Capítulo 1

Conceptos básicos sobre espacios normados y espacios de Banach

1.1. Definición de espacio normado y de espacio de Banach. Ejemplos

Durante toda el curso, $\mathbb{K}$ denotará indistintamente al cuerpo $\mathbb{R}$ de los números reales o al cuerpo $\mathbb{C}$ de los números complejos. Todos los espacios vectoriales que consideremos lo serán sobre $\mathbb{K}$. Por $\operatorname{Re} z$, $\operatorname{Im} z$ entenderemos la parte real y la parte imaginaria de z si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Si tratamos con números reales, Re es la identidad e Im la función constantemente igual a 0.

1.1.1 Definiciones. *Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, una* ***norma*** *en X es una función $x \longmapsto \|x\|$, de X en $\mathbb{R}_0^+$, verificando*

(i) $\|x\| = 0 \;\Rightarrow\; x = 0.$
(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\| \quad (\lambda \in \mathbb{K},\ x \in X)$
(iii) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\| \quad (x,\ y \in X)$ *(Desigualdad triangular).*

Una ***seminorma*** *es una función $x \longmapsto p(x) \in \mathbb{R}_0^+$ verificando las condiciones (ii) y (iii) anteriores. Obsérvese que, gracias a (ii), se tiene $p(0) = 0$ para cualquier seminorma.*

Un ***espacio normado*** *es un par $(X, \|\cdot\|)$, donde X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|$ es una norma en X. Cuando no haya lugar a confusión omitiremos la segunda componente del par. Por otra parte, escribiremos $\|\cdot\|_X$ cuando queramos resaltar que trabajamos con una norma en el espacio X.*

Notaremos $B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant 1\}$ y $S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$, conjuntos que llamaremos, respectivamente, bola unidad y esfera unidad de X.

Todo espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ se convierte automáticamente en un espacio métrico con la distancia

$$d(x,y) = \|y - x\| \qquad (x, y \in X).$$

Cuando d es completa decimos que la norma $\|\cdot\|$ es ***completa*** *y que $(X, \|\cdot\|)$ es un* ***espacio de Banach****. La topología asociada a d suele denominarse* ***topología de la norma*** *en X. Cuando no se especifique lo contrario, todas las nociones topológicas sobre un espacio de Banach se referirán a la topología de la norma y todas las nociones métricas a la distancia d. En particular, si A es un subconjunto de un espacio normado X, $\overline{A}$ y $\overset{\circ}{A}$ —o $\operatorname{int}(A)$— denotan, respectivamente, el cierre y el interior de A. Por otro lado,*

$B(x,r)$ es la bola (cerrada) de centro x y radio r, esto es,

$$B(x,r) = \{y \in X \ : \ \|y - x\| \leqslant r\} = x + rB_X;$$

la bola abierta de centro x y radio r se escribe $\overset{\circ}{B}(x,r) = B(\overset{\circ}{x,r}) = x + r\overset{\circ}{B_X}$.

Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en un mismo espacio vectorial X son **equivalentes** cuando dan lugar a la misma topología. Usando que la bola unidad para cada una de ellas ha de ser entorno de cero en la topología asociada a la otra, obtenemos inmediatamente que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes si, y sólo si, existen dos constantes estrictamente positivas m y M tales que

$$m\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant M\|x\|_1 \quad (x \in X).$$

Como consecuencias inmediatas obtenemos que *una norma equivalente a una completa también es completa* y que *los subconjuntos acotados para dos normas equivalentes son los mismos*.

Un **isomorfismo** entre dos espacios normados X e Y es una aplicación lineal y biyectiva $T : X \longrightarrow Y$, tal que T y T^{-1} son continuas, esto es, una biyección que conserva las estructuras lineal y topológica. En este caso decimos que X e Y son **isomorfos** ($\mathbf{X} \simeq \mathbf{Y}$) y podemos pensar que se trata de un mismo espacio vectorial con dos normas equivalentes. Es inmediato entonces que una biyección lineal $T : X \longrightarrow Y$ es un isomorfismo si, y sólo si, existen dos constantes estrictamente positivas m y M tales que

$$m\|x\| \leqslant \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \qquad (x \in X),$$

de donde se deduce claramente que *un espacio isomorfo a uno completo también es completo*. Si de hecho se tiene que

$$\|T(x)\| = \|x\| \qquad (x \in X),$$

entonces T es, por definición, un **isomorfismo isométrico** (o **biyección lineal isométrica** o **isometría sobreyectiva**) y decimos que X e Y son **isométricamente isomorfos**, lo que escribiremos como $\mathbf{X} \equiv \mathbf{Y}$. El isomorfismo isométrico es la identificación <u>total</u> entre dos espacios normados. Una **isometría** o **embebimiento isométrico** de X en Y es una aplicación lineal que es un isomorfismo isométrico sobre su imagen, esto es una aplicación lineal $T : X \longrightarrow Y$ tal que $\|T(x)\| = \|x\|$ para todo $x \in X$. Decimos que Y contiene una **copia isométrica** de X, o que X se **embebe de forma isométrica** en Y, o que Y **contiene isométricamente** a X, si existe una isometría de X en Y, esto es, si Y contiene un subespacio que es isométricamente isomorfo a X.

- La *suma* —$(x,y) \longmapsto x+y$, de $X \times X$ en X— y el *producto por escalares* —$(\lambda,x) \longmapsto \lambda x$, de $\mathbb{K} \times X$ en X— son continuas.
- El cierre de cualquier subespacio vuelve a ser un subespacio.
- La aplicación *norma* —$x \longmapsto \|x\|$ de X en $[0,+\infty[$— es continua, de hecho es Lipschitziana con constante 1, esto es,
$$\big|\|x\| - \|y\|\big| \leqslant \|x - y\| \qquad (x,y \in X).$$
- Cualquier subespacio Y de X hereda la estructura de espacio normado si lo dotamos de la restricción de la norma de X. Si Y es un espacio de Banach, entonces ha de ser cerrado en X.
- Sea Y un subespacio de un espacio de Banach X. Entonces Y es un espacio de Banach si, y sólo si, Y es cerrado en X.

Si X es un espacio normado y $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ es una sucesión de elementos de X, llamamos **serie de término general** $(\mathbf{x_n})$, que denotaremos por $\sum_{n\geqslant 1} x_n$, a la sucesión (S_n) dada por

$$S_1 = x_1, \qquad S_{n+1} = S_n + x_{n+1} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es **convergente** si lo es la sucesión (S_n) y llamaremos **suma de la serie** a

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} S_n \in X.$$

Decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_n$ es **absolutamente convergente** si $\sum_{n\geqslant 1} \|x_n\| < \infty$.

1.1.2 Proposición. *Un espacio normado X es un espacio de Banach si, y sólo si, toda serie absolutamente convergente de elementos de X converge.*

• **desigualdad de Young**:

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q},$$

válida para cualesquiera $a, b \geqslant 0$ y cualesquiera $p, q > 1$ verificando $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

• **Desigualdad de Hölder:**

$$\sum_{k=1}^{d} |a_k b_k| \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} |a_k|^p \right)^{1/p} \left(\sum_{k=1}^{d} |b_k|^q \right)^{1/q}$$

donde d es cualquier número natural y $a_1, \dots, a_d$, $b_1, \dots, b_d$ escalares arbitrarios.

• **Desigualdad de Minkowski:**

$$\left(\sum_{k=1}^{d} |a_k + b_k|^p \right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{k=1}^{d} |a_k|^p \right)^{1/p} + \left(\sum_{k=1}^{d} |b_k|^p \right)^{1/p}$$

válida para $d \in \mathbb{N}$, $a_1, \dots, a_d, b_1, \dots, b_d \in \mathbb{K}$, $1 \leqslant p < \infty$.

1.1.3 Ejemplo. *Los espacios ℓ_p^d $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$.*
Las desigualdades anteriores hacen inmediato comprobar que, para $1 \leqslant p < \infty$, definiendo

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_d)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{d} |\alpha_k|^p \right)^{1/p} \qquad \Big((\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{K}^d \Big)$$

se obtiene una norma en $\mathbb{K}^d$. Es costumbre denotar ℓ_p^d al espacio de Banach $(\mathbb{K}^d, \|\cdot\|_p)$. Si consideramos la *norma del máximo*, esto es,

$$\|(\alpha_1, \dots, \alpha_d)\|_\infty = \max\{ |\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_d| \} \qquad \Big((\alpha_1, \dots, \alpha_d) \in \mathbb{K}^d \Big),$$

obtenemos otro espacio normado que denotaremos por ℓ_∞^d. La complitud de las normas que acabamos de definir se sigue de forma inmediata de la complitud del cuerpo base.

Es fácil comprobar que, para $\alpha_1, \dots, \alpha_d \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\lim_{p\to\infty} \|(\alpha_1, \dots, \alpha_d)\|_p = \|(\alpha_1, \dots, \alpha_d)\|_\infty,$$

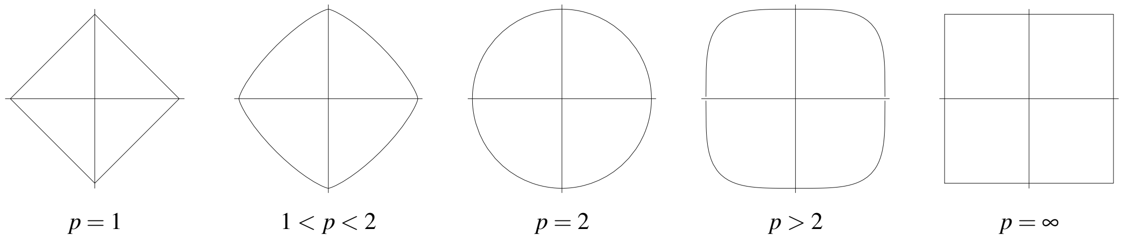

Figura 1.1: La esfera unidad de $(\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_p)$

lo que justifica la notación empleada. Por otra parte, las desigualdades obvias:

$$\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_p \leqslant d\|x\|_\infty \qquad (x \in \mathbb{K}^d, 1 \leqslant p < \infty)$$

nos hacen ver que todas las normas introducidas en $\mathbb{K}^d$ son equivalentes.

1.1.4 Ejemplo. *El espacio ℓ_∞^Λ.*
Dado un conjunto Λ, podemos considerar el espacio vectorial ℓ_∞^Λ de las aplicaciones de Λ en $\mathbb{K}$ acotadas. La norma natural de este espacio viene dada por

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| \ : \ \lambda \in \Lambda\} \qquad \left(x \in \ell_\infty^\Lambda\right).$$

Es fácil comprobar que la convergencia en esta norma equivale a la convergencia uniforme en Λ, lo que nos lleva a probar sin dificultad que ℓ_∞^Λ es un espacio de Banach. Como casos particulares tenemos, para $\Lambda = \mathbb{N}$, el espacio ℓ_∞ de las sucesiones acotadas de escalares y, tomando $\Lambda = \{1, 2, \ldots, d\}$, los espacios de dimensión finita ℓ_∞^d definidos previamente.

1.1.5 Ejemplo. *Los espacios $C_{00}(L)$, $C_0(L)$ y $C(K)$.*
Si L es un espacio topológico localmente compacto de Hausdorff, $C_{00}(L)$ es el subespacio de ℓ_∞^L formado por las funciones continuas de soporte compacto. En general, $C_{00}(L)$ no es cerrado y su cierre es el espacio de Banach $C_0(L)$ de las funciones continuas *que se anulan en el infinito*. Decimos que una función continua $x : L \longrightarrow \mathbb{K}$ se anula en el infinito si el conjunto $\{t \in L \ : \ |x(t)| \geqslant \varepsilon\}$ es compacto en L para todo $\varepsilon > 0$ (supuesta conocida la compactificación por un punto, la notación se hace coherente).

En particular, tomando $L = \mathbb{N}$ con la topología discreta, aparecen el espacio c_{00} de las sucesiones casi-nulas y el espacio c_0 de las sucesiones convergentes a cero. Así nos encontramos con el primer ejemplo de espacio normado que no es de Banach: c_{00}. Es un buen ejercicio comprobar que c_{00} es denso en c_0 y, por tanto, su norma no es completa.

Si K es un espacio topológico compacto de Hausdorff, entonces $C_{00}(K) = C_0(K)$ y ambos espacios coinciden con $C(K)$, el espacio de Banach de las funciones continuas en K. Si K es la compactación por un punto de $\mathbb{N}$, aparece el espacio c de las sucesiones convergentes.

1.1.6 Ejemplo. *Los espacios ℓ_p $(1 \leqslant p < \infty)$.*
Fijado p con $1 \leqslant p < \infty$, el conjunto

$$\ell_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < +\infty \right\}$$

es un subespacio vectorial de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, el espacio de las sucesiones de elementos de $\mathbb{K}$. Haciendo $d \to \infty$ en la desigualdad de Minkowski, obtenemos la desigualdad triangular para la norma $\|\cdot\|_p$ definida por:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in \ell_p).$$

Es rutinario comprobar que $\|\cdot\|_p$ es una norma completa, luego los ℓ_p son espacios de Banach.

1.1.7 Ejemplo. *Los espacios* $L_p[0,1]$ $(1 \leqslant p < \infty)$.
Es usual denotar por $\mathcal{L}_0[0,1]$ al espacio vectorial de las funciones medibles (en el sentido de Lebesgue) de $[0,1]$ en $\mathbb{K}$. Fijemos $p \in [1,+\infty[$ y definamos

$$\mathcal{L}_p[0,1] = \left\{ f \in \mathcal{L}_0[0,1] \;:\; \varphi_p(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Es inmediato comprobar que $\mathcal{L}_p[0,1]$ es un espacio vectorial y, usando la desigualdad de Minkowski para integrales (obtenida análogamente a la ya expuesta), que $\varphi_p(\cdot)$ es una seminorma en $\mathcal{L}_p[0,1]$. Sin embargo, $\varphi_p(f) = 0$ siempre que f se anule c.p.d. (casi por doquier), luego φ_p no es una norma.

Para sortear este escollo, basta hacer cociente por el subespacio

$$\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}_0[0,1] \;:\; f = 0 \text{ c.p.d.} \} = \{ f \in \mathcal{L}_0[0,1] \;:\; \varphi_p(f) = 0 \} \subset \mathcal{L}_p[0,1],$$

esto es, identificar las funciones que sean iguales c.p.d. Así, consideremos $L_p[0,1] = \mathcal{L}_p[0,1]/\mathcal{N}$ y

$$\|f + \mathcal{N}\|_p = \varphi_p(f) = \left(\int_0^1 |f(t)|^p\, dt \right)^{\frac{1}{p}}$$

para obtener el espacio normado $(L_p[0,1], \|\cdot\|_p)$. Esencialmente, $L_p[0,1]$ no es otra cosa que el mismo espacio $\mathcal{L}_p[0,1]$ en el que se considera la igualdad c.p.d. en lugar de la igualdad ordinaria de funciones.

Si Ω es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^d$, los espacios $L_p(\Omega)$ $(1 \leqslant p < \infty)$ se definen de manera totalmente análoga.

1.1.8 Teorema (de Riesz-Fischer)**.** *Para* $1 \leqslant p < \infty$, *el espacio normado* $L_p[0,1]$ *es completo.*

1.1.9 Ejemplo. *El espacio* $L_\infty[0,1]$.
Dada una función $f \in \mathcal{L}_0[0,1]$ y una constante $M \geqslant 0$, decimos que M es una *cota esencial* de f si

$$\lambda\big(\{ x \in [0,1] \;:\; |f(x)| > M \} \big) = 0,$$

esto es, $|f| \leqslant M$ c.p.d. Si f admite alguna cota esencial, diremos que f es *esencialmente acotada*, y notaremos $\mathcal{L}_\infty[0,1]$ al subespacio de $\mathcal{L}_0[0,1]$ formado por las funciones esencialmente acotadas. Si definimos

$$\begin{aligned} \varphi_\infty(f) &= \text{mín}\{ M \geqslant 0 \;:\; |f| \leqslant M \text{ c.p.d.} \} \\ &= \text{mín}\big\{ M \geqslant 0 \;:\; \lambda\big(\{ t \in [0,1] \;:\; |f(t)| > M \} \big) = 0 \big\} \qquad \big(f \in \mathcal{L}_\infty[0,1] \big), \end{aligned}$$

es inmediato comprobar que $\varphi_\infty(\cdot)$ es una seminorma que no es norma. De nuevo basta identificar las funciones que son iguales c.p.d. para obtener un espacio normado. Concretamente, si otra vez es

$$\mathcal{N} = \{ f \in \mathcal{L}_0[0,1] \;:\; f = 0 \text{ c.p.d.} \} \subset \mathcal{L}_\infty[0,1],$$

definimos $L_\infty[0,1] = \mathcal{L}_\infty[0,1] \,/\, \mathcal{N}$ y

$$\|f + \mathcal{N}\|_\infty = \varphi_\infty(f) \qquad \big(f \in L_\infty[0,1]\big),$$

obtenemos el espacio normado $(L_\infty[0,1], \|\cdot\|_\infty)$. La demostración de la complitud de la norma $\|\cdot\|_\infty$ es fácil; basta tener en cuenta que la condición de Cauchy para dicha norma equivale a la condición de Cauchy uniforme salvo un conjunto de medida 0. Como en el caso de $L_p[0,1]$, esencialmente $L_\infty[0,1]$ es el espacio $\mathcal{L}_\infty[0,1]$ en el que se considera la igualdad c.p.d. en lugar de la igualdad ordinaria de funciones.

Si Ω es un subconjunto medible de $\mathbb{R}^d$, la definición de $L_\infty(\Omega)$ es completamente análoga a la que hemos hecho para $[0,1]$.

1.1.10 Definición. *Si X es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y $B \subset X$, decimos que B es un conjunto* linealmente independiente *si cualquier subconjunto finito de B es linealmente independiente; decimos que B es un* sistema de generadores *si todo elemento de X se expresa como combinación lineal de un subconjunto finito de B. Una* ***base algebraica*** *(también llamada* ***base de Hamel****) de X es un subconjunto de X linealmente independiente maximal, esto es, que es sistema de generadores. Equivalentemente, una base algebraica de X es $B \subset X$ tal que cualquier elemento $x \in X$ se expresa de forma única como combinación lineal de un subconjunto finito de B. Es claro que cualesquiera dos bases de Hamel de un mismo espacio vectorial son biyectivas, lo que nos permite definir la* ***dimensión algebraica*** *del espacio vectorial como el cardinal de una base.*

1.1.11 Ejemplo. *En cualquier espacio vectorial puede definirse una norma.* En efecto, sea X un espacio vectorial y $\{e_\lambda \,:\, \lambda \in \Lambda\}$ una base algebraica de X. Podemos entonces definir

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{n} |t_i| \qquad \Big(x = \sum_{i=1}^{n} t_i\, e_{\lambda_i} \in X\Big).$$

Es inmediato comprobar que $\|\cdot\|$ es una norma en X.

• Producto de espacios normados:

Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios normados y denotemos $\|\cdot\|$ a la norma todos ellos. En el espacio vectorial producto $X = \prod_{k=1}^{n} X_k$ definimos, para $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p = \Big\|\big(\|x_1\|,\ldots,\|x_n\|\big)\Big\|_p \qquad \Big((x_1,\ldots,x_n) \in X\Big),$$

esto es,

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} \|x_k\|^p\right)^{1/p} \qquad \text{si } 1 \leqslant p < \infty,$$

$$\|(x_1,\ldots,x_n)\|_\infty = \text{máx}\,\big\{\|x_k\| \,:\, 1 \leqslant k \leqslant n\big\} \qquad \text{si } p = \infty.$$

De esta forma se obtienen normas equivalentes en X, que generan todas ellas la topología producto. La demostración de este hecho no ofrece más dificultad que el caso ya tratado $X_1 = X_2 = \cdots = X_n = \mathbb{K}$, pues el único ingrediente no trivial es de nuevo la desigualdad de Minkowski. Es también fácil ver que X, con cualquiera de las normas recién definidas, es completo si, y sólo si, lo son $X_1, \ldots, X_n$. Es usual denotar *por* $[\bigoplus_{i=1}^{n} X_i]_p$ *al espacio normado* X *dotado de la norma* $\|\cdot\|_p$ *y llamarlo* **p-*suma directa*** *de los espacios* $X_1, X_2, \ldots, X_n$. *Si tenemos dos espacios* X *e* Y, *suele emplearse la notación* $X \oplus_p Y$ *para* $(X \times Y, \|\cdot\|_p)$.

Para $i \in \{1,2,\ldots,n\}$ *definimos la* ***proyección* i-*ésima*** *como la aplicación lineal* $P_i : X \to X$ *dada por*

$$P_i(x_1,\ldots,x_n) = (0,\ldots,0,\overset{(i)}{x_i},0,\ldots,0) \qquad \big((x_1,\ldots,x_n) \in X\big).$$

Es claro que $P_i \circ P_i = P_i$, $\|P_i(x_1,\ldots,x_n)\| \leqslant \|(x_1,\ldots,x_n)\|$ *para todo* $(x_1,\ldots,x_n) \in X$ *y*

$$P_i(X) = \{(0,\ldots,\overset{(i)}{x_i},\ldots,0) \ : \ x_i \in X_i\}.$$

Obsérvese que cada uno de los "factores" o "sumandos" X_i *es isométricamente isomorfo al subespacio* $P_i(X)$. *En efecto, la aplicación*

$$x \longmapsto (0,\ldots,\overset{(i)}{x},\ldots,0) \qquad (x \in X_i)$$

es un isomorfismo isométrico de X_i *sobre el subespacio* $P_i(X)$.

La segunda construcción es el

• **Espacio normado cociente:**
Sea X *un espacio normado e* Y *un subespacio cerrado suyo. Denotamos por* X/Y *al espacio vectorial cociente, esto es,* $X/Y = \{x+Y \ : \ x \in X\}$ *con la suma y producto por escalares usuales. Definiendo*

$$\|x+Y\| = \text{ínf}\big\{\|x-y\| : y \in Y\big\} = \text{dist}\,(x,Y) \qquad (x+Y \in X/Y),$$

obtenemos una norma en el espacio cociente X/Y. *Usando las observaciones elementales*

(a) $\|x+Y\| \leqslant \|x\|$ *para todo* $x \in X$,
(b) para todo $x \in X$ *y todo* $\varepsilon > 0$, *existe* $x' \in X$ *tal que* $x+Y = x'+Y$ *y* $\|x'\| < \|x+M\| + \varepsilon$,

es rutinario demostrar que X/Y *es un espacio de Banach cuando* X *lo es.*

1.2. Aplicaciones lineales y continuas. Dual de un espacio normado

1.2.1 Teorema. *Sean* X *e* Y *dos espacios normados y* $T : X \longrightarrow Y$ *una aplicación lineal. Son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

(i) T *es continua en un punto.*
(ii) T *es continua en* 0.
(iii) *Existe una constante* $M \geqslant 0$ *tal que* $\|T(x)\| \leqslant M\,\|x\|$ *para todo* $x \in X$.
(iv) T *es Lipschitziana, es decir, existe una constante* $C \geqslant 0$ *tal que* $\|T(x) - T(y)\| \leqslant C\,\|x-y\|$ *para todos* $x,y \in X$.
(v) $T(B_X)$ *es un subconjunto acotado de* Y.
(vi) *Para cualquier subconjunto acotado* A *de* X, $T(A)$ *es un subconjunto acotado de* Y.
(vii) T *es continua en* X.

1.2.2 Definición. *Sean* X *e* Y *dos espacios de Banach. Escribimos* $L(X,Y)$ *para denotar al espacio de las aplicaciones lineales y continuas de* X *en* Y, *también llamado* **espacio de operadores**. *Definiendo*

$$\|T\| = \sup\{\|T(x)\| \ : \ x \in B_X\} \qquad \big(T \in L(X,Y)\big),$$

se obtiene una norma en $L(X,Y)$, que llamaremos **norma de operadores***. La convergencia en dicha norma equivale a la convergencia uniforme en B_X o a la convergencia uniforme en cada subconjunto acotado de X. Escribiremos $L(X)$ en lugar de $L(X,X)$.*

1.2.3 Proposición. *Sean X, Y, Z espacios normados.*

(a) *Para $T \in L(X,Y)$, se tiene*

$$\|T\| = \sup\left\{\|T(x)\| \ : \ x \in S_X\right\} = \sup\left\{\|T(x)\| \ : \ x \in \overset{\circ}{B}_X\right\}$$
$$= \min\left\{M \geqslant 0 \ : \ \|T(x)\| \leqslant M\|x\| \ \text{ para todo } x \in X\right\}.$$

La última igualdad nos dice que $\|T\|$ es la constante de Lipschitz de T

(b) *Si Y es un espacio de Banach, entonces $L(X,Y)$ también lo es.*

(c) *Si $T \in L(X,Y)$ y $S \in L(Y,Z)$, entonces $S \circ T \in L(X,Z)$ y $\|S \circ T\| \leqslant \|S\|\,\|T\|$. En particular, $L(X)$ es un álgebra con el producto dado por la composición, y dicho producto es continuo. Por comodidad, notaremos este producto por yuxtaposición, esto es, $ST := S \circ T$.*

1.2.4 Corolario. *Sean X un espacio normado, Y un espacio de Banach y M un subespacio denso en X. Para cada $T \in L(M,Y)$, existe una única aplicación continua $\widetilde{T} : X \longrightarrow Y$ que extiende a T. Además, $\widetilde{T}$ es lineal y $\|\widetilde{T}\| = \|T\|$. En consecuencia, los espacios de Banach $L(M,Y)$ y $L(X,Y)$ son isométricamente isomorfos.*

Si X e Y son espacios normados, un operador $P \in L(X,Y)$ es una ***proyección (lineal y continua)*** *si verifica $P^2 (= PP) = P$, y en este caso se tiene que $Id - P$ es también una proyección. Obsérvese que $P(X) = \ker(Id - P)$, luego P restringido a $P(X)$ es la identidad; análogamente $\ker(P) = [Id - P](X)$. Diremos que una proyección P es* no trivial *si $P \neq 0$ y $P \neq Id$. Es claro que si P es una proyección no trivial, entonces $\|P\| \geqslant 1$, $\|Id - P\| \geqslant 1$. Como ejemplos podemos citar las proyecciones i-ésimas que definimos en una p-suma directa de espacios normados.*

En otro orden de cosas, dado un espacio normado X, escribiremos X^* en lugar de $L(X,\mathbb{K})$; X^* es el ***espacio dual*** *de X y sus elementos son los* ***funcionales lineales continuos*** *en X. De esta forma, X^* es un subespacio vectorial del dual algebraico de X, denotado por $X^\sharp$, que no es más que el espacio vectorial de las aplicaciones lineales de X en $\mathbb{K}$, también llamadas* funcionales*. Si $f \in X^\sharp$, el* núcleo *de f es el subespacio $\ker f = \{x \in X \ : \ f(x) = 0\}$.*

1.2.5 Proposición. *Sea X un espacio normado y f un funcional lineal en X.*

(a) *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
   - (i) *f es continuo.*
   - (ii) *$\ker f$ es cerrado.*
   - (iii) *f está acotado en B_X.*

(b) *Si para $f \in X^*$ se define*

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in B_X\} = \min\{M \geqslant 0 \ : \ |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\},$$

se obtiene una norma en X^* que lo convierte en espacio de Banach.

(c) *Si M es un subespacio denso de X, entonces $M^* = X^*$.*

1.2.6 Proposición. *Sea X un espacio normado y $f \in X^* \setminus \{0\}$. Si $x \in X$, entonces*

$$\operatorname{dist}\big(x, \ker f\big) = \frac{|f(x)|}{\|f\|}.$$

1.3. Duales de algunos espacios de sucesiones

1.3.1 Proposición. *Para $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $d \in \mathbb{N}$, el espacio dual de ℓ_p^d es isométricamente isomorfo a ℓ_q^d, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ para $p \neq 1, \infty$; $q = \infty$ si $p = 1$ y $q = 1$ si $p = \infty$. De hecho, la aplicación $\Phi : \ell_q^d \longrightarrow \big(\ell_p^d\big)^*$ definida por*

$$\Big[\Phi\big(y(1), \ldots, y(d)\big)\Big]\big(x(1), \ldots, x(d)\big) = \sum_{i=1}^{d} y(i)x(i) \qquad \big(x \in \ell_p^d,\ y \in \ell_q^d\big),$$

es un isomorfismo isométrico.

1.3.2 Proposición. *Sean $X_1, X_2, \ldots, X_n$ espacios normados, $1 \leqslant p \leqslant \infty$ y $X = [\bigoplus_{i=1}^n X_i]_p$ su p-suma directa. Entonces, la aplicación: $\Phi : [\bigoplus_{i=1}^n X_i^*]_q \to X^*$ definida por*

$$\big[\Phi(f_1, \ldots, f_n)\big](x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x_k)$$

es un isomorfismo isométrico, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ con los convenios usuales.

1.3.3 Proposición. *Para $1 < p < \infty$, el espacio dual de ℓ_p es isométricamente isomorfo a ℓ_q, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. De hecho, la identificación viene dada por el isomorfismo isométrico $\Phi : \ell_q \longrightarrow \big(\ell_p\big)^*$ definido por*

$$\big[\Phi(y)\big](x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n) \qquad \big(x \in \ell_p,\ y \in \ell_q\big).$$

1.3.4 Proposición. *Si para $y \in \ell_\infty$, $x \in \ell_1$ definimos*

$$[\Phi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n),$$

entonces la aplicación $y \longmapsto \Phi(y)$ es un isomorfismo isométrico de ℓ_∞ sobre ℓ_1^*.

1.3.5 Proposición. *Si para $y \in \ell_1$, $x \in c_0$, definimos:*

$$[\Phi(y)](x) = \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n),$$

entonces la aplicación $y \longmapsto \Phi(y)$ es un isomorfismo isométrico de ℓ_1 sobre c_0^*.

1.3.6 Proposición. *Si para $y = (y(0), y(1), \ldots) \in \ell_1$, $x \in c$ definimos*

$$[\Phi(y)](x) = y(0) \lim_{n\to\infty} x(n) + \sum_{n=1}^{\infty} y(n)x(n),$$

entonces la aplicación $y \longmapsto \Phi(y)$ es un isomorfismo isométrico de ℓ_1 sobre c^*.

1.4. Espacios normados de dimensión finita. Lema de Riesz

1.4.1 Teorema (de Hausdorff-Tihonov). *Todas las normas en* $\mathbb{K}^d$ *son equivalentes.*

1.4.2 Corolario.

(a) *Toda aplicación lineal de un espacio normado de dimensión finita en cualquier otro espacio normado es continua.*
(b) *Todo espacio normado de dimensión finita es un espacio de Banach. En particular, todos los subespacios de un espacio normado de dimensión finita son cerrados.*
(c) *Todo subespacio de dimensión finita de un espacio normado cualquiera es cerrado.*
(d) *Toda biyección lineal entre dos espacios normados de dimensión finita es un isomorfismo. En consecuencia, dos espacios normados de dimensión finita son isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión.*
(e) *(Propiedad de Heine-Borel) Un subconjunto de un espacio normado de dimensión finita es compacto si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

1.4.3 Teorema (clásico de Riesz). *Si* X *es un espacio normado, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) X *es localmente compacto.*
(ii) *La bola unidad de* X *es compacta.*
(iii) *La dimensión de* X *es finita.*

1.4.4 Lema (clásico de Riesz). *Sea* X *un espacio normado,* M *un subespacio cerrado propio de* X *y* $0 < \varepsilon < 1$. *Existe entonces* $x \in S_X$ *tal que* $\operatorname{dist}(x,M) > 1-\varepsilon$. *Si además la dimensión de* M *es finita, entonces existe* $x \in S_X$ *tal que* $\operatorname{dist}(x,M) = 1$.

1.4.5 Corolario. *Sea* X *un espacio normado. Entonces, la dimensión de* X *es infinita si, y sólo si, existe una sucesión* (x_n) *en* S_X *tal que* $\|x_n - x_m\| \geqslant 1$ *para cualesquiera* $n,m \in \mathbb{N}$ *distintos. En cuyo caso, se puede conseguir que el conjunto* $\{x_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ *sea linealmente independiente.*

1.5. Espacios normados separables

1.5.1 Definición. *Un espacio normado es* ***separable*** *si contiene un subconjunto denso numerable.*

Si X *es un espacio normado y* $A \subset X$, *la envolvente lineal de* A, $\operatorname{lin}(A)$, *es el subespacio vectorial generado por* A, *esto es, el menor subespacio vectorial que contiene a* A. *Análogamente,* $\overline{\operatorname{lin}}(A)$ *es el menor subespacio cerrado de* X *que contiene a* A, *que llamamos envolvente lineal cerrada.*

1.5.2 Proposición. *Sea* X *un espacio normado.*

(a) X *es separable si, y sólo si, existe un subconjunto numerable* $A \subset X$ *tal que* $\overline{\operatorname{lin}}(A) = X$. *En caso afirmativo se puede conseguir que* $A \subseteq S_X$.
(b) *Si* $X = \overline{\operatorname{lin}}(B)$ *y* B *contiene un subconjunto denso numerable, entonces* X *es separable. En particular, si* S_X o B_X *contienen un subconjunto denso numerable, entonces* X *es separable.*

(c) *Si existen un subconjunto no numerable $B \subset X$ y una constante $\delta > 0$ tales que $\|x-y\| > \delta$ para cualesquiera $x, y \in B$ distintos, entonces X no es separable.*

1.5.3 Ejemplos.

(a) *Los espacios c_{00}, c_0, c y ℓ_p para $1 \leqslant p < \infty$ son separables.*
(b) *Los espacios $C[0,1]$ y $L_p[0,1]$ para $1 \leqslant p < \infty$ son separables.*
(c) *Los espacios ℓ_∞ y $L_\infty[0,1]$ no son separables.*

1.5.4 Proposición.

(a) *Sea X un espacio normado separable. Entonces:*
  (i) *Para todo espacio normado Y y todo $T \in L(X,Y)$, $T(X)$ es separable. En particular, si X e Y son isomorfos, entonces Y es separable.*
  (ii) *Los subespacios y los cocientes de X son separables.*
(b) *Sean $X_1, X_2, \dots, X_n$ espacios normados. Entonces $[\bigoplus_{i=1}^n X_i]_p$ es separable si, y sólo si, X_i es separable para $i = 1, 2, \dots, n$.*

1.5.5 Teorema. *Un espacio normado X es separable si, y sólo si, existe un subconjunto compacto K de X tal que $X = \overline{\operatorname{lin}}(K)$.*

Capítulo 2

Espacios prehilbertianos y espacios de Hilbert

2.1 Igualdad del paralelogramo. Teoremas de la proyección ortogonal y de Riesz-Fréchet.

2.1.1 Definición.
*Sea X un espacio vectorial. Un **producto escalar** en X es una aplicación*

$$X \times X \longrightarrow \mathbb{K}, \qquad (x,y) \longmapsto (x \mid y) \quad (x,y \in X),$$

verificando:

- $(\lambda x + y \mid z) = \lambda(x \mid z) + (y \mid z)$ *para cualesquiera* $x,y,z \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $(y \mid x) = \overline{(x \mid y)}$ *para* $x,y \in X$.
  - *Por tanto,* $(x \mid \lambda y + z) = \overline{\lambda}(x \mid y) + (x \mid z)$ $\ x,y,z \in X$, $\lambda \in \mathbb{K}$.
- $(x \mid x) > 0$ *para todo* $x \in X \setminus \{0\}$.

*Un **espacio prehilbertiano** es un espacio vectorial en el que se tiene definido un producto escalar.*

2.1.2 Lema (Identidad de polarización)**.**

- *Si X es un espacio vectorial real, se tiene que*

$$4(x \mid y) = (x+y \mid x+y) - (x-y \mid x-y) \qquad (x,y \in X).$$

- *Si X es un espacio vectorial complejo, se tiene que*

$$\begin{aligned} 4(x \mid y) = {} & (x+y \mid x+y) - (x-y \mid x-y) + \\ & + i\left[(x+iy \mid x+iy) - (x-iy \mid x-iy)\right] \qquad (x,y \in X). \end{aligned}$$

2.1.3 Proposición.
Sea X un espacio prehilbertiano. Se verifica entonces

- ***Desigualdad de Cauchy-Schwarz:***

$$|(x \mid y)|^2 \leqslant (x \mid x)(y \mid y) \qquad (x, y \in X).$$

- ***Desigualdad de Minkowski:***

$$(x + y \mid x + y)^{1/2} \leqslant (x \mid x)^{1/2} + (y \mid y)^{1/2} \qquad (x, y \in X).$$

2.1.4 Consecuencias.

- *La aplicación $x \longmapsto (x \mid x)^{1/2}$ es una norma en el espacio prehilbertiano X:*
  - *será la norma canónica que consideraremos en X;*
  - *la desigualdad de Minkowski se convierte en la desigualdad triangular*
  - *la desigualdad de Cauchy-Schwarz toma la forma*

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \, \|y\| \qquad (x, y \in X).$$

- *Si la norma de un espacio prehilbertiano X es completa, decimos que X es un* ***espacio de Hilbert***
- *El producto escalar es continuo en $X \times X$.*
- *La norma determina al producto escalar:*
  - *Caso Real:*

$$4 \operatorname{Re}(x \mid y) = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \qquad (x, y \in X)$$

  - *Caso complejo:*
    * *podemos usar la identidad de polarización o*
    * $\operatorname{Im}(x \mid y) = \operatorname{Re}(x \mid iy)$.
- *Si X e Y son espacios prehilbertianos y $T : X \longrightarrow Y$ es una* ***isometría sobreyectiva****, entonces T conserva el producto escalar:*

$$(Tx \mid Ty) = (x \mid y) \qquad (x, y \in X).$$

- *Dicho de otra forma, dos espacios prehilbertianos son totalmente idénticos si lo son como espacios normados, esto es, si son isométricamente isomorfos.*

¿Qué normas proceden de un producto escalar?

2.1.5 Teorema (de Jordan-von Neumann)**.**
Sea $\|\cdot\|$ una norma en un espacio vectorial X. Equivalen:

- *Existe un producto escalar $(\cdot \mid \cdot)$ en X tal que $\|x\|^2 = (x \mid x)$ $\forall x \in X$.*
- *Se verifica la **igualdad del paralelogramo**:*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\big(\|x\|^2 + \|y\|^2\big) \qquad (x,y \in X).$$

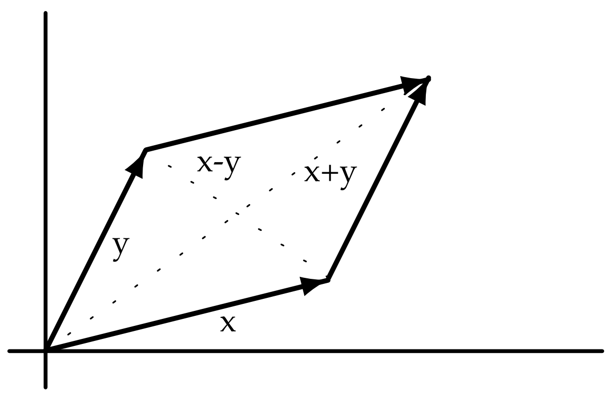

Figura 2.1: Igualdad del paralelogramo

2.1.6 Corolario.

- *Si X es un espacio normado complejo, entonces X es prehilbertiano (su norma procede de un producto escalar) si, y sólo si, lo es $X_{\mathbb{R}}$.*
- *Si X es un espacio normado real con $\dim(X) \geqslant 2$, entonces X es un espacio prehilbertiano si, y sólo si, cada subespacio bidimensional de X es prehilbertiano.*
- *Si $\dim(X) = 2$ y X es un espacio de Hilbert, entonces S_X es una elipse.*

2.1.7 Ejemplos.

- Dado p con $1 \leqslant p \leqslant \infty$, el espacio de Banach $L_p[0,1]$ es un espacio de Hilbert si, y sólo si, $p = 2$. El producto escalar en $L_2[0,1]$ que genera su norma viene dado por

$$(f \mid g) = \int_0^1 f(t)\overline{g(t)}\, d\lambda(t) \qquad \big(f,g \in L_2[0,1]\big).$$

- ℓ_2^d para $d \in \mathbb{N}$ y ℓ_2 también son espacios de Hilbert; el producto escalar viene dado por

$$(x \mid y) = \sum_{n=1}^{d} x(n)\overline{y(n)} \qquad (x, y \in \ell_2^d)$$
$$(x \mid y) = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\overline{y(n)} \qquad (x, y \in \ell_2).$$

2.1.8 Corolario.
Sea H un espacio prehilbertiano.

- *Si (x_n) e (y_n) son sucesiones en B_H tales que $(\|x_n + y_n\|) \longrightarrow 2$, entonces $(\|x_n - y_n\|) \longrightarrow 0$. En particular, la esfera unidad de H no contiene segmentos no triviales.*
- *Si (x_n) es una sucesión de vectores de H y $x \in H$, tales que $(\|x_n\|) \longrightarrow \|x\|$ y $(x_n \mid y) \longrightarrow (x \mid y)$ para todo $y \in H$, entonces $(\|x_n - x\|) \longrightarrow 0$.*

2.1.9 Teorema (de aproximación óptima)**.**
Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto convexo y completo de H y $a \in H$. Entonces, existe un único punto $x_0 \in M$ tal que

$$\|a - x_0\| \leqslant \|a - x\| \qquad (x \in M),$$

esto es, a tiene una única mejor aproximación en M.

2.1.10 Lema.
Sea H un espacio prehilbertiano, M un subconjunto no vacío y convexo de H, $a \in H$. Dado $x_0 \in M$, son equivalentes:

- $\|a - x_0\| \leqslant \|a - x\|$ *para todo* $x \in M$.
- $\operatorname{Re}(a - x_0 \mid x - x_0) \leqslant 0$ *para todo* $x \in M$.

Si M es, de hecho, un subespacio, lo anterior también equivale a

- $(a - x_0 \mid x) = 0$ *para todo* $x \in M$.

Este resultado motiva la definición de ortogonalidad:

2.1.11 Definición.
Sea H un espacio prehilbertiano.

- *Dos vectores $x, y \in H$ son* ***ortogonales*** *y escribimos $x \perp y$, cuando $(x \mid y) = 0$.*
- *Evidentemente, $x \perp y \Leftrightarrow y \perp x$.*
- *Dado un subconjunto no vacío M de H, notamos*

$$M^{\perp} = \{y \in H \,:\, y \perp x \quad \forall x \in M\}$$

- $M^{\perp}$ *es un subespacio cerrado de* H*;*
- $M \cap M^{\perp} = \{0\} \quad y \quad M \subset M^{\perp\perp}$.

Si M es un subespacio completo de H, dado $a \in H$ existe una mejor aproximación x_0 para a en M; el lema anterior nos dice que $a - x_0 \in M^{\perp}$, luego

$$a = x_0 + (a - x_0) \in M + M^{\perp}.$$

Esta es la principal afirmación del siguiente enunciado y de ella se deducen inmediatamente las demás:

2.1.12 Teorema (de la proyección ortogonal)**.**
Sea H un espacio prehilbertiano y M un subespacio completo de H. Entonces:

- $H = M \oplus M^{\perp}$.
- *La proyección lineal P_M de H sobre M tal que* $\ker P_M = M^{\perp}$ *recibe el nombre de* ***proyección ortogonal*** *de H sobre M, y verifica que*

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in H).$$

  - P_M *es continua;*
  - *si $M \neq \{0\}$, entonces $\|P_M\| = 1$;*
  - *Para cada $x \in H$, $P_M(x)$ es el único punto de M que materializa la distancia de x a M.*

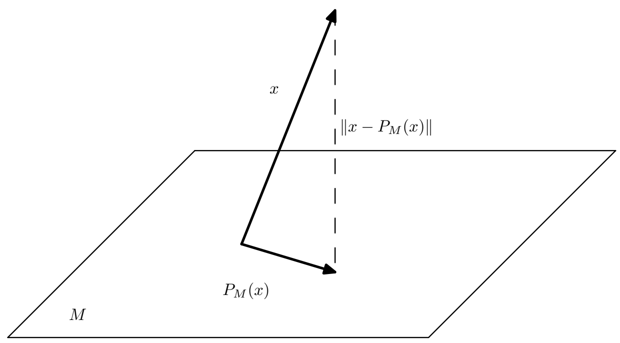

Figura 2.2: Proyección ortogonal

2.1.13 Corolario.
Sea A un subconjunto no vacío de un espacio de Hilbert H.

- $A^{\perp\perp}$ *es el mínimo subespacio cerrado de H que contiene al conjunto A:* $\overline{\mathrm{lin}(A)} = A^{\perp\perp}$.
- *En particular, si Y es un subespacio de H:*

- $\overline{Y} = Y^{\perp\perp}$,
- *luego Y es denso en H si, y sólo si, $Y^{\perp} = \{0\}$.*

2.1.14 Teorema (de Riesz-Fréchet).
Sea H un espacio de Hilbert y $f \in H^*$.

- *Entonces existe un único vector $y \in H$ tal que $f(x) = (x \mid y)$ $\forall x \in H$.*
- *La aplicación $y \longmapsto \widetilde{y}$, donde*

$$\widetilde{y}(x) = (x \mid y) \qquad (x, y \in H),$$

es una biyección conjugado-lineal isométrica de H sobre H^*.

2.1.15 Observación.
En casos concretos como ℓ_2^d, ℓ_2 y $L_2[0,1]$ se tiene:

- la aplicación $g \longmapsto \overline{g}$ es una isometría conjugado-lineal sobreyectiva.
- Componiendo obtenemos que

$$g \longmapsto \overline{g} \longmapsto (\cdot \mid \overline{g})$$

es una isometría lineal sobreyectiva.

2.1.16 Corolario.

- *Para $y = (y(1), \ldots, y(n)) \in \ell_2^d$, pongamos*

$$\left[\Phi(y)\right](x(1), \ldots, x(n)) = \sum_{k=1}^{d} y(k)x(k) \qquad \left(x \in \ell_2^d\right).$$

Entonces, Φ es una biyección lineal isométrica de ℓ_2^d sobre $\left[\ell_2^d\right]^*$.

- *Para $y = (y(k)) \in \ell_2$, pongamos*

$$\left[\Phi(y)\right](x) = \sum_{k=1}^{\infty} y(k)x(k) \qquad \left(x \in \ell_2\right).$$

Entonces, Φ es una biyección lineal isométrica de ℓ_2 sobre ℓ_2^*.

- *Para $g \in L_2[0,1]$, pongamos*

$$\left[\Phi(g)\right](f) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt \qquad \left(f \in L_2[0,1]\right).$$

Entonces, Φ es una biyección lineal isométrica de $L_2[0,1]$ sobre $L_2[0,1]^*$.

2.2 Familias sumables en espacios normados

2.2.1 Definición.
Λ conjunto no vacío arbitrario, X espacio normado.

- *$\mathcal{F}(\Lambda)$ denotará el conjunto de las partes finitas de Λ.*
- *Una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de vectores de X es **sumable** si existe $x \in X$ con la siguiente propiedad:*

$$\text{para cada } \varepsilon > 0\ \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \text{ tal que si } J \in \mathcal{F}(\Lambda) \text{ y } J_0 \subset J, \text{ entonces}$$

$$\left\| \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \right\| < \varepsilon.$$

  - *El vector x, si existe, es único;*
  - *le llamamos **suma** de la familia;*
  - *escribimos $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda$ para indicar simultáneamente que la familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y que x es su suma.*

2.2.2 Proposición.
X espacio normado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ e $\{y_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ familias de vectores de X.

- *Si $\sigma : I \longrightarrow \Lambda$ es una biyección, entonces se tiene*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \iff x = \sum_{i \in I} x_{\sigma(i)}.$$

- *Si $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda,\ y = \sum_{\lambda \in \Lambda} y_\lambda,\ \alpha \in \mathbb{K}$, entonces*

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} (\alpha x_\lambda + y_\lambda) = \alpha x + y.$$

- *Si Y es otro espacio normado y $T \in L(X,Y)$, entonces*

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda \implies T(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} T(x_\lambda).$$

2.2.3 Definición.
*Una familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de elementos de un espacio normado X verifica la **condición de Cauchy** si para cada $\varepsilon > 0$, existe $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ tal que si $K \in \mathcal{F}(\Lambda)$ con $K \cap J = \emptyset$, entonces*

$$\left\| \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \right\| < \varepsilon.$$

2.2.4 Proposición.
Sea $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ una familia de vectores de un espacio normado. Cada una de las siguientes afirmaciones implica la siguiente:

- *$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable.*
- *$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ verifica la condición de Cauchy.*

- $\{\lambda \in \Lambda \, : \, x_\lambda \neq 0\}$ *es numerable.*

2.2.5 Teorema.
X espacio normado, $\{x_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ familia de elementos de X. Equivalen:

- $\{x_\lambda : \, \lambda \in \Lambda\}$ *es sumable.*
- *El conjunto $A = \{\lambda \in \Lambda \, : \, x_\lambda \neq 0\}$ es numerable y, para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow A$, la serie $\sum_{n\geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ es convergente.*

En este caso, $\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$ para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow A$.

2.2.6 Corolario.
Una familia de vectores de un espacio de Banach es sumable si, y sólo si, verifica la condición de Cauchy.

2.2.7 Definición.
X espacio normado, $\{x_\lambda \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ es ***absolutamente sumable*** *si la familia de números positivos $\{\|x_\lambda\| \, : \, \lambda \in \Lambda\}$ es sumable. Equivalentemente:*

$$\sup\left\{\sum_{\lambda\in J} \|x_\lambda\| \, : \, J \in \mathcal{F}(\Lambda)\right\} < \infty.$$

2.2.8 Corolario.
X espacio de Banach, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ familia de vectores absolutamente sumable. Entonces:

- *La familia $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable en X*
- $\|\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda\| \leqslant \sum_{\lambda\in\Lambda} \|x_\lambda\| = \sup\{\sum_{\lambda\in J} \|x_\lambda\| \, : \, J \in \mathcal{F}(\Lambda)\}$.

2.3 Bases ortonormales. Espacios de Hilbert “tipo”

2.3.1 Ejemplo.
Sea Λ es un conjunto no vacío arbitrario.

- $\ell_2^\Lambda = \left\{x : \Lambda \longrightarrow \mathbb{K} \, : \, \{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \text{ es sumable}\right\}$.
  - Es un espacio de Hilbert definiendo
  $$(x \mid y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda)\overline{y(\lambda)} \qquad (x, y \in \ell_2^\Lambda).$$
- Para $\lambda \in \Lambda$, $e_\lambda \in \ell_2^\Lambda$ vale 1 en λ y 0 en cualquier otro punto.
- Toda la estructura de ℓ_2^Λ se reconstruye a partir de $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$:
  - Si $x \in \ell_2^\Lambda$, $x(\lambda) = (x \mid e_\lambda)$;
  - $(x \mid y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x \mid e_\lambda)\,(e_\lambda \mid y) \qquad (x, y \in \ell_2^\Lambda)$;

- $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x \mid e_\lambda)|^2 \qquad (\lambda \in \Lambda).$

- Sea $M = \text{lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$:
  - $M^\perp = \{0\}$, luego M es denso en ℓ_2^Λ;
  - más aún, si $x \in \ell_2^\Lambda$ y $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$, se tiene

$$\left\| x - \sum_{\lambda \in J} (x \mid e_\lambda) e_\lambda \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda \in J} |(x \mid e_\lambda)|^2,$$

  - $\{(x \mid e_\lambda) e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia sumable de vectores de ℓ_2^Λ, con

$$x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x \mid e_\lambda) e_\lambda$$

- $\|e_\lambda\| = 1, \qquad (e_\lambda \mid e_\mu) = 0 \qquad (\lambda, \mu \in \Lambda,\ \lambda \neq \mu).$

2.3.2 Definición.

- *Un* ***sistema ortonormal*** *en un espacio prehilbertiano H es un subconjunto $E = \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ de H (no vacío), verificando:*
  - $(x_\lambda \mid x_\mu) = 0$ *para cualesquiera* $\lambda, \mu \in \Lambda$, $\lambda \neq \mu$;
  - $\|x_\lambda\| = 1$ *para cada* $\lambda \in \Lambda$.

- *Para cada $x \in H$, la familia de escalares $\{(x \mid x_\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ son los* ***coeficientes de Fourier*** *del vector x con respecto al sistema ortonormal E.*

2.3.3 Lema.
$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sistema ortonormal en un espacio prehilbertiano H.

- *Para $J \in \mathcal{F}(\Lambda)$ denotamos $M_J = \text{lin}\{x_\lambda : \lambda \in J\}$ y P_J a la proyección ortogonal de H sobre M_J, se tiene*

$$P_J(x) = \sum_{\lambda \in J} (x \mid x_\lambda) x_\lambda$$

- *En particular,*

$$\left\| x - \sum_{\lambda \in J} (x \mid x_\lambda) x_\lambda \right\|^2 = \|x\|^2 - \sum_{\lambda \in J} |(x \mid x_\lambda)|^2 \qquad (x \in H).$$

- *Para cada $x \in H$, la familia $\{|(x \mid x_\lambda)|^2 : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable y se verifica*

$$\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x \mid x_\lambda)|^2 + [\text{dist}\,(x, M)]^2 \qquad (x \in H),$$

  donde M es el subespacio de X engendrado por $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$.

- *En particular, se verifica la* ***desigualdad de Bessel***

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x \mid x_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2 \qquad (x \in X).$$

2.3.4 Teorema.
$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ *sistema ortonormal en* H *y* $M = \text{lin}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$. *Equivalen:*

- $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x \mid x_\lambda)|^2$ *para todo* $x \in H$.
- M *es denso en* X.
- $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x \mid x_\lambda) x_\lambda$ *para todo* $x \in H$.
- $(x \mid y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x \mid x_\lambda)(x_\lambda \mid y)$ *para cualesquiera* $x, y \in H$.

2.3.5 Definición.

- *Una* ***base ortonormal*** *es un sistema ortonormal verificando cualquiera de las afirmaciones del teorema anterior.*
- *La igualdad* $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|x_\lambda) x_\lambda$ *recibe el nombre de* ***desarrollo de Fourier*** *del vector* $x \in H$ *con respecto a la base ortonormal.*
- ***igualdad de Parseval****:*
$$(x \mid y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x \mid x_\lambda)(x_\lambda \mid y)$$

2.3.6 Lema (Método de Gram-Schmidt)**.**
Si (y_n) *es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano* X*, entonces existe un sistema ortonormal* $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ *en* X *tal que*

$$\text{lin}\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} = \text{lin}\{y_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

para todo natural n.

2.3.7 Teorema.

- *Para cada* $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N *es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio prehilbertiano de dimensión* N.
- *Todo espacio prehilbertiano separable posee una base ortonormal numerable.*
- *Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de* ℓ_2.
- ℓ_2 *es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable.*

2.3.8 Corolario.
Si un espacio prehilbertiano H *posee una base ortonormal* $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$*, entonces* X *es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de* ℓ_2^Λ.

¿Qué espacios prehilbertianos tienen base ortonormal?

CASO SEPARABLE:

2.3.9 Lema (Método de Gram-Schmidt).
Si (y_n) es una sucesión de vectores linealmente independientes en un espacio prehilbertiano X, entonces existe un sistema ortonormal $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ en X tal que

$$\operatorname{lin}\{x_k : 1 \leqslant k \leqslant n\} = \operatorname{lin}\{y_k : 1 \leqslant k \leqslant n\}$$

para todo natural n.

2.3.10 Teorema.

- *Para cada $N \in \mathbb{N}$, ℓ_2^N es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio prehilbertiano de dimensión N.*
- *Todo espacio prehilbertiano separable posee una base ortonormal numerable.*
- *Todo espacio prehilbertiano separable infinito-dimensional es isométricamente isomorfo a un subespacio denso de ℓ_2.*
- *ℓ_2 es, salvo isomorfismos isométricos, el único espacio de Hilbert de dimensión infinita y separable.*

CASO GENERAL:

2.3.11 Lema.
En un espacio prehilbertiano, todo sistema ortonormal está contenido en un sistema ortonormal maximal.

2.3.12 Teorema.

- *En un espacio de Hilbert, todo sistema ortonormal maximal es una base ortonormal.*
- *Todo espacio de Hilbert posee una base ortonormal.*
- *Si $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una base ortonormal de un espacio de Hilbert H, entonces H es isométricamente isomorfo a ℓ_2^Λ.*
- *Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal, llamado* ***dimensión hilbertiana*** *del espacio.*
- *Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana.*

2.3.13 Corolario.
H espacio de Hilbert, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ un sistema ortonormal en H.

- *Si $\{\alpha_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es una familia de escalares, $\{\alpha_\lambda x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ es sumable si, y sólo si, lo es la familia de escalares $\{|\alpha_\lambda|^2 : \lambda \in \Lambda\}$.*
- *Si $M = \overline{\operatorname{lin}}\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ y P_M es la proyección ortogonal de H sobre M, se tiene*

$$P_M(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} (x \mid x_\lambda) x_\lambda \qquad (x \in H).$$

2.3.14 Observaciones.

- Existen familias sumables en espacios de Hilbert que no son absolutamente sumables. Por ejemplo, $\left\{\frac{1}{n} e_n : n \in \mathbb{N}\right\}$, donde $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ es la base canónica de ℓ_2.
- Si H es un espacio de Hilbert de dimensión finita:
    - toda base ortonormal de H es una base de Hamel;
    - la dimensión algebraica de H coincide con su dimensión hilbertiana.
- Ninguna base ortonormal infinita puede ser una base de Hamel.

2.4 Introducción a las series de Fourier. El sistema trigonométrico en $L_2(\mathbb{T})$

2.4.1 Definición.

- *Una **serie trigonométrica** es una serie de funciones de la forma*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \, e^{int} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n \left(\cos(t) + i \operatorname{sen}(t)\right)$$

donde $c_n \in \mathbb{C}$ para $n \in \mathbb{Z}$ y los términos de la serie se consideran como funciones 2π-periódicas de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$.

- *Fijado $N \in \mathbb{N}$, la N-ésima suma parcial de la serie trigonométrica anterior es la función*

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n \, e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

- *$\{S_N : N \in \mathbb{N}\}$ es la sucesión de sumas parciales de la serie trigonométrica.*
- *Cualquier noción de convergencia que se aplique a una serie trigonométrica se refiere siempre a la sucesión de sumas parciales.*
- *Una función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ de la forma*

$$f(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n \, e^{int} \qquad (t \in \mathbb{R})$$

*con $c_n \in \mathbb{C}$ para $-N \leqslant n \leqslant N$ y $|c_N| + |c_{-N}| > 0$ recibe el nombre de **polinomio trigonométrico** de grado N.*

2.4.2 Notación.
Sea $1 \leqslant p < \infty$.

- *$L_p(\mathbb{T})$ es el espacio de las (clases de equivalencia por igualdad casi por doquier de) funciones $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ medibles, 2π-periódicas y tales que*

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^p \, dt\right)^{1/p} < \infty.$$

  - *Se trata del espacio $L_p[-\pi, \pi]$ donde normalizamos la medida de Lebesgue para que se tenga $\lambda(]-\pi, \pi[) = 1$;.*
  - *$(L_p(\mathbb{T}), \|\cdot\|_p)$ es un espacio de Banach (Teorema de Riesz-Fisher);*
  - *$L_2(\mathbb{T})$ es un espacio de Hilbert con el producto escalar dado por*

$$(f \mid g) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\overline{g(t)} \, dt \qquad (f, g \in L_2(\mathbb{T})).$$

- *Cada función 2π-periódica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ puede identificarse con la función $g : \mathbb{T} \longrightarrow \mathbb{C}$ dada por*

$$g(\mathrm{e}^{it}) = f(t) \qquad (t \in \mathbb{R})$$

  donde $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

- *$c_0^{\mathbb{Z}}$ es el subespacio cerrado de $\ell_\infty^{\mathbb{Z}}$ formado por las sucesiones $x : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C}$ tales que $\lim\limits_{n\to+\infty} x(n) = \lim\limits_{n\to-\infty} x(n) = 0$.*

- Como consecuencia de la desigualdad de Hölder y de que $\lambda(\mathbb{T}) = 1$ se tiene que

$$\|f\|_1 \leqslant \|f\|_p \qquad \left(f \in L_p(\mathbb{T}),\ 1 \leqslant p < \infty\right).$$

- Por tanto $L_p(\mathbb{T}) \subset L_1(\mathbb{T})$ para todo $1 < p < \infty$.

- Como las funciones escalonadas son densas en cualquier $L_p(\mathbb{T})$, es también claro que $L_p(\mathbb{T})$ es denso en $L_1(\mathbb{T})$ (con la norma $\|\cdot\|_1$, claro) para todo $1 \leqslant p < \infty$.

2.4.3 Definición.
Para cada $n \in \mathbb{Z}$, consideremos la función e_n definida por

$$e_n(t) = \mathrm{e}^{int} \qquad (t \in \mathbb{R}).$$

- *$\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{T})$, que recibe el nombre de **sistema trigonométrico**.*

- *Para $f \in L_2(\mathbb{T})$ los **coeficientes de Fourier** de f vienen dados por*

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int} \, dt \qquad (n \in \mathbb{Z}).$$

- *Aunque solamente se tenga $f \in L_1(\mathbb{T})$, la integral tiene sentido y seguiremos denominando a los números complejos $\{\widehat{f}(n) : n \in \mathbb{Z}\}$ **coeficientes de Fourier** de la función $f \in L_1(\mathbb{T})$.*

- *La* ***serie de Fourier*** *de una función $f \in L_1(\mathbb{T})$ es, por definición, la serie trigonométrica*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\, \mathrm{e}^{int}.$$

- *Se dice que una serie trigonométrica $\sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \mathrm{e}^{int}$ es una serie de Fourier cuando existe $f \in L_1(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

El hecho de que $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ sea un sistema ortonormal en el espacio de Hilbert $L_2(\mathbb{T})$, junto con la desigualdad de Bessel, nos da directamente el siguiente resultado no trivial.

2.4.4 Lema.
Si $f \in L_2(\mathbb{T})$ se tiene que $\widehat{f} \in \ell_2^{\mathbb{Z}}$ y

$$\left\|\widehat{f}\right\|_2^2 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\, dt = \|f\|_2^2.$$

Este resultado tiene la siguiente consecuencia sobre series de Fourier de funciones de $L_1(\mathbb{T})$:

2.4.5 Teorema (de Mercer o Lema de Riemann-Lebesgue)**.**

- *Para $f \in L_1(\mathbb{T})$ se tiene que $\widehat{f} \in c_0^{\mathbb{Z}}$.*
- *Equivalentemente, para cada $\varepsilon > 0$ puede encontrarse un natural N tal que, si $n \in \mathbb{Z}$ con $|n| \geqslant N$, se tiene que $|\widehat{f}(n)| < \varepsilon$;*
- *suele escribirse $\lim\limits_{|n|\to\infty} \widehat{f}(n) = 0$.*

Para obtener que el sistema trigonométrico es una base ortonormal de $L_2(\mathbb{T})$, abordamos ahora el problema de la unicidad para series de Fourier, problema que surge de forma muy natural. Si la serie de Fourier de una función $f \in L_1(\mathbb{T})$ converge en $L_1(\mathbb{T})$ a una función g, ¿qué relación hay entre f y g? Lo mejor que podemos esperar es que f y g coincidan casi por doquier y eso es, precisamente, lo que probaremos. Equivalentemente, se trata de probar que si $f \in L_1(\mathbb{T})$ y $\widehat{f}(n) = 0$ para todo $n \in \mathbb{Z}$, entonces $f = 0$ c.p.d. Obsérvese que la misma afirmación para $f \in L_2(\mathbb{T})$ equivale a la maximalidad del sistema trigonométrico, lo que tendrá importantes consecuencias.

2.4.6 Teorema (de unicidad para series de Fourier)**.**
Sea $f \in L^1(\mathbb{T})$ y supongamos que $\widehat{f} = 0$. Entonces $f = 0$ casi por doquier.

Como consecuencia, se obtiene que el subespacio ortogonal a $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$ es $\{0\}$ o, equivalentemente, el sistema ortogonal es una base, con lo que toda la artillería de la sección anterior entra en juego:

2.4.7 Corolario.
El sistema trigonométrico es una base ortonormal de $L_2(\mathbb{T})$. Por tanto:

- ***Igualdad de Parseval***:

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\overline{g(t)}\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(n)\,\overline{\widehat{g}(n)} \qquad \big(f,g\in L_2(\mathbb{T})\big),$$

  en particular,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(t)|^2\,dt = \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(n)|^2 \qquad \big(f\in L_2(\mathbb{T})\big).$$

- ***Desarrollo de Fourier***: *Para $f \in L_2(\mathbb{T})$, la serie de Fourier de f converge a f en $L_2(\mathbb{T})$:*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}\left| f(t) - \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)\,\mathrm{e}^{ikt}\right|^2 dt = 0.$$

- ***Teorema de Riesz-Fisher***: *Para $(c_n) \in \ell_2^{\mathbb{Z}}$, existe una única función $f \in L_2(\mathbb{T})$ tal que $\widehat{f}(n) = c_n$ para todo $n \in \mathbb{Z}$.*

En suma, la aplicación $f \longmapsto \widehat{f}$, definida por

$$\widehat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\,\mathrm{e}^{-int}\,dt \qquad \big(n\in\mathbb{Z}, f\in L_2(\mathbb{T})\big)$$

es un isomorfismo isométrico de $L_2(\mathbb{T})$ sobre $\ell_2^{\mathbb{Z}}$.

El hecho de que $L_2(\mathbb{T})$ sea isométricamente isomorfo a $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ (para el caso, a ℓ_2, ya que es obvio, sin necesidad de ninguna teoría de espacios de Hilbert, que $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ y ℓ_2 son isométricamente isomorfos) se podría haber deducido directamente de los resultados de la sección anterior puesto que es fácil ver que $L_2(\mathbb{T})$ es separable. La importancia en las aplicaciones del corolario anterior, no radica en que $L_2(\mathbb{T})$ se identifique con $\ell_2^{\mathbb{Z}}$, sino en el hecho de que tal identificación puede conseguirse mediante los coeficientes de Fourier; es la afirmación (c) la más útil desde el punto de vista práctico. Dado que dicha afirmación depende en última instancia de la complitud de $L_2(\mathbb{T})$, es explicable que la denominación "Teorema de Riesz-Fisher" se aplique con frecuencia al teorema que afirma dicha complitud y, por extensión, al que afirma la complitud de $L_p[0,1]$ para $1 \leqslant p < \infty$.

Capítulo 3

Capítulo 3. El Teorema de Hahn-Banach

3.1 Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach.

3.1.1 Definición.
*Un **funcional sublineal** en un espacio vectorial X es una función $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que*

(i) $p(x+y) \leqslant p(x) + p(y)$ *para cualesquiera* $x, y \in X$.
(ii) $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ *para todo* $\alpha \geqslant 0$ *y todo* $x \in X$.

Ejemplos de funcionales sublineales son las partes reales de los funcionales lineales y las seminormas.

3.1.2 Teorema (de Hahn-Banach).
Sea X un espacio vectorial y p un funcional sublineal en X. Si M es un subespacio de X y g es un funcional lineal en M verificando

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \qquad (m \in M),$$

entonces existe un funcional lineal f en X cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.

Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

Si particularizamos al ambiente de los espacios normados, obtenemos el resultado demostrado por Hahn, previo a la versión de Banach.

3.1.3 Teorema (Hahn, 1927).
Sea X un espacio normado. Si Y es un subespacio de X y $g \in Y^*$, entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Suele utilizarse la siguiente notación: si X es un espacio normado, Y un subespacio suyo y $g \in Y^*$, cualquier funcional $f \in X^*$ verificando que $f|_Y = g$ y que $\|f\| = \|g\|$ es una **extensión Hahn-Banach** o **extensión equinórmica** de g a todo X. Con esta notación, el teorema anterior dice que *todo funcional continuo en un subespacio admite extensiones Hahn-Banach a todo* X.

3.1.4 Proposición.
Sea Y un subespacio cerrado de un espacio normado X. Si $x_0 \in X \setminus Y$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ e $Y \subseteq \ker(f)$.

3.1.5 Corolario.
Sea X un espacio normado no trivial. Entonces, para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Equivalentemente, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \text{máx}\{\, |f(x)| \, : \, f \in S_{X^*} \} \qquad (x \in X).$$

Obtenemos que X^* *separa los puntos* de X, esto es, $x = 0$ siempre que $f(x) = 0$ para todo $f \in X^*$ o, equivalentemente, siempre que x e y sean elementos distintos de X, existe $f \in X^*$ tal que $f(x) \neq f(y)$. Generalizando esta idea, decimos que un subconjunto $A \subseteq X^*$ **separa los puntos** de X si $x = 0$ siempre que $f(x) = 0$ para todo $f \in A$.

3.1.1 Anulador de un conjunto. Dual de un subespacio y de un cociente

Sea X un espacio normado e Y un subespacio suyo. Es claro que la restricción a Y de cualquier elemento de X^* es un elemento de Y^*, con lo que la aplicación lineal

$$X^* \longrightarrow Y^*, \qquad f \longmapsto f|_Y \quad (f \in X^*)$$

está bien definida y, gracias al Teorema de Hahn-Banach, es sobreyectiva. Si queremos conseguir una biyección lineal, debemos hacer cociente por su núcleo. Esto nos lleva a la definición de *anulador* de un subespacio, aunque con el mismo trabajo podemos definir el anulador de un subconjunto. Escribiremos, por comodidad, $x^*, y^*, \ldots$ para denotar a los elementos de X^*.

3.1.6 Definición.
Sea X un espacio normado y sean A y B subconjuntos de X y X^* respectivamente. Definimos $A^\perp$ y ${}^\perp B$ por las fórmulas

$$A^\perp = \{x^* \in X^* \, : \, x^*(x) = 0 \ \text{para todo}\ x \in A\};$$
$${}^\perp B = \{x \in X \, : \, x^*(x) = 0 \ \text{para todo}\ x^* \in B\}.$$

Entonces $A^\perp$ es el **anulador** *de A en X^* y ${}^\perp B$ es el* **anulador** *de B en X.*

3.1.7 Proposición.
Sea X un espacio normado y sean A y B subconjuntos de X y X^* respectivamente. Entonces:

(a) $A^\perp$ y ${}^\perp B$ son subespacios cerrados de X^* y X respectivamente. De hecho,

$$A^\perp = \bigcap_{x \in A} \{x^* \in X^* \, : \, x^*(x) = 0\} \qquad y \qquad {}^\perp B = \bigcap_{x^* \in B} \ker x^*.$$

(b) ${}^{\perp}(A^{\perp}) = \overline{\mathrm{lin}}(A)$. *De manera más sugerente,*

$$\overline{\mathrm{lin}}(A) = \bigcap_{x^* \in A^{\perp}} \ker x^* = \bigcap \{H \,:\, H \text{ hiperplano cerrado de } X,\, A \subseteq H\}.$$

(c) *Si* $A^{\perp} = X^*$, *entonces* $A = \{0\}$. *Si* ${}^{\perp}B = X$, *entonces* $B = \{0\}$.

(d) $\mathrm{lin}(A)$ *es denso en* X *si, y sólo si,* $A^{\perp} = \{0\}$. *En particular, si* Y *es un subespacio de* X, *entonces* Y *es denso en* X *si, y sólo si,* $Y^{\perp} = \{0\}$.

Identificamos ya el dual de un subespacio.

3.1.8 Proposición.
Sea X *un espacio normado e* Y *un subespacio suyo. Entonces* $Y^* \equiv X^*/Y^{\perp}$. *Concretamente, la aplicación* $\Phi : X^*/Y^{\perp} \longrightarrow Y^*$ *dada por*

$$\Phi(x^* + Y^{\perp}) = x^*|_Y \qquad (x^* + Y^{\perp} \in X^*/Y^{\perp})$$

es un isomorfismo isométrico.

3.1.9 Proposición.
Sea Y *un subespacio cerrado de un espacio normado* X *y* $\pi : X \longrightarrow X/Y$ *la aplicación cociente. Entonces la aplicación* $\Phi : \big(X/Y\big)^* \longrightarrow Y^{\perp}$ *dada por*

$$\Phi(f) = f \circ \pi \qquad \Big(f \in \big(X/Y\big)^*\Big)$$

es un isomorfismo isométrico.

3.1.10 Proposición.
Sea X *un espacio normado. Si* X^* *es separable, entonces* X *también es separable.*

3.1.11 Corolario.
Si X *es un espacio normado separable, entonces:*

(a) *Existe una familia numerable en* X^* *que separa los puntos de* X. *De hecho, existe un subconjunto numerable* A *de* S_{X^*} *tal que*

$$\|x\| = \sup\{|x^*(x)| \,:\, x^* \in A\} \qquad (x \in X).$$

(b) X *se embebe de forma isométrica en* ℓ_∞.

(c) X^* *se embebe de forma isométrica en* ℓ_∞.

3.1.12 Proposición.
Un espacio normado es de dimensión finita si, y sólo si, lo es su dual. En caso afirmativo, las dos dimensiones coinciden.

3.1.2 Bidual de un espacio normado. Reflexividad

3.1.13 Definición.
Si X *es un espacio normado, el* ***bidual*** *(también llamado* ***segundo dual****) de* X *es el espacio de*

Banach $X^{**} = (X^*)^* = L\big(X^*, \mathbb{K}\big)$, *con norma*

$$\begin{aligned}\|x^{**}\| &= \sup\{|x^{**}(x^*)| \,:\, x^* \in B_{X^*}\}\\ &= \text{mín}\{m \geqslant 0 \,:\, |x^{**}(x^*)| \leqslant m\,\|x^*\| \ \text{ para todo } \ x^* \in X^*\}.\end{aligned}$$

El ***n-ésimo dual*** *de* X*, que notaremos* $X^{(n)}$*, se define de forma recurrente por*

$$X^{(1)} = X^* \quad \text{y} \quad X^{(n+1)} = \big(X^{(n)}\big)^* = L\big(X^{(n)}, \mathbb{K}\big) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Para $n = 3$ *también se usa la notación* $X^{***} = X^{(3)}$.

De la desigualdad $|f(x)| \leqslant \|x\|\,\|f\|$*, válida para cualesquiera* $x \in X$ *y* $f \in X^*$*, deducimos que los elementos de* X *"son" funcionales lineales continuos en* X^**. Formalizando esta idea, para* $x \in X$ *consideramos el funcional lineal* $J_X(x)$ *definido en* X^* *por:*

$$\big[J_X(x)\big](x^*) = x^*(x) \qquad \big(x^* \in X^*\big).$$

Es claro que $J_X(x) \in X^{**}$ *para cada* $x \in X$*; la aplicación* $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ *recibe el nombre de* ***inyección canónica*** *del espacio normado* X *en su bidual.*

3.1.14 Proposición.
Si X *es un espacio normado,* J_X *es un embebimiento isométrico de* X *en* X^{**} *y el cierre de* $J_X(X)$ *en* X^{**} *es la completación de* X.

3.1.15 Definición.
Se dice que un espacio normado X *es* ***reflexivo*** *cuando* $J_X(X) = X^{**}$*. Obviamente, los espacios reflexivos son completos.*

3.1.16 Proposición.
La clase de los espacios normados reflexivos es estable por isomorfismos.

3.1.17 Ejemplos.

(a) *Los espacios normados de dimensión finita son reflexivos.*
(b) *Los espacios* ℓ_p *con* $1 < p < \infty$ *también son reflexivos.*
(c) *Los espacios* c_0 *y* c *no son reflexivos.*

3.1.18 Proposición.
Sea X *un espacio normado reflexivo. Entonces,* X *es separable si, y sólo si,* X^* *es separable.*

3.1.19 Ejemplo.
El espacio ℓ_1 es separable, mientras que su dual, ℓ_∞, no lo es. Deducimos que ℓ_1 no es reflexivo.

3.1.20 Proposición.
Todo subespacio cerrado de un espacio normado reflexivo es también reflexivo.

Cualquier espacio normado que contenga un subespacio isomorfo a c_0 o ℓ_1 no es reflexivo. En particular:

3.1.21 Ejemplos.
Los espacios ℓ_∞, ℓ_∞^*, $L(\ell_2)$, $L_1[0,1]$, $L_\infty[0,1]$ *y* $C[0,1]$ *no son reflexivos.*

3.1.22 Teorema.
Sea X *un espacio de Banach. Entonces,* X *es reflexivo si, y sólo si,* X^* *es reflexivo.*

3.1.23 Corolario.
Todo cociente de un espacio de Banach reflexivo por un subespacio cerrado, es también reflexivo.

3.1.24 Proposición.
Sean $X_1,\dots,X_n$ *espacios normados,* $1 \leqslant p \leqslant \infty$ *y sea* $X = [\bigoplus_{i=1}^n X_i]_p$ *su* p*-suma directa. Entonces,* X *es reflexivo si, y sólo si, lo es cada* X_i*.*

3.1.25 Proposición.
En un espacio de Banach reflexivo todo funcional lineal y continuo ***alcanza la norma****, esto es, el supremo que define la norma de cualquier funcional lineal y continuo es un máximo. Concretamente, si* X *es un espacio normado reflexivo y* $x^* \in X^*$*, entonces existe* $x \in S_X$ *tal que* $x^*(x) = \|x^*\|$*.*

3.2 Sistemas de infinitas ecuaciones lineales. Teorema de Helly

3.2.1 Teorema (Hahn, 1927)**.**
Sea X *un espacio normado,* $A = \{z_i : i \in I\}$ *una familia de elementos de* X *y* $\{c_i : i \in I\}$ *una familia de escalares. Entonces son equivalentes:*

(i) *Existe* f *en* X^* *tal que* $f(z_i) = c_i$ *para todo* $i \in I$*.*
(ii) *Existe* $M \geqslant 0$ *verificando*

$$|\alpha_1 c_{i_1} + \cdots + \alpha_n c_{i_n}| \leqslant M \|\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}\|$$

para cualquier combinación lineal $\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}$ *de elementos de* A*.*

Además, si se verifica (ii)*, se puede elegir* f *en* (i) *de forma que* $\|f\| \leqslant M$*.*

3.2.2 Teorema (Helly, 1921)**.**
Sea X *un espacio normado,* $f_1, f_2, \dots, f_n \in X^*$ *y* $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$*. Son equivalentes:*

(i) *Existe* x *en* X *tal que* $f_k(x) = c_k$ *para* $k = 1,2,\dots,n$*.*
(ii) *Existe* $M \geqslant 0$ *tal que*

$$\left|\sum_{k=1}^n a_k c_k\right| \leqslant M \left\|\sum_{k=1}^n a_k f_k\right\|$$

para cualesquiera $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{K}$*.*

Además, si se verifica (ii)*, para cada* $\varepsilon > 0$ *se puede elegir* x *en* (i) *tal que* $\|x\| \leqslant M + \varepsilon$*.*

3.2.3 Teorema.

Sea X un espacio normado, $x^{**} \in X^{**}$, W un subespacio de dimensión finita de X^* y $\varepsilon > 0$. Entonces, existe $x \in X$ tal que $\|x\| < \|x^{**}\| + \varepsilon$ y $x^*(x) = x^{**}(x^*)$ para todo $x^* \in W$, es decir $J_X(x)$ coincide con x^{**} en W.

3.2.4 Ejemplos.

(a) Si $X = c_0$, tomando la familia $\{e_n^* \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ de $X^* = \ell_1$ formada por las "coordenadas", no existe ningún elemento $x \in c_0$ que verifique $e_n^*(x) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, pero

$$|\alpha_1 + \cdots + \alpha_n| \leqslant |\alpha_1| + \cdots + |\alpha_n| = \|\alpha_1 e_1^* + \cdots + \alpha_n e_n^*\|$$

para cualesquiera $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{K}$.

(b) También en $X = c_0$, consideramos el funcional $x^* \in X^* = \ell_1$ dado por

$$x^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x(n)}{2^n} \qquad (x \in c_0),$$

que no alcanza su norma. Aplicando el Teorema de Helly a la familia de funcionales $\{x^*\}$ y a la familia de escalares $\{\|x^*\|\}$ es claro que, para cada $\alpha \in \mathbb{K}$ se tiene que

$$\big|\alpha\|x^*\|\big| \leqslant \big\|\alpha x^*\big\|,$$

pero cualquier $x \in c_0$ tal que $x^*(x) = 1$ verifica que $\|x\| > 1$.

3.3 Versiones geométricas del Teorema de Hahn-Banach

Si X es un espacio vectorial, un subconjunto A de X es **convexo** si es cerrado para combinaciones convexas, esto es, si $t\,x + (1-t)\,y \in A$ siempre que $x, y \in A$ y $t \in [0,1]$.

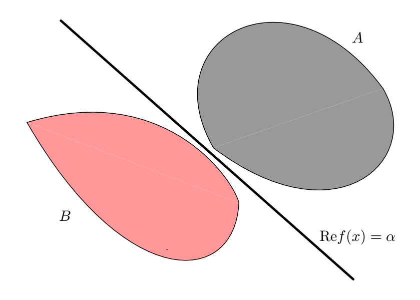

Figura 3.1: Separación de conjuntos

La idea intuitiva de "separar" dos subconjuntos A y B de un espacio vectorial real X se formaliza consiguiendo un funcional lineal no nulo f en X y un número real α, tales que

$$f(a) \leqslant \alpha \leqslant f(b) \qquad (a \in A,\ b \in B) \tag{3.1}$$

o, equivalentemente, $\sup f(A) \leqslant \inf f(B)$ (ver figura 3.1). Para abarcar también el caso complejo podemos, siendo X real o complejo, sustituir (3.1) por

$$\mathrm{Re}\, f(a) \leqslant \alpha \leqslant \mathrm{Re}\, f(b) \qquad (a \in A,\ b \in B). \tag{3.2}$$

3.3.1 Ejemplo.
Sea $X = c_{00}$ y A el subconjunto de X formado por las sucesiones de $X \setminus \{0\}$ cuya última coordenada no nula es estrictamente positiva. Entonces A es convexo y $0 \notin A$, pero es imposible separar, incluso en la forma más suave posible, A y $\{0\}$: todo funcional lineal no nulo en X toma en A valores estrictamente positivos y estrictamente negativos.

3.3.2 Definición.
Sea X un espacio vectorial y A un subconjunto no vacío. Decimos que A es ***absorbente*** *si $\mathbb{R}^+ A = X$. Si A es absorbente y convexo, entonces la aplicación $\mu_A : X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ dada por*

$$\mu_A(x) = \inf\{\lambda > 0 \, : \, x \in \lambda A\} \qquad (x \in X),$$

es un funcional sublineal en X, llamado ***funcional de Minkowski*** *de A. Si A es absorbente, convexo y* equilibrado *(esto es, $\lambda a \in A$ para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ con $|\lambda| \leqslant 1$ y todo $a \in A$), entonces μ_A es una seminorma y*

$$\{x \in X \, : \, \mu_A(x) < 1\} \subset A \subset \{x \in X \, : \, \mu_A(x) \leqslant 1\}.$$

3.3.3 Teorema (de separación de convexos en espacios vectoriales)**.**
Sean A y B subconjuntos no vacíos, convexos, disjuntos, de un espacio vectorial X y supongamos que A contiene un punto a_0 tal que $A - a_0$ es absorbente. Entonces, existen $f \in X^\sharp$, $f \neq 0$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad (a \in A, \, b \in B).$$

3.3.4 Lema.
Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo de X con interior no vacío. Entonces, para $x_0 \in A$, $y_0 \in \operatorname{int}(A)$, se tiene que

$$]x_0, y_0] = \{(1-t)x_0 + t y_0 \, : \, t \in]0,1]\} \subset \operatorname{int}(A).$$

En consecuencia, $\operatorname{int}(A)$ es convexo y $\overline{A} = \overline{\operatorname{int}(A)}$.

3.3.5 Teorema.
Sea X un espacio normado y A, B dos subconjuntos no vacíos y convexos de X. Si $\operatorname{int}(A) \neq \emptyset$ y $B \cap \operatorname{int}(A) = \emptyset$, entonces existen $f \in X^*$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \qquad (a \in A, \, b \in B).$$

Además, se tiene que $\operatorname{Re} f(a) < \alpha$ para todo $a \in \operatorname{int}(A)$.

3.3.6 Teorema (de existencia de funcionales de soporte)**.**
Sea X un espacio normado y A un subconjunto convexo y cerrado de X, con interior no vacío. Entonces para cada punto x_0 en la frontera de A existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \max\{\operatorname{Re} f(x) \, : \, x \in A\}.$$

Notemos que si $\alpha_0 = \operatorname{Re} f(x_0)$, el hiperplano afín en $X_{\mathbb{R}}$ dado por $H_0 = \{x \in X \, : \, \operatorname{Re} f(x) = \alpha_0\}$, “pasa” por el punto x_0 y deja el conjunto A a un lado. Esta situación, de claro contenido

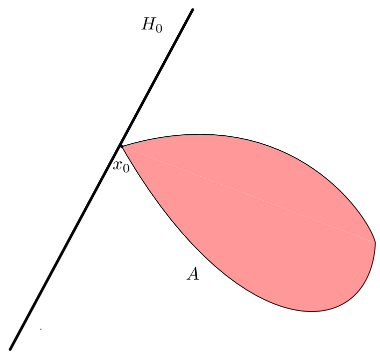

Figura 3.2: Funcionales de soporte

geométrico, suele describirse diciendo que el funcional f_0 o el hiperplano H_0 **soportan** al conjunto A en el punto x_0, o también que x_0 es un **punto de soporte** de A, f_0 un **funcional de soporte** de A y H_0 un **hiperplano de soporte** de A.

3.3.7 Teorema (Versión geométrica del Teorema de Hahn-Banach)**.**
Sea X un espacio normado, A un subconjunto no vacío, convexo y abierto de X y M una variedad afín en X tal que $A \cap M = \emptyset$. Entonces existe un hiperplano (afín) cerrado H en X tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$.

3.3.8 Teorema (de separación de convexos en espacios normados)**.**
Sea X un espacio normado y A, B subconjuntos convexos no vacíos de X tales que $d(A,B) = \rho > 0$. Entonces, existe $f \in X^*$ tal que $\|f\| = 1$ y

$$\sup \operatorname{Re} f(A) + \rho \leqslant \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B).$$

En particular, si A es un subconjunto convexo, no vacío y cerrado de X y $x_0 \notin A$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $\sup \operatorname{Re} f(A) + d(x_0, A) \leqslant \operatorname{Re} f(x_0)$, luego $\sup \operatorname{Re} f(A) < \operatorname{Re} f(x_0)$.

3.3.9 Corolario.
Sean A y B dos subconjuntos no vacíos, convexos y disjuntos de un espacio normado X. Supongamos que A es cerrado y B compacto. Entonces existe un funcional $f \in S_{X^*}$ tal que

$$\sup \operatorname{Re} f(A) < \operatorname{ínf} \operatorname{Re} f(B).$$

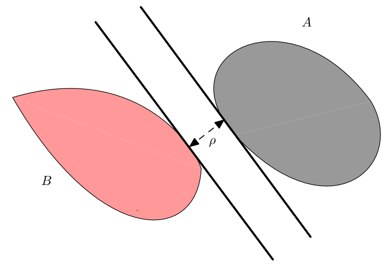

Figura 3.3: Separación estricta

Capítulo 4

Capítulo 4. Teoremas de la aplicación abierta y Banach-Steinhauss

4.1 La categoría. El Teorema de Baire

4.1.1 Definiciones.
Sea X un espacio topológico y $A \subset X$.

*(a) A es **denso en ninguna parte** o **diseminado** si $\overset{\circ}{\overline{A}} = \emptyset$.*
*(b) A es **de primera categoría** en X si es la unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte o, equivalentemente, si está contenido en una unión numerable de subconjuntos cerrados de X, cada uno de los cuales tiene interior vacío en X.*
*(c) A es **de segunda categoría** en X si no es de primera categoría en X.*

Es importante resaltar el carácter relativo de los conceptos anteriores: $\mathbb{R}$ es un conjunto de primera categoría en $\mathbb{C}$ (de hecho, es denso en ninguna parte), pero veremos enseguida que es de segunda categoría en sí mismo. Es fácil ver que si X es un espacio topológico, Y es un subconjunto de X en el que consideramos la topología inducida y A es un conjunto de primera categoría en Y, entonces A es de primera categoría en X.

*Por último, se dice que un espacio topológico X es un **espacio de Baire** si todo abierto no vacío de X es de segunda categoría en X. Es fácil ver que ello equivale a que la intersección de cualquier sucesión de abiertos densos en X sea densa en X o a que la unión de cualquier sucesión de subconjuntos cerrados con interior vacío tenga interior vacío.*

4.1.2 Teorema (de la categoría de Baire)**.**
Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire. Todo espacio topológico de Hausdorff localmente compacto es un espacio de Baire.

4.1.3 Corolario.
Sea X un espacio de Banach. Entonces la dimensión algebraica de X es finita o infinita no numerable.

4.1.4 Corolario.
Sea D_+ el conjunto de las funciones f de $C[a,b]$ que tienen derivada por la derecha finita en algún punto de $[a,b[$. Entonces D_+ es de primera categoría en $C[a,b]$. Como consecuencia, existe una función $f \in C[a,b]$ cuya derivada por la derecha es infinita en todo punto de $[a,b[$.

4.1.5 Corolario.
El conjunto de las funciones de $C^\infty[0,1]$ que no son analíticas en ningún punto de $[0,1]$ es de segunda categoría (en particular, no vacío).

4.2 El Teorema de la aplicación abierta. Enunciados equivalentes

4.2.1 Teorema de la aplicación abierta

4.2.1 Proposición.
Sean X e Y espacios normados y T una aplicación lineal de X en Y. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *T es abierta.*
(ii) *Existe $\delta > 0$ tal que $\delta B_Y \subseteq T(B_X)$.*
(iii) *Existe $M > 0$ de forma que para cada $y \in Y$ se puede encontrar $x \in X$ con $T(x) = y$, $\|x\| \leqslant M\|y\|$.*
(iv) *Para toda sucesión convergente a cero (y_n) en Y, existe una sucesión convergente a cero (x_n) en X de forma que $T(x_n) = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.*

4.2.2 Lema.
Sean X e Y dos espacios normados y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y.

4.2.3 Lema.
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $\overline{T(B_X)}$ es entorno de cero en Y, entonces T es abierta. Como consecuencia, T es sobreyectiva e Y es completo.

Sin más que unir los dos resultados anteriores, se obtiene:

4.2.4 Proposición.
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y $T \in L(X,Y)$. Si $T(X)$ es de segunda categoría en Y, entonces $T(X) = Y$, T es abierta e Y es completo.

La condición más natural, aunque no obligatoria, para que $T(X)$ sea de segunda categoría en Y, es que T sea sobreyectiva e Y sea completo. Resumiendo toda la información, obtenemos:

4.2.5 Teorema (de la aplicación abierta)**.**
Si X e Y son espacios de Banach, entonces toda aplicación lineal y continua de X sobre Y es abierta.

4.2.6 Corolario (Primer Teorema de isomorfía para espacios de Banach)**.**
Si X e Y son espacios de Banach, entonces toda aplicación sobreyectiva $T \in L(X,Y)$ induce un isomorfismo $\widetilde{T}$ de $X/\ker T$ sobre Y, dado por

$$\widetilde{T}(x + \ker T) = T(x) \qquad (x + \ker T \in X/\ker T).$$

4.2.7 Corolario (Banach-Mazur, 1933)**.**
Si X es un espacio de Banach separable, existe una aplicación lineal, continua y abierta de ℓ_1 sobre X. Equivalentemente, todo espacio de Banach separable es isomorfo al cociente de ℓ_1 por un subespacio cerrado.

4.2.8 Corolario.
El conjunto de las sucesiones de coeficientes de Fourier de funciones de $L_1(\mathbb{T})$ es un conjunto de primera categoría en $c_0^{\mathbb{Z}}$.

4.2.2 Teorema de los isomorfismos de Banach

4.2.9 Definición.
*Si X e Y son espacios normados, un **homomorfismo** de X en Y es una aplicación lineal y continua T de X en Y que es abierta cuando se considera como aplicación de X sobre $T(X)$. Si además T es inyectiva (resp. sobreyectiva) decimos que T es un **monomorfismo** (resp. **epimorfismo**). Notemos que un isomorfismo no es más que un homomorfismo biyectivo.*

4.2.10 Corolario (Teorema de los isomorfismos de Banach)**.**
Toda biyección lineal y continua entre dos espacios de Banach es un isomorfismo. Equivalentemente, si X es un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ son dos normas completas y comparables en X (esto es, tales que existe $M > 0$ con $\|\cdot\|_1 \leqslant M\|\cdot\|_2$), entonces dichas normas son equivalentes.

4.2.11 Ejemplos. (a) *En cualquier espacio vectorial de dimensión infinita pueden definirse dos normas comparables no equivalentes; por supuesto, alguna de ellas no será completa.* De hecho, si X es un espacio vectorial de dimensión infinita, ya vimos que siempre existen dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ en X no equivalentes. Si dichas normas son comparables, hemos acabado. Si no lo son, definiendo

$$\|x\|_3 = \|x\|_1 + \|x\|_2 \qquad (x \in X),$$

se obtiene una nueva norma en X que es comparable con $\|\cdot\|_1$ y con $\|\cdot\|_2$, pero no puede ser equivalente a ninguna de ellas.

(b) *En cualquier espacio de Banach de dimensión infinita $(X, \|\cdot\|)$ puede definirse otra norma completa no equivalente a la de partida.* En efecto, basta tomar $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ un funcional lineal discontinuo, un elemento $u \in X$ con $f(u) = 1$, considerar la aplicación $F : X \longrightarrow X$ dada por

$$F(x) = x - 2f(x)u \qquad (x \in X)$$

y observar que F es biyectiva, con $F^{-1} = F$, y que F es discontinua. Entonces, definiendo

$$|||x||| = \|F(x)\| \qquad (x \in X),$$

se obtiene una norma completa en X, que no puede ser equivalente a $\|\cdot\|$ por ser F discontinua.

4.2.12 Corolario (Teorema del homomorfismo de Banach).
Sean X e Y espacios de Banach. Entonces, $T \in L(X,Y)$ es un homomorfismo si, y sólo si, $T(X)$ es un subespacio cerrado de Y.

4.2.13 Ejemplo.
Notamos $Y = C[a,b]$ y fijamos tres funciones $y_0, y_1, y_2 \in Y$. Para $y \in Y$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, consideremos la ecuación diferencial

$$y_0\, x'' + y_1\, x' + y_2\, x = y$$

y el problema de valores iniciales

$$x(a) = \alpha, \qquad x'(a) = \beta.$$

Las soluciones de un tal problema pertenecen al espacio $X = C^2[a,b]$ de las funciones de clase C^2 en $[a,b]$, que es un espacio de Banach para la norma definida por

$$\|x\| = \|x\|_\infty + \|x'\|_\infty + \|x''\|_\infty \qquad (x \in X).$$

La aplicación $T : X \longrightarrow Y \times \mathbb{K}^2$ definida por

$$T(x) = \big(y_0 x'' + y_1 x' + y_2 x,\ x(a),\ x'(a)\big) \qquad (x \in X)$$

es claramente lineal y continua. El que nuestro problema de valores iniciales tenga solución única para cada terna $(y, \alpha, \beta) \in Y \times \mathbb{K}^2$, equivale a que T sea biyectiva. Si tal cosa ocurre, el Teorema de los isomorfismos de Banach nos dice que, automáticamente, la solución x depende de manera continua de los valores iniciales $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y del dato $y \in Y$. Esta dependencia continua ofrece una cierta garantía de que los métodos de perturbación para aproximar la solución del problema son válidos. Evidentemente pueden idearse esquemas muy variados y problemas muy diversos en los que un razonamiento de este tipo es aplicable.

4.2.3 Teorema de la gráfica cerrada

Por **gráfica** de una aplicación f entre dos espacios topológicos X e Y entendemos el conjunto

$$G(f) = \{(x,y) \in X \times Y \ :\ y = f(x)\}$$

y decimos que f tiene **gráfica cerrada** si $G(f)$ es cerrado en $X \times Y$ (considerando, desde luego, la topología producto).

Con sólo que el espacio de llegada sea Hausdorff, toda función continua tiene gráfica cerrada; podemos poner, por el contrario, ejemplos sencillos de funciones reales de variable real, con gráfica cerrada y no continuas. A saber, la función $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = 1/x$ si $x \neq 0$ y $f(0) = 0$ tiene gráfica cerrada pero no es continua. Sin embargo, como consecuencia inmediata del Teorema de los isomorfismos de Banach, vemos que no es posible encontrar tal ejemplo entre las aplicaciones lineales entre espacios de Banach:

4.2.14 Teorema (de la gráfica cerrada para espacios de Banach).
Si X e Y son espacios de Banach, toda aplicación lineal con gráfica cerrada de X en Y es continua.

4.2.15 Corolario.
Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal y biyectiva. Si T tiene gráfica cerrada, entonces es un isomorfismo.

4.2.16 Corolario.
Sean X e Y dos espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ una aplicación lineal. Supongamos que para toda sucesión (x_n) en X convergente a 0 y tal que $(Tx_n) \longrightarrow y \in Y$, se tiene que $y = 0$. Entonces, T es continua.

4.2.17 Ejemplo.
Sea $Y = C[0,1]$ y $X = C^1[0,1]$, el subespacio de Y formado por las funciones de clase 1 en $[0,1]$. Definimos $T : X \longrightarrow Y$ definida por

$$T(f) = f' \qquad (f \in X).$$

Entonces, T es una aplicación lineal que tiene gráfica cerrada (Teorema de convergencia uniforme y derivación). Sin embargo, T no es continua. En efecto, consideremos la sucesión de elementos de X,

$$f_n(t) = t^n \qquad (t \in [0,1],\ n \in \mathbb{N})$$

y observemos que

$$\|f_n\|_\infty = 1 \quad \text{y} \quad \|Tf_n\|_\infty = \|f_n{}'\|_\infty = n \qquad (n \in \mathbb{N}),$$

lo que prueba que T no es continua.

4.2.18 Corolario.
Sea $\|\cdot\|$ una norma completa en $C(K)$. Supongamos que la convergencia en la norma $\|\cdot\|$ implica la convergencia puntual. Entonces dicha norma es equivalente a la norma del máximo en $C(K)$.

4.2.19 Corolario.
Sea H un espacio de Hilbert y $T : H \longrightarrow H$ una aplicación lineal. Supongamos que existe $S : H \longrightarrow H$ lineal verificando que

$$(Tx|y) = (x|Sy) \qquad (x, y \in H),$$

entonces $T \in L(H)$.

4.3 El Teorema de Banach-Steinhaus

4.3.1 Teorema (Principio de acotación uniforme en espacios de Banach)**.**
Sea X un espacio de Banach, $\{Y_i : i \in I\}$ una familia de espacios normados y, para cada $i \in I$, sea $T_i \in L(X, Y_i)$. Supongamos que la familia $\{T_i : i \in I\}$ está puntualmente acotada, esto es,

$$\text{para cada } x \in X, \quad \text{existe } M_x > 0 \quad : \quad \|T_i(x)\| \leqslant M_x \quad (i \in I).$$

Entonces, $\{T_i : i \in I\}$ está uniformemente acotada en la bola unidad de X, equivalentemente,

$$\text{existe } M > 0 \quad : \quad \|T_i\| \leqslant M \quad (i \in I).$$

4.3.2 Corolario (Teorema de Banach-Steinhaus para espacios de Banach)**.**
Sean X un espacio de Banach, Y un espacio normado y A un subconjunto de $L(X,Y)$. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en norma, esto es, existe $M \geqslant 0$ tal que $\|Tx\| \leqslant M\|x\|$ para cualesquiera $x \in X$, $T \in A$.*
(ii) *A está uniformemente acotado en cada subconjunto acotado de X, esto es, si $B \subset X$ es un conjunto acotado, entonces $\sup\{\|T(x)\| \,:\, x \in B,\, T \in A\} < \infty$.*
(iii) *A está puntualmente acotado, esto es, para cada $x \in X$ el conjunto $\{T(x) \,:\, T \in A\}$ está acotado en la norma de X.*

4.3.3 Corolario.
Sea X un espacio normado y A un subconjunto de X. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en la norma de X.*
(ii) *Para cada $f \in X^*$, el conjunto de escalares $\{f(a) \,:\, a \in A\}$ está acotado.*

4.3.4 Corolario.
Sea X un espacio de Banach y A un subconjunto de X^*. Entonces, son equivalentes:

(i) *A está acotado en la norma de X^*.*
(ii) *Para cada $x \in X$, el conjunto de escalares $\{f(x) \,:\, f \in A\}$ está acotado.*

4.3.5 Corolario (Teorema de cierre de Steinhaus)**.**
Sea X un espacio de Banach, Y un espacio normado y (T_n) una sucesión de elementos de $L(X,Y)$ que converge puntualmente en X. Definiendo

$$T(x) = \lim_{n\to\infty} T_n(x) \qquad (x \in X)$$

se tiene que $T \in L(X,Y)$.

4.3.6 Corolario.
Sea $y \in K^{\mathbb{N}}$ una sucesión de escalares; las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) *$y \in \ell_1$.*
(ii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ es absolutamente convergente.*
(iii) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ es convergente.*
(iv) *Para cada $x \in c_0$, la serie $\sum_{k\geqslant 1} x(k)y(k)$ tiene sumas parciales acotadas.*

4.3.7 Teorema.
Sea X un espacio de Banach, Y y Z espacios normados y $T : X \times Y \longrightarrow Z$ una aplicación bilineal. Equivalen:

(i) *Existe $M \geqslant 0$ tal que $\|T(x,y)\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ para cualesquiera $x \in X$ e $y \in Y$.*
(ii) *T es continua en $X \times Y$ (considerando, claro está, la topología producto).*
(iii) *T es separadamente continua, esto es, para cualesquiera $x_0 \in X$, $y_0 \in Y$, las aplicaciones lineales*

$$y \longmapsto T(x_0,y) \quad (y \in Y), \qquad x \longmapsto T(x,y_0) \quad (x \in X)$$

son continuas.