Apuntes de Integración de funciones de una variable

Miguel Martín Suárez

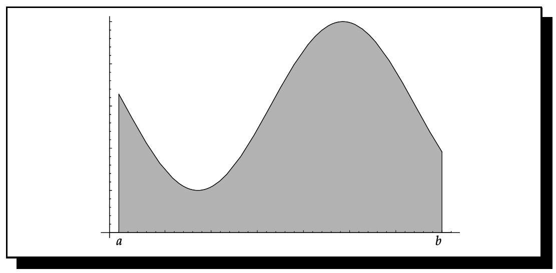
Departamento de Análisis Matemático

Universidad de Granada

INTEGRACIÓN DE FUNCIONES DE UNA VARIABLE

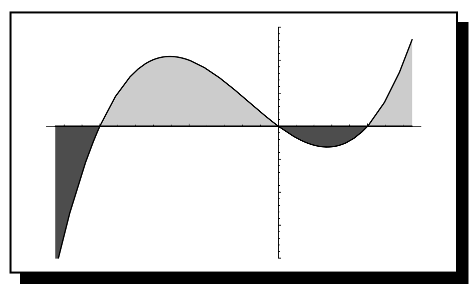
1 Sumas de Riemann. Definición de área y de integral.

Sea $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ una función continua y positiva. Representaremos por $G(f,a,b)$ la región del plano comprendida entre la curva $y = f(x)$, el eje de abscisas y las rectas $y = a$, $y = b$ (es la región pintada en gris en la figura de abajo).



Nos proponemos calcular el área de dicha región. Puesto que, en general, la figura no puede descomponerse en triángulos, rectángulos o cualquier otro tipo de figura elemental, no hay una fórmula que nos permita calcular directamente su área. En situaciones como esta, una estrategia básica consiste en obtener soluciones aproximadas que permitan definir el valor exacto del área como límite de las mismas. Fíjate que, al proceder así, estamos definiendo dicho valor exacto, es decir, estamos dando una definición matemática del concepto intuitivo de área.

¿Qué ocurre cuando la función f no es positiva?



Parece útil, y de hecho lo es en muchas situaciones, compensar el área que se queda por encima del eje OX con el área que se queda por debajo del eje OX, esto es, considerar positiva el área gris claro y negativa el área gris oscuro de la figura de la derecha.

Quedará todo más claro si definimos la parte positiva y la parte negativa de una función, que permite escribir cualquier función como diferencia de dos funciones positivas.

• Parte positiva y parte negativa de una función

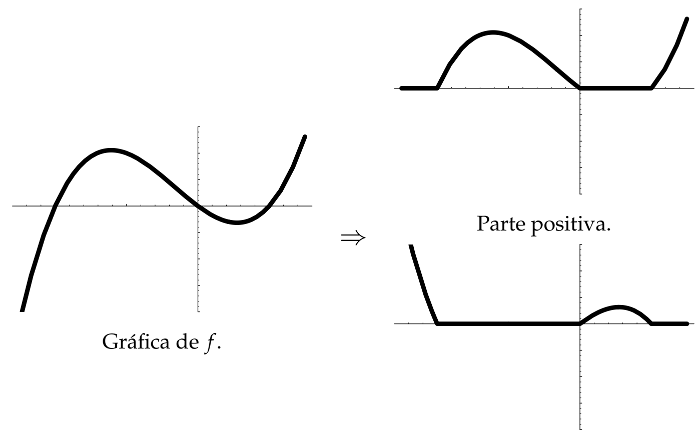
Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua; siempre podemos escribir f como diferencia de dos funciones continuas y positivas: su parte positiva y su parte negativa (ver figura en la siguiente página).

Se define la *parte positiva* de f como la función $f^+ : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f^+(x) = \text{máx}\{f(x), 0\} \qquad x \in [a,b],$$

y la *parte negativa* de f como $f^- : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$f^-(x) = \text{máx}\{-f(x), 0\} \qquad x \in [a,b].$$



Gráfica de f.

Parte positiva.

Parte negativa.

Es rutinario comprobar que que f^+ y f^- son funciones continuas y positivas y que

$$f = f^+ - f^- \qquad |f| = f^+ + f^-.$$

Nuestra idea es ver la integral de una función (que ahora definiremos) como un "área con signo": el área bajo la parte positiva menos el área bajo la parte negativa, esto es,

$$\text{área}\big(G(f^+, a, b)\big) - \text{área}\big(G(f^-, a, b)\big).$$

Lo que vamos a hacer es aproximar esa "área con signo" de la que hablamos arriba usando rectángulos, por exceso y por defecto, de la siguiente forma. Primero, se divide el intervalo $[a, b]$ en un número finito de subintervalos $[x_{k-1}, x_k]$, $1 \leqslant k \leqslant n$, cuyas longitudes pueden ser distintas y con la única condición de que no se solapen:

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b;$$

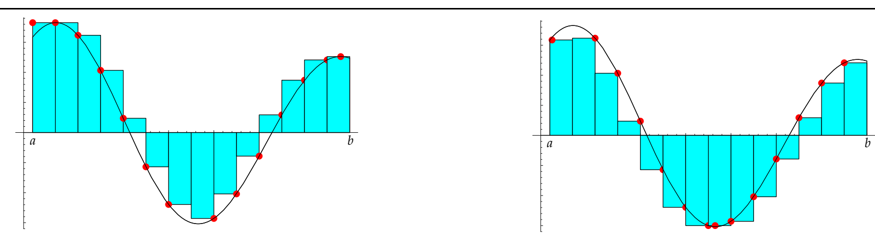
se dice que estos puntos constituyen una *partición* de $[a, b]$. Definamos

$$M_k = \sup f[x_{k-1}, x_k], \qquad m_k = \inf f[x_{k-1}, x_k].$$

Los números

$$S(f, P) = \sum_{k=1}^{n} M_k (x_k - x_{k-1}), \qquad I(f, P) = \sum_{k=1}^{n} m_k (x_k - x_{k-1}),$$

se llaman, respectivamente, *suma superior* y *suma inferior* de f para la partición P.



Suma superior.

Suma inferior.

Observaciones:

- Cuando f es positiva, $S(f, P)$ es un valor aproximado por exceso de área$\big(G(f, a, b)\big)$ e $I(f, P)$ es un valor aproximado por defecto de área$\big(G(f, a, b)\big)$, esto es,

$$I(f, P) \leqslant \text{área}\big(G(f, a, b)\big) \leqslant S(f, P).$$

- Cuando f toma valores positivos y negativos, $S(f,P)$ es un valor aproximado por exceso de $\text{área}\big(G(f^+,a,b)\big) - \text{área}\big(G(f^-,a,b)\big)$ e $I(f,P)$ es un valor aproximado por defecto de $\text{área}\big(G(f^+,a,b)\big) - \text{área}\big(G(f^-,a,b)\big)$, esto es,

$$I(f,P) \leqslant \text{área}\big(G(f^+,a,b)\big) - \text{área}\big(G(f^-,a,b)\big) \leqslant S(f,P).$$

La idea ahora es "tomar límite", esto es, considerar particiones en los que los rectángulos tengan cada vez una base más pequeña. Formalmente, consideramos "la mejor aproximación por exceso" y "la mejor aproximación por defecto", esto es, consideramos

$$\text{m.a.exceso} = \text{ínf}\,\big\{S(f,P)\ :\ P \text{ partición de } [a,b]\big\},$$
$$\text{m.a.defecto} = \sup\,\big\{I(f,P)\ :\ P \text{ partición de } [a,b]\big\}.$$

- Si f es positiva, tenemos

$$\text{m.a.defecto} \leqslant \text{área}\big(G(f,a,b)\big) \leqslant \text{m.a.exceso}.$$

- Si f toma valores positivos y negativos, tenemos

$$\text{m.a.defecto} \leqslant \text{área}\big(G(f^+,a,b)\big) - \text{área}\big(G(f^-,a,b)\big) \leqslant \text{m.a.exceso}.$$

Obsérvese que tenemos entonces **dos** "buenas" aproximaciones del "área con signo", una por exceso y otra por defecto. Si ambas fuesen iguales, lo que tendríamos de hecho es una definición correcta de área y "área con signo". Esto pasa para las funciones continuas, como dice el siguiente resultado, que no vamos a demostrar, y que permite definir la integral de una función continua definida en un intervalo cerrado y acotado.

Proposición 1. *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Entonces,*

$$\text{ínf}\,\big\{S(f,P)\ :\ P \textit{ partición de } [a,b]\big\} = \sup\,\big\{I(f,P)\ :\ P \textit{ partición de } [a,b]\big\}.$$

Definición. Para una función continua $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, definimos la *integral de f entre a y b* como el número real

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{ínf}\,\big\{S(f,P)\ :\ P \text{ partición de } [a,b]\big\} = \sup\,\big\{I(f,P)\ :\ P \text{ partición de } [a,b]\big\}.}$$

De lo dicho anteriormente, se deduce lo siguiente:

- Si la función f es positiva en $[a,b]$, entonces

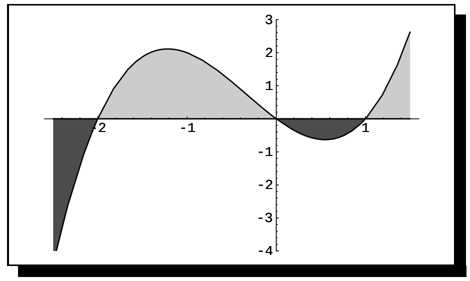
$$\boxed{\text{área}\big(G(f,a,b)\big) = \int_a^b f(x)\,dx,}$$

  fórmula que podemos tomar como definición de área de la región $G(f,a,b)$.

- Si la función f toma tanto valores positivo como negativos, entonces

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \text{área}\big(G(f^+,a,b)\big) - \text{área}\big(G(f^-,a,b)\big).}$$

En la figura de abajo, la integral de la función será el área de la región gris claro menos el área de la región gris oscuro.



Veamos ahora algunas propiedades elementales de la integral que acabamos de definir.

Proposición 2 (Propiedades de la integral)**.**

(i) *La integral de la suma es la suma de las integrales:*

$$\int_a^b [f(x)+g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$$

(ii) *La integral "saca escalares":*

$$\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx.$$

(iii) *Aditividad respecto del intervalo de integración:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \quad \text{para todo } c \in [a,b].$$

(iv) *La integral respeta el orden:*

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ en } [a,b] \quad \Rightarrow \quad \int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx.$$

2 Relación con el cálculo de primitivas.

Supongamos que tenemos una función continua y positiva $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, y queremos hallar área$\big(G(f,a,b)\big)$. Acabamos de ver que

$$\text{área}\big(G(f,a,b)\big) = \int_a^b f(x)\,dx,$$

pero esa fórmula no nos sirve de nada si no somos capaces de buscar una forma de calcular integrales. Lo que vamos a hacer ahora es probar que el cálculo de áreas (equivalentemente, el cálculo de integrales) se reduce al cálculo de primitivas.

*Una **primitiva** de una función f es otra función cuya derivada es f.*

Para cada punto $x_0 \in [a,b]$, llamemos $A(x_0)$ al área bajo $y = f(x)$ comprendida entre a y x_0, esto es

$$A(x_0) = \text{área}\big(G(f,a,x_0)\big).$$

Nuestro objetivo es probar que la *"función área"*, $x_0 \longmapsto A(x_0)$, es derivable en todo punto x_0 de $[a,b]$ con derivada $f(x_0)$, esto es, queremos ver que

$$\lim_{x\to x_0} \frac{A(x)-A(x_0)}{x-x_0} = f(x_0).$$

Fijemos $\varepsilon > 0$ y usemos la continuidad de f en x_0 para encontrar $\delta > 0$ tal que

$$|x - x_0| < \delta, \ x \in [a,b] \quad \Rightarrow \quad f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon.$$

Si $x > x_0$, entonces $A(x) - A(x_0)$ no es más que el área bajo la curva entre x_0 y x, esto es, el área de un "pseudo-rectángulo" de base $x - x_0$ y altura variando entre el mínimo de f en $[x_0, x]$ y el máximo de f en $[x_0, x]$. Si se tiene que $|x - x_0| < \delta$, entonces tendremos

$$f(x_0) - \varepsilon < \text{mín}\{f(t) \,:\, t \in [x_0, x]\} \leqslant \text{máx}\{f(t) \,:\, t \in [x_0, x]\} < f(x_0) + \varepsilon,$$

con lo que

$$\big(f(x_0) - \varepsilon\big)(x - x_0) < A(x) - A(x_0) < \big(f(x_0) + \varepsilon\big)(x - x_0).$$

Por tanto

$$\left| \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| < \varepsilon.$$

Hemos demostrado así que A es derivable por la derecha en x_0, y de forma absolutamente análoga podemos ver que lo es por la izquierda, con lo que A será derivable en x_0 y su derivada en x_0 valdrá $A'(x_0) = f(x_0)$. Como esta cuenta podemos hacerla para todo $x_0 \in [a,b]$, obtenemos que A es derivable en $[a,b]$ y su derivada es f, o, en otras palabras, A es una *primitiva* de f. Además, se tiene que $A(a) = 0$, puesto que el área bajo $y = f(x)$ entre a y a es claramente 0. □

Vamos a obtener dos consecuencias del resultado que acabamos de probar:

□ En primer lugar, hemos visto que toda función continua y positiva, definida en un intervalo, admite primitiva (la función área). En el caso general en el que se tiene una función no necesariamente positiva, $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$, recordemos que siempre podremos escribir $f = f^+ - f^-$. Tomando entonces primitivas de f^+ y f^-, sean F_1 y F_2 respectivamente, se tendrá que la función $F = F_1 - F_2$ es una primitiva de f.

Hemos probado:

Teorema 3 (Teorema Fundamental del cálculo integral)**.** *Toda función continua definida en un intervalo cerrado y acotado admite primitiva.*

□ Para calcular el área bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ (que vale $A(b)$) tenemos que encontrar una primitiva de f que valga 0 en a (esto es, la función área A); pero dos primitivas cualesquiera de f se diferencian en una constante, luego conocida *cualquier* primitiva de f, llámese F, podemos calcular el área bajo $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ como

$$\boxed{\text{área}\big(G(f, a, b)\big) = F(b) - F(a)}$$

¿Qué pasa si la función f no es positiva? Observemos que si F_1 y F_2 son primitivas de f^+ y f^- respectivamente, como $f = f^+ - f^-$, la función $F = F_1 - F_2$ es una primitiva de f. Entonces, por lo visto antes,

$$\text{área}\big(G(f^+, a, b)\big) = F_1(b) - F_1(a) \qquad \text{área}\big(G(f^-, a, b)\big) = F_2(b) - F_2(a).$$

Por tanto:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\,dx &= \text{área}\big(G(f^+, a, b)\big) - \text{área}\big(G(f^-, a, b)\big) \\ &= \big[F_1(b) - F_1(a)\big] - \big[F_2(b) - F_2(a)\big] \\ &= \big[F_1(b) - F_2(b)\big] - \big[F_1(a) - F_2(a)\big] \\ &= F(b) - F(a), \end{aligned}$$

y esta última fórmula no depende de la la primitiva de f que se use, luego hemos demostrado:

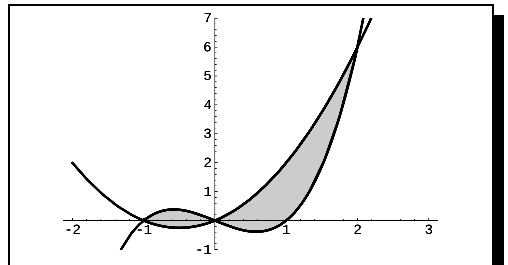
Teorema 4 (Regla de Barrow). *Sea $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua y F una primitiva cualquiera de f. Entonces*

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)}$$

• Área entre dos curvas:

Dadas dos funciones continuas $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ con $f(x) \geqslant g(x)\ \forall x \in [a,b]$, llamamos *área encerrada entre f y g en $[a,b]$* al área de la región plana acotada por arriba por $y = f(x)$, por abajo por $y = g(x)$, y lateralmente por $x = a$ y $x = b$. En este caso, dicho área vale

$$\boxed{A = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx}$$



Área entre dos curvas.

En el caso general en que las funciones no estén ordenadas en todo el intervalo (hay trozos donde f es mayor y trozos donde lo es g), dividiremos el intervalo $[a,b]$ en trozos disjuntos buscando los puntos de corte de las dos funciones, de forma que en cada trozo una de ellas sea mayor que la otra, y calcularemos el área entre las curvas en cada trozo. El área total entre las curvas será pues la suma de estas áreas. Veamos un ejemplo:

☐ **Ejemplo:** *Calcular el área entre las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ (área de la región sombreada en la figura de arriba).*

NOTA: En general, cuando no se especifica el intervalo donde tenemos que calcular el área, se toma el intervalo comprendido entre el primer y el último punto de corte de las gráficas.

Lo primero que necesitamos son los puntos de corte de las dos gráficas, que se obtienen resolviendo la ecuación

$$x^3 - x = x^2 + x.$$

Dichos puntos son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, con lo que dividimos el área en dos partes: A_1, la parte en el intervalo $[-1,0]$ (donde $y = x^3 - x$ está encima de $y = x^2 + x$), y A_2, la parte en el intervalo $[0,2]$ (donde pasa lo contrario). Entonces

$$A_1 = \int_{-1}^0 [x^3 - x - (x^2 + x)]\,dx = \frac{5}{12} \qquad A_2 = \int_0^2 [x^2 + x - (x^3 - x)]\,dx = \frac{8}{3},$$

con lo que el área buscada será $A = A_1 + A_2 = 5/12 + 8/3 = 37/12$.

3 Longitudes de curvas. Áreas y volúmenes de sólidos de revolución

• Longitudes de curvas:

Sea f una función derivable con derivada continua en el intervalo $[a,b]$. La longitud del arco de la curva $y = f(x)$ entre $x = a$ y $x = b$ es

$$\boxed{l = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,dx}$$

☐ **Ejemplo:** *Calcular la longitud de una circunferencia de radio 1.* La ecuación de una circunferencia de radio 1 es $x^2 + y^2 = 1$. Podemos despejar y en la parte positiva:

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Así, la longitud de <u>media</u> circunferencia será:

$$\ell = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = [\operatorname{arc\,sen} x]_{-1}^{1} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

• **Áreas de sólidos de revolución:**

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función derivable con derivada continua en $[a, b]$. Entonces el área de la superficie generada haciendo girar alrededor del eje OX el arco de curva $y = f(x)$ en $[a, b]$ es

$$\boxed{A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2}\, dx}$$

☐ **Ejemplo:** *Superficie de una esfera de radio 1.* Podemos generar una esfera girando respecto del eje OX la curva del ejemplo anterior

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

De esta forma, la superficie será:

$$A = 2\pi \int_{-1}^{1} f(x) \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = \cdots = 2\pi \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{1 - x^2}}\, dx = 2\pi \int_{-1}^{1} dx = 2\pi \cdot 2 = 4\pi.$$

• **Volúmenes de sólidos de revolución:**

Sea $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua. El volumen del sólido generado al girar el área bajo la curva $y = f(x)$ respecto del eje OX es

$$\boxed{V_{OX} = \pi \int_a^b f(x)^2\, dx}$$

y el volumen del sólido generado al girar dicha área respecto al eje OY es

$$\boxed{V_{OY} = 2\pi \int_a^b x f(x)\, dx}$$

☐ **Ejemplo:** *Volumen de una esfera de radio 1.* Igual que antes, podemos generar una esfera rotando respecto del eje OX el área bajo la curva

$$y = f(x) = \sqrt{1 - x^2} \qquad x \in [-1, 1]$$

Con ello, el volumen será

$$V = \pi \int_{-1}^{1} f(x)^2\, dx = \pi \int_{-1}^{1} (1 - x^2)\, dx = \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^{1} = \pi \Big((1 - 1/3) - (-1 + 1/3) \Big) = \frac{4\pi}{3}.$$

4 Cálculo de áreas de regiones no acotadas. Integrales impropias.

Hasta ahora hemos visto cómo calcular integrales de funciones continuas definidas en intervalos cerrados y acotados. Sin embargo, el método empleado para calcular integrales mediante primitivas puede extenderse a situaciones más generales: funciones continuas definidas en intervalos no acotados (es decir, intervalos de la forma $]-\infty, b]$ o $[a, +\infty[$), o a funciones continuas definidas en intervalos abiertos. A estas integrales se les suele dar el nombre de *integrales impropias* y, como se verá, nosotros las trataremos de forma muy parecida a las que ya conocemos. Estudiaremos tres casos posibles.

• Integración en intervalos no acotados.

Supongamos que tenemos una función definida en un intervalo no acotado, $f : [a, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$, que es continua en todo $[a, +\infty[$. Podemos buscar una primitiva de f, llamémosla F, y estudiar su comportamiento en $+\infty$: si la función F tiene límite en $+\infty$, diremos que existe la integral impropia de f en $[a, +\infty[$, y dicha integral valdrá:

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to+\infty} F(x)\right) - F(a)}$$

es decir, la integral vale "$F(+\infty) - F(a)$", considerando $F(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} F(x)$. Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$.

Una vez que hemos definido una integral para este tipo de funciones, podemos generalizar el área bajo una curva, la longitud de un arco de curva, la superficie y el volumen de un sólido de revolución... siendo las fórmulas dadas anteriormente perfectamente válidas.

NOTA: El caso de una función definida en un intervalo de la forma $]-\infty, b]$ es completamente análogo. Además, si tenemos una función definida en todo $\mathbb{R}$, podemos dividir la integral como:

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)\,dx + \int_c^{+\infty} f(x)\,dx}$$

para cualquier $c \in \mathbb{R}$. Si la suma vale "$\infty - \infty$", NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

□ **Ejemplo:** *Calcular el área comprendida bajo la curva* $y = 1/x^2$ *en el intervalo* $[1, +\infty[$. Viendo el área bajo la curva como una integral se tiene que

$$A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2} = \left[\frac{-1}{x}\right]_1^{+\infty} = \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{x}\right) - (-1) = 1.$$

• Integración de funciones continuas en intervalos abiertos.

Se trata de calcular integrales de funciones definidas en un intervalo abierto en uno de sus extremos, y que tienen una asíntota vertical en dicho extremo. Supongamos que el intervalo es de la forma $]a, b]$; el caso de un intervalo $[a, b[$ es completamente análogo.

Sea pues $f :]a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ una función continua a la que queremos calcular su integral, y sea F una primitiva suya. Estudiamos entonces el límite por la derecha de la primitiva en a, y si existe podemos calcular la integral de f:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right)}$$

NOTA: Si el límite de la primitiva es $+\infty$ o $-\infty$, diremos que la integral vale $+\infty$ o $-\infty$. Si tenemos una función continua en un intervalo abierto $f :]a, b[\longrightarrow \mathbb{R}$, su integral valdrá

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left(\lim_{x\to b^-} F(x)\right) - \left(\lim_{x\to a^+} F(x)\right).$$

Otra vez, si la suma vale "$\infty - \infty$", NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

Al igual que antes, podemos generalizar el cálculo de longitudes, áreas y volúmenes.

□ **Ejemplo:** *Calcular el área bajo la curva* $y = 1/\sqrt{x}$ *en* $]0,1]$. Aplicamos la fórmula dada, y tenemos

$$A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = \left[2\sqrt{x}\,\right]_0^1 = 2 - \left(\lim_{x\to 0^+} 2\sqrt{x}\right) = 2.$$

• Integración de funciones continuas en un intervalo salvo un punto interior.

Supongamos que tenemos una función $f : [a,b] - \{c\} \longrightarrow \mathbb{R}$ que es continua en $[a,b] - \{c\}$ y que tiene una asíntota vertical en $x = c$. Entonces, si queremos calcular la integral de f entre a y b, tenemos que dividir dicha integral en dos trozos: la integral en $[a, c[$ y la integral en $]c, b]$. Como estos dos casos quedan contemplados en los supuestos anteriores, podemos calcular la integral de f entre a y b como

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.}$$

El único problema que se puede presentar es, de nuevo, que la suma valga "$\infty - \infty$", en cuyo caso NO PODEMOS CALCULAR LA INTEGRAL.

□ **Ejemplo:** *Calcular la integral de la función* $f(x) = \log(x^2)$ *entre* -1 *y* 1. La función que nos dan es $f : [-1,1] - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \log(x^2)$. Esta función tiene una asíntota vertical en $x = 0$, por lo que para calcular su integral dividimos el intervalo en dos partes, $[-1, 0[$ y $]0, 1]$. Cada una de las dos integrales vale:

$$\int_{-1}^0 \log(x^2)\,dx = \Big[x\log(x^2) - 2x\Big]_{-1}^0 = -2$$
$$\int_0^1 \log(x^2)\,dx = \Big[x\log(x^2) - 2x\Big]_0^1 = -2$$

con lo que se tiene que

$$\int_{-1}^1 \log(x^2)\,dx = -2 - 2 = -4.$$

□ **Ejemplo:** *Calcular* $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx$. Si hacemos

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^1 = -1 - (+1) = -2!!!!!$$

Pero la función que estamos integrando es positiva, ¡no tiene sentido que tenga integral negativa! ¿Qué ha pasado? Como la función $1/x^2$ tiene una asíntota vertical en $x = 0$, tenemos que descomponer la integral como

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{x^2}\,dx = \int_{-1}^0 \frac{1}{x^2}\,dx + \int_0^1 \frac{1}{x^2}\,dx,$$

pero

$$\int_{-1}^{0} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{-1}^{0} = \lim_{x\to 0^-} (-1/x) - (+1) = +\infty$$

$$\int_{0}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = \left[\frac{-1}{x}\right]_{0}^{1} = -1 - \lim_{x\to 0^+} (-1/x) = +\infty,$$

y por tanto

$$\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2}\,dx = +\infty.$$

5 Métodos de cálculo de primitivas.

En esta sección aprenderemos cómo calcular primitivas de funciones, lo que nos permitirá calcular integrales definidas (y por tanto áreas entre curvas) en ejemplos concretos. No trataremos todos los *métodos de cálculo de primitivas* (o *métodos de integración*) conocidos, sino sólo algunos de los más importantes. Al final de estos apuntes encontrarás una lista de primitivas inmediatas que debes conocer.

Utilizaremos la notación $\int f(x)\,dx$ para indicar que estamos calculando una primitiva de la función f.

• **CAMBIO DE VARIABLE.**
Hacemos

$$y = \phi(x), \qquad dy = \phi'(x)\,dx,$$

se tiene

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,dx = \int f(y)\,dy$$

y no tenemos más que deshacer el cambio.

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\int \frac{e^x + 3e^{2x}}{2+e^x}\,dx$:

$$\int \frac{e^x+3e^{2x}}{2+e^x}\,dx = \left[\begin{array}{l} y = e^x \\ dy = e^x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{y+3y^2}{2+y}\cdot\frac{1}{y}\,dy = \int \frac{1+3y}{2+y}\,dy = \int \left(3 - \frac{5}{2+y}\right)\,dy$$
$$= 3y - 5\log|y+2| = 3e^x - 5\log(e^x+2)$$

• **INTEGRACIÓN POR PARTES.**
Si u y v son dos funciones de x, teniendo en cuenta que

$$(u\cdot v)' = u\cdot v' + v\cdot u'$$

obtenemos

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx.$$

□ **Ejemplo:** Cálculo de $\int x\,e^x\,dx$:

$$\int x\,e^x\,dx = \left[\begin{array}{ll} u = x, & du = dx \\ dv = e^x\,dx, & v = e^x \end{array}\right] = x\,e^x - \int e^x\,dx = x\,e^x - e^x = e^x(x-1)$$

• **INTEGRACIÓN DE FUNCIONES RACIONALES.**
Sean $P(x)$ y $Q(x)$ dos polinomios, y queremos calcular $\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx$. Si el grado de P es mayor o igual que el de Q, podemos dividir los dos polinomios obteniendo

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = H(x) + \frac{G(x)}{Q(x)},$$

donde $H(x)$ y $G(x)$ son polinomios y el grado de G es menor que el grado de Q. Por tanto, supondremos siempre que el grado de P es menor que el grado de Q.

■ **Integrales del tipo** $\int \frac{\mathbf{P(x)}}{\mathbf{(ax+b)^n}}\mathbf{dx}$**:**
Se resuelven mediante el cambio de variable $y = ax + b$.

□ **Ejemplo:**

$$\begin{aligned}\int \frac{3x^2+5x+2}{(x-1)^3}\,dx = [y=x-1, dy=dx] = \int \frac{3(y+1)^2+5(y+1)+2}{y^3}\,dy \\ = \int \frac{3y^2+11y+10}{y^3}\,dy \\ = 3\int \frac{dy}{y} + 11\int \frac{dy}{y^2} + 10\int \frac{dy}{y^3} \\ = 3\log|x-1| - \frac{11}{x-1} - \frac{5}{(x-1)^2}\end{aligned}$$

■ **Integrales del tipo $\int \frac{\mathbf{Mx+N}}{\mathbf{x^2+bx+c}}$ dx donde el denominador no tiene raíces reales:**
Siempre se puede escribir $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx = \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ = \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ = \frac{M}{2}\log\left|(x-d)^2+k^2\right| + (N+Md)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable

$$y = \frac{x-d}{k}.$$

□ **Ejemplo:** *Cálculo de* $\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx$*:* Como $x^2+2x+2 = (x+1)^2+1$, hacemos el cambio $y = x+1$

$$\begin{aligned}\int \frac{2x+3}{x^2+2x+2}\,dx = \int \frac{2(y-1)+3}{y^2+1}\,dy = \int \frac{2y}{y^2+1}\,dy + \int \frac{dy}{y^2+1} \\ = \log(y^2+1) + \operatorname{arctag}(y) = \log(x^2+2x+2) + \operatorname{arctag}(x+1)\end{aligned}$$

■ **Raíces reales y/o complejas simples:**
En este caso

$$Q(x) = (x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_n)(x^2+b_1x+c_1)(x^2+b_2x+c_2)\dots(x^2+b_mx+c_m)$$

Lo que vamos a hacer es descomponer de nuevo en fracciones más sencillas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \dots + \frac{A_n}{x-a_n} + \\ + \frac{B_1x+C_1}{x^2+b_1x+c_1} + \frac{B_2x+C_2}{x^2+b_2x+c_2} + \dots \frac{B_mx+C_m}{x^2+b_mx+c_m},\end{aligned}$$

donde $A_1, A_2, \dots, A_n, B_1, B_2, \dots, C_m$ son constantes a determinar. Para calcularlas desarrollamos e igualamos los coeficientes del mismo grado.

Nota: Si el polinomio $Q(x)$ sólo tiene raíces reales se pueden calcular las constantes $A_1, \dots, A_n$ dando a la variable x los valores $a_1, \dots, a_n$.

☐ **Ejemplo:** *Cálculo de* $\int \frac{1}{x^4-1}\,dx$: Como $x^4-1=(x-1)(x+1)(x^2+1)$, la descomposición nos quedaría:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{Cx+D}{x^2+1}$$

Si desarrollamos e igualamos coeficientes:

$$\frac{1}{x^4-1}=\frac{A(x+1)(x^2+1)+B(x-1)(x^2+1)+(Cx+D)(x^2-1)}{x^4-1}$$

$$1=(A+B+C)x^3+(A-B+D)x^2+(A+B-C)x+(A-B-D)$$

$$\left.\begin{array}{l} A+B+C=0\\ A-B+D=0\\ A+B-C=0\\ A-B-D=1 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} A=1/4\\ B=-1/4\\ C=0\\ D=-1/2 \end{array}\right.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{x^4+1}&=\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-1}-\frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1}-\frac{1}{2}\int\frac{dx}{x^2+1}\\ &=\frac{1}{4}\log|x-1|-\frac{1}{4}\log|x+1|-\frac{1}{2}\text{arctag}(x)\end{aligned}$$

■ **Raíces reales múltiples:**
En este caso el denominador tiene la forma

$$Q(x)=(x-a_1)^{r_1}(x-a_2)^{r_2}\dots(x-a_n)^{r_n},$$

y podemos descomponer la fracción $\frac{P(x)}{Q(x)}$ en fracciones simples

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{A_1}{x-a_1}+\frac{A_2}{(x-a_2)^2}+\dots+\frac{A_{r_1}}{(x-a_1)^{r_1}}+\frac{B_1}{x-a_2}+\frac{B_2}{(x-a_2)^2}+\cdots\frac{C_{r_n}}{(x-a_n)^n}$$

Cada una de estas fracciones pertenecen a alguno de los casos ya estudiados.

☐ **Ejemplo:** *Calcular* $\int \frac{1}{(x-1)(x+1)^3}\,dx$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{(x-1)(x+1)^3}&=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+1}+\frac{C}{(x+1)^2}+\frac{D}{(x+1)^3}\\ &=\frac{A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)}{(x-1)(x+1)^3}\end{aligned}$$

Entonces, $A(x+1)^3+B(x-1)(x+1)^2+C(x-1)(x+1)+D(x-1)=1$, y si igualamos coeficientes:

$$\left.\begin{array}{l} A+B=0\\ 3A+B+C=0\\ 3A-B+D=0\\ A-B-C-D=1 \end{array}\right\}\quad\Rightarrow\quad\left\{\begin{array}{l} A=1/8\\ B=-1/8\\ C=-1/4\\ D=-1/2 \end{array}\right.$$

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{(x-1)(x+1)^3} &= \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{8}\int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{4}\int \frac{dx}{(x+1)^2} - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+1)^3} \\ &= \frac{1}{8}\log|x-1| - \frac{1}{8}\log|x+1| + \frac{1}{4(x+1)} + \frac{1}{4(x+1)^2}\end{aligned}$$

■ **Raíces reales y complejas múltiples. Método de Hermite:**
El último método que vamos a estudiar, conocido como Método de Hermite, consiste en descomponer $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones más simples de una forma muy particular. Puede usarse siempre, pero es especialmente útil cuando se tienen raíces complejas múltiples.

Pasos a seguir:

◇ **Paso 1:** Descomponemos el denominador, $Q(x)$, como producto de factores de grado 1 y factores de grado 2 irreducibles:

$$Q(x) = (x-a_1)^{\alpha_1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m}.$$

◇ **Paso 2:** Escribimos el cociente $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} = {} & \frac{A_1}{x-a_1} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+b_1x+c_1} + \cdots + \frac{M_mx+N_m}{x^2+b_mx+c_m} + \\ & + \frac{d}{dx}\left(\frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\right)\end{aligned}$$

donde $A_1,\dots,A_n,M_1,\dots,M_m,N_1,\dots,N_m$ son coeficientes que tenemos que determinar, y en la fracción que aparece con una derivada $F(x)$ es un polinomio genérico de grado uno menos que el denominador. En resumen, se trata de escribir $\frac{P(x)}{Q(x)}$ como suma de fracciones simples, una por cada factor, más la derivada de un cociente que tiene por denominador lo que queda de $Q(x)$.

¿Cómo determinamos todos los coeficientes? Basta efectuar la derivada, reducir todas las fracciones a común denominador (que será $Q(x)$), e igualar $P(x)$ al numerador resultante. Esto nos producirá un sistema de ecuaciones cuya resolución nos dará el valor de todos los coeficientes.

◇ **Paso 3:** Una vez escrita la función racional $\frac{P(x)}{Q(x)}$ de la forma anterior, es fácil calcular su integral:

$$\begin{aligned}\int \frac{P(x)}{Q(x)}\,dx = {} & \int \frac{A_1}{x-a_1}\,dx + \cdots + \int \frac{M_1x+N1}{x^2+b_1x+c_1}\,dx + \cdots + \\ & + \frac{F(x)}{(x-a_1)^{\alpha_1-1}\cdots(x-a_n)^{\alpha_n-1}(x^2+b_1x+c_1)^{\beta_1-1}\cdots(x^2+b_mx+c_m)^{\beta_m-1}}\end{aligned}$$

◇ **Paso 4:** Sólo nos queda saber calcular las integrales que hemos dejado pendientes:

$*$ $\int \frac{A}{x-a}\,dx = A\log|x-a|.$

$*\displaystyle\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx$: siempre se puede escribir $x^2+bx+c=(x-d)^2+k^2$, con lo que descomponemos nuestra integral en dos:

$$\begin{aligned}\int \frac{Mx+N}{x^2+bx+c}\,dx &= \int \frac{Mx+N}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \int \frac{M(x-d)+N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \int \frac{M(x-d)}{(x-d)^2+k^2}\,dx + \int \frac{N+Md}{(x-d)^2+k^2}\,dx = \\ &= \frac{M}{2}\log\left((x-d)^2+k^2\right) + (N+Md)\int \frac{dx}{(x-d)^2+k^2}\end{aligned}$$

y la última integral es inmediata (del tipo arcotangente) si hacemos el cambio de variable

$$y=\frac{x-d}{k}.$$

$\square$ **Ejemplo:** Cálculo de $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx$.

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx &= \frac{Mx+N}{x^2+9} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{x^2+9}\right) = \frac{(Mx+N)(x^2+9)}{(x^2+9)^2} + \frac{a(x^2+9)-2x(ax+b)}{(x^2+9)^2} = \\ &= \frac{Mx^3+(N-a)x^2+(9M-2b)x+(9a+9N)}{(x^2+9)^2}\end{aligned}$$

Igualando los numeradores coeficiente a coeficiente, obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\left.\begin{array}{rl} M &= 0 \\ -a+N &= 1 \\ -2b+9M &= 0 \\ 9a+9N &= 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{array}{ll} M=0 & b=0 \\ N=1/2 & a=-1/2 \end{array}\right.$$

De esta forma se tiene

$$\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-1/2x}{x^2+9} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^2+9},$$

y la última integral vale

$$\int \frac{dx}{x^2+9} = \int \frac{1/9}{\left(\frac{x}{3}\right)^2+1}\,dx = \frac{1}{3}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right).$$

En resumen, $\displaystyle\int \frac{x^2}{(x^2+9)^2}\,dx = \frac{-x}{2(x^2+9)} + \frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{x}{3}\right)$.

$\square$ **Ejemplo:** Calcular $\displaystyle\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx$.

$$\frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Mx+N}{x^2+1} + \frac{d}{dx}\left(\frac{ax^3+bx^2+cx+d}{x^2(x^2+1)}\right).$$

Realizando la derivada y reduciendo a común denominador, obtenemos un sistema de ecuaciones cuya solución es

$$a = 0, \qquad b = 5/2, \qquad c = 0, \qquad d = 1, \qquad A = 5, \qquad M = -5, \qquad N = 0;$$

por lo tanto

$$\int \frac{x^2-2}{x^3(x^2+1)^2}\,dx = \frac{(5/2)x^2+1}{x^2(x^2+1)} + 5\log x - \frac{5}{2}\log(x^2+1).$$

• **Integración de funciones trigonométricas.**
Se trata de calcular primitivas de funciones racionales en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$, es decir, funciones que sean cociente de dos polinomios en $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$. En general, se hace el cambio de variable

$$t = \tan\frac{x}{2}$$

con lo que

$$\operatorname{sen} x = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad dx = \frac{2\,dt}{1+t^2}.$$

Con este cambio convertimos la integral en una racional, que ya hemos estudiado.

□ **Ejemplo:** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \tan x}$.

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen} x - \tan x} = \int \frac{\cos x\,dx}{\operatorname{sen} x\cos x - \operatorname{sen} x} = \Big[\tan x/2 = t\Big] = \cdots = \int \frac{t^2-1}{2t^3}\,dt$$
$$= \frac{1}{4t^2} + \frac{\log t}{2} = \frac{1}{4\tan^2(x/2)} + \frac{1}{2}\log|\tan(x/2)|.$$

Caso particular: Integración de $\displaystyle\int \operatorname{sen}^n x\cos^m x\,dx$, con n y m números enteros (positivos o negativos):

a) Si n es impar, se hace el cambio $y = \cos x$, y se utiliza la identidad $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1$.
b) Si m es impar, se hace el cambio $y = \operatorname{sen} x$, y se utiliza la misma identidad.
c) Si n y m son pares, se puede simplificar la integral usando las identidades

$$\cos^2 x = \frac{1+\cos 2x}{2} \qquad \operatorname{sen}^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}.$$

□ **Ejemplo:** Calcular $\displaystyle\int \cos^2 x\,dx$ y $\displaystyle\int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx$.

$$\diamondsuit \int \cos^2 x\,dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\,dx = \int \frac{dx}{2} + \int \frac{\cos 2x}{2}\,dx = \frac{x}{2} + \frac{\operatorname{sen} 2x}{4}.$$

$$\diamondsuit \int \frac{\cos^3 x}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = \int \frac{(1-\operatorname{sen}^2 x)\cos x\,dx}{\operatorname{sen}^2 x} = \left[\begin{array}{l} y = \operatorname{sen} x \\ dy = \cos x\,dx \end{array}\right] = \int \frac{1-y^2}{y^2}\,dy$$
$$= \frac{-1}{y} - y = \frac{-1}{\operatorname{sen} x} - \operatorname{sen} x.$$

• **Integración de funciones con radicales cuadráticos.**
Se trata de calcular primitivas de funciones en las que aparece la raíz de un polinomio de 2^o grado. La forma de resolverlas será siempre “completando cuadrados” hasta obtener en el radicando (vía un cambio de variable) una función del tipo $\pm 1 \pm y^2$. Veamos un ejemplo:

□ **Ejemplo:** Calcular $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}}$.

Transformamos el integrando:

$$8x - x^2 = -(x^2 - 8x + 16) + 16 = -(x-4)^2 + 16 = 16\left(1 - \left(\frac{x-4}{4}\right)^2\right)$$

y hacemos el cambio de variable $y = (x-4)/4$:

$$\int \frac{dx}{\sqrt{8x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{16(1-(\frac{x-4}{4})^2)}} = \left[\begin{array}{c} y = (x-4)/4 \\ dy = dx/4 \end{array}\right] =$$
$$= \int \frac{4dy}{4\sqrt{1-y^2}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \operatorname{arc\,sen} y = \operatorname{arc\,sen}\left(\frac{x-4}{4}\right)$$

En general, después de completar cuadrados tenemos los siguientes casos:

(*i*) $\sqrt{1-y^2}$: se resuelve con el cambio $y = \cos t$ o $y = \operatorname{sen} t$, pues $1 - \cos^2 t = \operatorname{sen}^2 t$.
(*ii*) $\sqrt{1+y^2}$: se resuelve con $y = \tan t$, puesto que $1 + \tan^2 t = 1/\cos^2 t$.
(*iii*) $\sqrt{y^2-1}$: usamos el cambio $y = \cosh t$, ya que $\cosh^2 t - 1 = \operatorname{senh}^2 t$.

TABLA DE PRIMITIVAS INMEDIATAS	
Funciones potenciales y racionales	
$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1}x^{n+1} \quad (\text{si } n \neq -1)$	$\int \frac{1}{x}\,dx = \log\lvert x\rvert$
$\int \frac{dx}{x^2+1} = \arctan x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc\,sen} x$
$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}} = \operatorname{arcsenh} x$	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-1}} = \operatorname{arccosh} x$
Funciones exponenciales y logarítmicas	
$\int e^x\,dx = e^x$	$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\log a} \quad (\text{si } a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\})$
$\int \log x\,dx = x\log x - x$	
Funciones trigonométricas	
$\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x$
$\int (1+\tan^2 x)\,dx = \tan x$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x$
Funciones hiperbólicas	
$\int \operatorname{senh} x\,dx = \cosh x$	$\int \cosh x\,dx = \operatorname{senh} x$
$\int (1-\tanh^2 x)\,dx = \tanh x$	$\int \frac{dx}{\cosh^2 x} = \tanh x$