argumento principal tiene una discontinuidad en el eje real negativo: salta de* $-\pi$ *a* π *cuando atravesamos dicho eje desde el tercer al segundo cuadrante.*

Peor todavía dirás. Hasta cierto punto. Primero, la discontinuidad es inevitable. Si queremos elegir argumentos en un intervalo de longitud 2π*, digamos,* $[\alpha, \alpha + 2\pi[$ *entonces dichos argumentos saltan de* α *a* $\alpha + 2\pi$ *cuando atravesamos la semirrecta* $(x, y) = \rho(\cos\alpha, \operatorname{sen}\alpha)$, $(\rho > 0)$*. En particular, si tomamos argumentos en el intervalo* $[0, 2\pi[$ *(cosa que, a primera vista, parece lo razonable) nos encontramos con que entonces se produce una discontinuidad de dichos argumentos en el eje real positivo. Bien, sucede que la extensión a* $\mathbb{C}$ *de algunas funciones definidas en* $\mathbb{R}^+$ *(el logaritmo, las raíces) hace intervenir el argumento principal. Naturalmente, queremos que dichas extensiones sigan siendo continuas en* $\mathbb{R}^+$ *y ello justifica que tengamos que tomar argumentos principales de la forma en que lo hemos hecho: porque preferimos introducir una discontinuidad en* $\mathbb{R}^-$ *a perder la continuidad en* $\mathbb{R}^+$.

Veamos cómo la forma polar permite hacer fácilmente productos de números complejos. Consideremos dos números complejos no nulos

$$
\begin{aligned}
z &= |z|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta) \\
w &= |w|(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)
\end{aligned}
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
zw &= |z||w|(\cos\vartheta + i \operatorname{sen}\vartheta)(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) = \\
&= |zw|[(\cos\vartheta\cos\varphi - \operatorname{sen}\vartheta\operatorname{sen}\varphi) + i(\operatorname{sen}\vartheta\cos\varphi + \cos\vartheta\operatorname{sen}\varphi)] = \\
&= |zw|(cos(\vartheta + \varphi) + i \operatorname{sen}(\vartheta + \varphi))
\end{aligned}
$$

Es decir: para multiplicar dos números complejos se multiplican sus módulos y se suman sus argumentos. Por ejemplo, para calcular $(1+i)^4$ *como* $|1+i| = \sqrt{2}$ *y* $\arg(1+i) = \pi/4$*, se sigue que* $(1+i)^4 = -4$.

Así pues, el producto de dos números complejos es geométricamente un giro (pues se suman los argumentos de los números que estamos multiplicando) seguido de una homotecia (el producto de los módulos de ambos números).

Fórmula de De Moivre

Acabamos de ver que si z, w son complejos no nulos, $\vartheta \in Arg(()z)$, $\varphi \in Arg(()w)$, entonces $\vartheta + \varphi \in Arg(()z + w)$. Es ahora fácil demostrar mediante inducción la siguiente fórmula, muy útil, conocida como fórmula de De Moivre*.*

$$z^n = |z|^n(\cos n\vartheta + i\,\mathrm{sen}\, n\vartheta)$$

donde ϑ es un argumento de z y $n \in \mathbb{Z}$.

Raíces de un número complejo

Se trata ahora de resolver la ecuación $w^n = z$ donde n es un número natural, $n \geqslant 2$, y $z \neq 0$ es un número complejo conocido. Escribamos w en forma polar:

$$w = |w|(\cos\varphi + i\,\mathrm{sen}\,\varphi)$$

Ahora, usando la fórmula de De Moivre, podemos escribir la ecuación $w^n = z$ en la forma equivalente:

$$w^n = |w|^n(\cos n\varphi + i\,\mathrm{sen}\, n\varphi) = |z|(\cos\vartheta + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta)$$

Esta igualdad se da cuando $|w|^n = |z|$ y $n\varphi = \vartheta + 2k\pi$ donde $k \in \mathbb{Z}$. Deducimos que $|w| = \sqrt[n]{|z|}$ (ojo: se trata de la raíz n–ésima de un número positivo, cosa ya conocida). Ahora bien, para cualquier número φ_k que cumpla $\varphi_k = (\vartheta + 2k\pi)/n$ tenemos un número complejo

$$w_k = \sqrt[n]{|z|}(\cos\vartheta_k + i\,\mathrm{sen}\,\vartheta_k)$$

tal que $(w_k)^n = z$. Como una ecuación polinómica de grado n no puede tener más de n soluciones, se sigue que distintos valores de k deben dar lugar al mismo número w_k. Veamos:

$$w_k = w_q \Leftrightarrow \varphi_k - \varphi_q = 2m\pi \Leftrightarrow k - q = nm \Leftrightarrow k \equiv q \pmod{n}$$

Deducimos que para $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ obtenemos w_k distintos y cualquier otro w_q es igual a uno de ellos. Por tanto hay n raíces n–ésimas distintas de z.

Si representamos todas las raíces n–ésimas de z obtenemos n puntos sobre una circunferencia de centro $(0, 0)$ y radio $\sqrt[n]{|z|}$ que forman un polígono regular de n lados.

*Como para cualquier z complejo existen n raices n–ésimas vamos a designar con el símbolo $\sqrt[n]{z}$ a la **raíz n-ésima principal**, que está definida por*

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{1/n}\left(\cos\frac{\arg z}{n} + i\,\mathrm{sen}\,\frac{\arg z}{n}\right)$$

Observa que en el caso particular de que z sea un número real positivo, entonces la raíz principal de z (considerado como número complejo) coincide con la raíz de z (considerado como número real positivo).

*En general no es cierto que dados dos números complejos z y w entonces el producto de las raíces n-ésimas principales de z y de w sea igual a la raíz n-ésima principal de zw. Lo que sí es cierto es que el producto de dos raíces n-ésimas cualesquiera de z y de w es una raíz n-ésima de zw. Por tanto, $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w}$, es **una** raíz n-ésima de zw pero no tiene por qué ser la principal.*

Por ejemplo, para $n = 2, z = w = -1$, *como* $\arg(-1) = \pi$, *tenemos que* $\sqrt{-1} = \cos(\pi/2) + i \operatorname{sen}(\pi/2) = i$. *En este caso*

$$\sqrt{-1}\sqrt{-1} = i\,i = -1 \neq \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{1} = 1$$

La igualdad $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$ *equivale a que para algún entero* k *se verifique que*

$$\frac{\arg(z)}{n} + \frac{\arg(w)}{n} = \frac{\arg(zw)}{n} + 2k\pi$$

es decir, $\arg(z) + \arg(w) = \arg(zw) + 2kn\pi$. *Como* $-2\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant 2\pi$ *y* $n \geqslant 2$ *tiene que ser* $k = 0$ *(pues, en otro caso,* $|2kn\pi| \geqslant 4\pi$*). Luego, debe ocurrir que* $\arg(z) + \arg(w) = \arg(z + w)$ *lo que equivale a que* $-\pi < \arg(z) + \arg(w) \leqslant \pi$.

Por ejemplo, si los números z *y* w *están en el semiplano de la derecha, es decir,* $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Re} w > 0$, *entonces* $-\pi/2 < \arg(z) < \pi/2$ *y* $-\pi/2 < \arg(w) < \pi/2$; *por tanto* $\arg(z) + \arg(w) = \arg(z + w)$ *por lo que, en este caso,* $\sqrt[n]{z}\sqrt[n]{w} = \sqrt[n]{zw}$.

Sucesiones de números complejos

Una sucesión de números complejos es una aplicación del conjunto de los números naturales en $\mathbb{C}$. *Como de costumbre, representaremos por* $\{z_n\}$ *la sucesión dada por* $n \mapsto z_n$ *donde* $z_n \in \mathbb{C}$.

La definición de sucesión convergente es exactamente la misma que para sucesiones reales: la sucesión de números complejos $\{z_n\}$ *converge a un número complejo* z *si para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un número natural* n_0 *tal que para todo* $n \geqslant n_0$ *se verifica que* $|z_n - z| < \varepsilon$.

Esta condición significa geométricamente que cualquier círculo de radio ε *trazado alrededor de* z *contendrá todos los términos de la sucesión de uno en adelante.*

Teorema

La sucesión de números complejos $\{z_n\}$ *converge a* $z \in \mathbb{C}$ *si, y sólo si*

$$\lim_{n\to\infty} \operatorname{Re} z_n = \operatorname{Re} z \quad y \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{Im} z_n = \operatorname{Im} z$$

esto es, la sucesión $\{\operatorname{Re}_n\}$ *converge a* $\operatorname{Re} z$ *e* $\{\operatorname{Im} z_n\}$ *converge a* $\operatorname{Im} z$.

Demostración

Es consecuencia directa de las desigualdades

$$\max\{|\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|\} \leqslant |z_n - z| \leqslant |\operatorname{Re} z_n - \operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z_n - \operatorname{Im} z|$$

Gracias a este teorema el estudio de sucesiones de números complejos se reduce a estudiar la convergencia de dos sucesiones de números reales.

Función exponencial compleja

Una de las formas de definir la exponencial de un número real x es mediante el límite

$$\mathrm{e}^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$$

Por tanto, una forma coherente de definir la exponencial de un número complejo sería calcular el anterior límite para $z \in \mathbb{C}$. Llamemos $z = x + iy$. Consideraremos que $y \neq 0$, puesto que si $y = 0$ tendríamos que $z = x$ sería un número real. Pongamos $w_n = 1 + z/n$ y

$$\varphi_n = \operatorname{arc\,tg}\frac{y/n}{1+x/n}$$

Sea n_o tal que para $n \geqslant n_o$ se verifique que $\operatorname{Re}(w_n) > 0$. Entonces, para $n \geqslant n_o$ resulta que $\varphi_n = \arg(w_n)$. Por otra parte, el módulo de w_n viene dado por

$$|w_n| = \left|1+\frac{z}{n}\right|^2 = \left(1+\frac{x}{n}\right)^2 + \frac{y^2}{n^2}$$

Tenemos ahora, gracias a la fórmula de De Moivre que

$$(w_n)^n = \left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \left[\left(1+\frac{x}{n}\right)^2+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2}(\cos(n\,\varphi_n)+i\operatorname{sen}(n\,\varphi_n))$$

Pero, por el criterio de equivalencia logarítmica, es

$$\lim |w_n|^n = \lim\left[\left(1+\frac{x}{n}\right)+\frac{y^2}{n^2}\right]^{n/2} = \exp\left(\lim\frac{n}{2}\left(\frac{2x}{n}+\frac{x^2}{n^2}+\frac{y^2}{n^2}\right)\right) = e^x$$

Además, la sucesión $\{\varphi_n\}$ es asintóticamente equivalente a la sucesión $\left\{\dfrac{y/n}{1+x/n}\right\}$. Por tanto

$$\lim\{n\varphi_n\} = \lim\{n\frac{y/n}{1+x/n}\} = y$$

En consecuencia, tenemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}(w_n)^n = \lim_{n\to\infty}|w_n|^n(\cos(n\,\varphi_n)+i\operatorname{sen}(n\,\varphi_n)) = \mathrm{e}^x(\cos y + i\operatorname{sen} y)$$

Definimos, por tanto, la exponencial compleja como

$$\exp z = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n = \mathrm{e}^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z)+i\operatorname{sen}(\operatorname{Im} z))$$

En particular, obtenemos la llamada fórmula de Euler:

$$\mathrm{e}^{it} = \cos t + i\operatorname{sen} t \qquad (\textit{para todo } t\in\mathbb{R})$$

que establece una relación entre la exponencial compleja y las funciones trigonométricas. Haciendo $t = \pi$ tenemos la singular igualdad

$$\mathrm{e}^{i\pi}+1=0$$

en la que intervienen los números más importantes de las matemáticas.

De la fórmula de Euler se deducen fácilmente las llamadas ecuaciones de Euler:

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \qquad \operatorname{sen} t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

Se prueba fácilmente que $e^{z+w} = e^z e^w$ *para todos* $z, w \in \mathbb{C}$. *Se deduce que para todo* $z \in \mathbb{C}$ *y todo* $k \in \mathbb{Z}$ *es*

$$e^z = e^{z+2k\pi i}$$

Lo que nos dice que la exponencial compleja es una función ***periódica*** *con período* $2\pi i$. *Naturalmente, esto supone una gran diferencia con la exponencial real que es una función inyectiva.*

Logaritmos complejos

El comportamiento periódico de la exponencial compleja se va a traducir en que, como vamos a ver enseguida, la ecuación $e^w = z$, *donde* z *es un número complejo no cero,va a tener infinitas soluciones* $w \in \mathbb{C}$. *Como*

$$e^w = e^{\operatorname{Re} w}\big(\cos(\operatorname{Im} w) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} w)\big)$$

Para que $e^w = z$ *tiene que ser:*

1. $|\, e^w \,| = |z|$, *esto es,* $e^{\operatorname{Re} w} = |z|$, *por tanto* $\operatorname{Re} w = \log |z|$ *(logaritmo del número real positivo* $|z|$*).*

2. $Arg((e^w)) = Arg((z))$, *esto es,* $\operatorname{Im} w \in Arg(z)$ *y esto se cumple si, y sólo si* $\operatorname{Im} w = \arg(w) + 2k\pi$, *con* $k \in \mathbb{Z}$.

Hemos probado que

$$\{w \in \mathbb{C} : e^w = z\} = \{\log |z| + i(\arg(z) + 2k\pi), k \in \mathbb{Z}\}$$

Por tanto, existen infinitos números complejos w *que satisfacen la ecuación* $e^w = z$. *Cualquiera de ellos se llama* ***un logaritmo*** *de* z. *De entre todos ellos elegimos uno, llamado* ***logaritmo principal*** *definido por*

$$\log z = \log |z| + i \arg(z) \qquad \textit{para todo } z \in \mathbb{C}^*$$

Lo mismo que ocurría con las raíces principales de números complejos, la igualdad

$$\log zw = \log z + \log w$$

es cierta si, y sólo si, $\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$.

Potencias complejas

Dados $z, w \in \mathbb{C}$ *con* $z \neq 0$ *se define*

$$z^w = \exp(x \log z)$$

y dicho número se llama ***valor principal*** *de la potencia de exponente* w *y base* z *complejos.*

7.2. Relación de ejercicios

1. *Demuéstrese la llamada "igualdad del paralelogramo":*

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2(|z|^2+|w|^2) \quad (z,w\in\mathbb{C})$$

y explíquese su significado geométrico.

2. *Estúdiese la validez de cada una de las desigualdades:*

$$a)\ ||z|-|w||\leq|z-w| \qquad b)\ |z-w|\leq|1-\overline{z}w|$$

donde $z,w\in\mathbb{C}$. *Estúdiese cuándo se da la igualdad en cada una de dichas desigualdades.*

Sugerencia: Una estrategia básica para probar desigualdades entre módulos *de números complejos consiste en elevar al cuadrado ambos miembros de la desigualdad.*

3. *Calcular las partes real e imaginaria de los números:*

$$\frac{2}{1-3i};\ (1+i\sqrt{3})^6;\ \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^5;\ \left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^4.$$

4. *Resolver las ecuaciones entre números complejos: a)* $|z|-z=1+2i$; *b)* $|z|+z=2+i$; *c)* $\overline{z}=z^2$.

5. *Calcular los números* $z\in\mathbb{C}$ *tales que* $\dfrac{1+z}{1-z}$ *es: (i) Un número real; (ii) Un número imaginario puro.*

6. *Estúdiense las igualdades: a)* $\sqrt{\alpha\beta}=\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$; *b)* $\sqrt{\alpha^2}=\alpha$, *donde* $\alpha,\beta\in\mathbb{C}$.

7. *Resolver la ecuación cuadrática* $az^2+bz+c=0$ *donde* $a,b,c\in\mathbb{C}$, *y* $a\neq 0$.

8. *Dados* $\varphi\in\mathbb{R}$ *y* $n\in\mathbb{N}$, *simplificar las expresiones:*

$$A=1+\cos\varphi+\cos 2\varphi+\cdots+\cos n\varphi; \qquad B=\operatorname{sen}\varphi+\operatorname{sen}2\varphi+\cdots+\operatorname{sen}n\varphi$$

Sugerencia: Calcúlese $A+iB$ *haciendo uso de la fórmula de De Moivre.*

9. *Sea* $z\in\mathbb{C}^*$ *y* $\varphi\in Arg(()z)$. *Pruébese que*

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{|z|}(\cos\frac{\varphi}{n}+i\ \operatorname{sen}\frac{\varphi}{n})-1\right)=\log|z|+i\varphi.$$

10. *Sea* $z\in\mathbb{C}$, *con* $|z|=1$, $z\neq 1$. *Pruébese que la sucesión* $\{z^n\}$ *no converge. Dedúzcase que si* φ *es un número real que no es un múltiplo entero de* π, *las sucesiones* $\{\cos(n\varphi)\}$ *y* $\{\operatorname{sen}(n\varphi)\}$ *no convergen.*