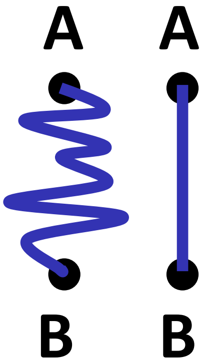


¿Es la línea recta el camino más corto entre dos puntos?

Miguel Martín Suárez

Departamento de Análisis Matemático

Instituto de Matemáticas de la UGR (IMAG)

Instituto de Matemáticas Universidad de Granada

EXCELENCIA MARÍA DE MAEZTU

UNIVERSIDAD DE GRANADA

UNIÓN EUROPEA
Fondo Europeo de Desarrollo Regional

GOBIERNO DE ESPAÑA
MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

Junta de Andalucía
Consejería de Transformación Económica, Industria, Conocimiento y Universidades

Universitat de València — Facultad de Ciencias Matemáticas

Jueves 24 de Febrero de 2022

Dedicado a Jesús Ferrer, *in memoriam*

Organización de la conferencia

Las fotos y gráficos usados en este taller están sacadas de fuentes libres como:

- Wikipedia: https://www.wikipedia.org/
- MacTutor history of Mathematics: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
- Gráficos sencillos creados por el autor de la conferencia. . .

En otros casos, se incluirá referencia explícita a la fuente.

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- La "dimensión infinita" **NO** significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.

- La "dimensión infinita" **NO** significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- La "dimensión infinita" **NO** significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- La "dimensión infinita" **NO** significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Se darán ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones.**

Presentación y esquema

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- La "dimensión infinita" **NO** significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Se darán ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones.**
- **Finalmente hablaremos de cuándo la forma o la distancia concreta no es importante, esto es, hablaremos de "topología" o "geometría de la posición".**

Bases: dimensión infinita

¿Qué es una base?

¿Qué es una base?

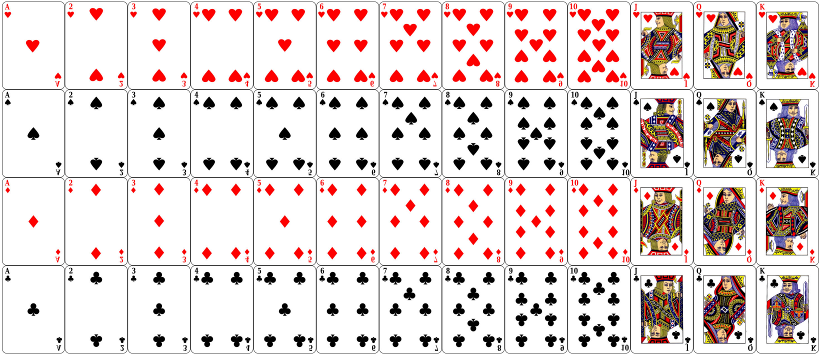
- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.

¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.

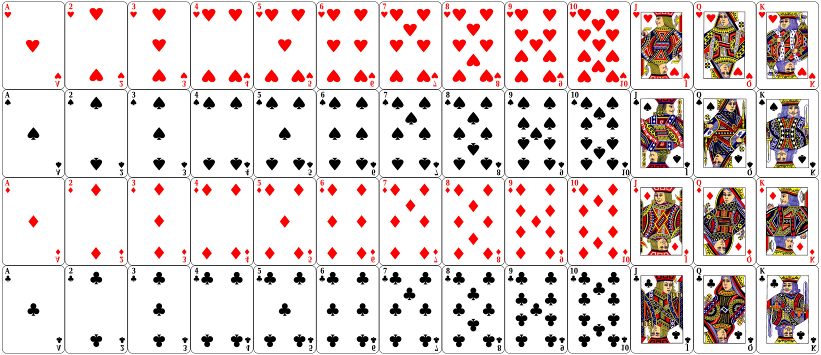
¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.



¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.



- Con 4 cartas "básicas" podemos representar toda la baraja.

Bases infinitas

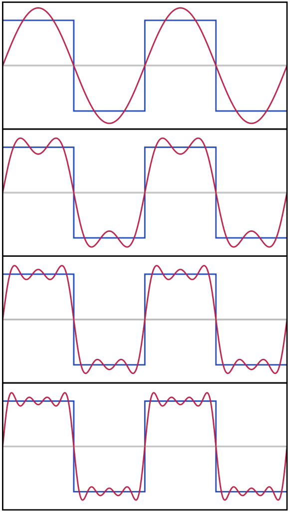
Bases infinitas

- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

Bases infinitas

- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
- Las llamadas Series de Fourier permiten representar cualquier onda como una suma infinita de funciones sinusoidales:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \, + \, b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right]$$



Bases infinitas

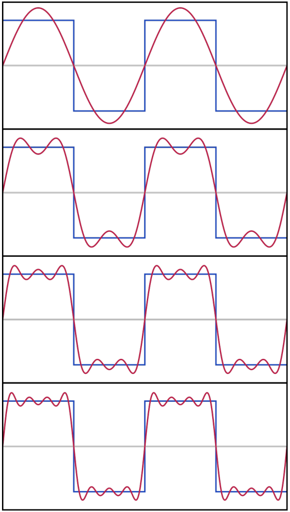
- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
- Las llamadas Series de Fourier permiten representar cualquier onda como una suma infinita de funciones sinusoidales:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \;+\; b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

- Los números $a_0, a_1, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ se llaman coeficientes de Fourier y el conjunto de funciones

$$\left\{ \cos \frac{2n\pi}{T} t : \;\; n \in \mathbb{N} \right\} \bigcup \left\{ \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t : \;\; n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base (infinita) del espacio de las ondas con energía finita.



"Otras" formas de medir distancias

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

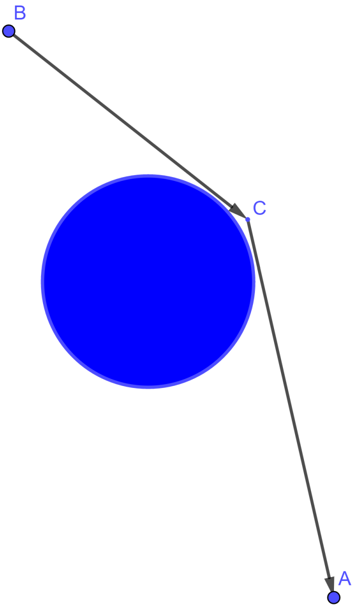
  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está, **si no hay obstáculos**.



¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está,
  si no hay obstáculos.
- ¿Qué pasa en una ciudad?
- . . . pues que no siempre podemos ir en línea recta,
- luego tenemos que medir de otra forma.

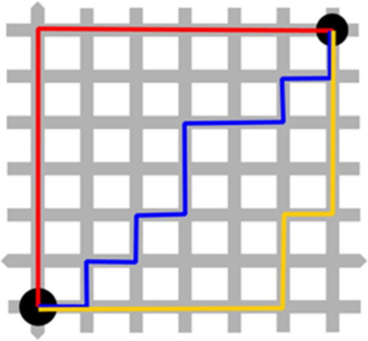
https://wikitravel.org/en/Manhattan/Theater_District

Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.

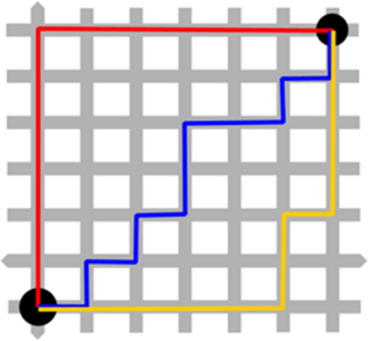


Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos amarillo, azul y rojo, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.

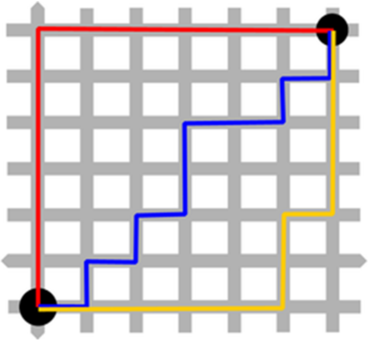


Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos amarillo, azul y rojo, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
- Esta es la distancia más práctica cuando planificamos rutas.

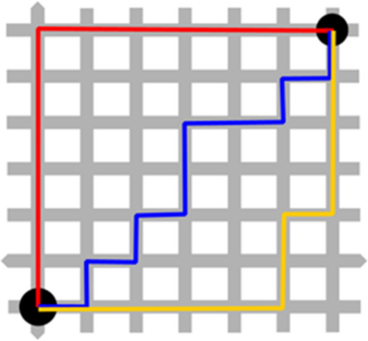


Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*
- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos amarillo, azul y rojo, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
- Esta es la distancia más práctica cuando planificamos rutas.
- Otra forma de medir es la

  distancia Chebyshev o *del máximo*.
- Consiste en tomar **el número más grande** entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.



Distancia Manhattan

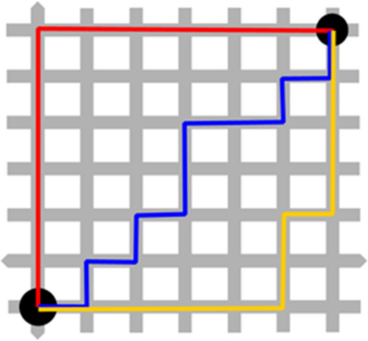
- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos amarillo, azul y rojo, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
- Esta es la distancia más práctica cuando planificamos rutas.
- Otra forma de medir es la

  distancia Chebyshev o *del máximo*.

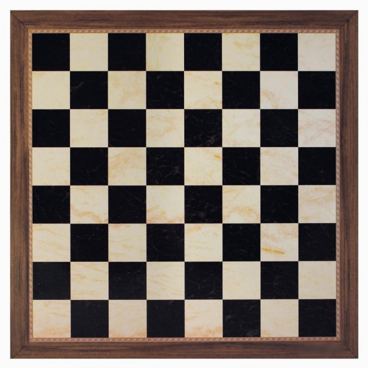
- Consiste en tomar **el número más grande** entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.
- Y esto. . . ¿de dónde viene? ¿para qué puede servir?



Una explicación: las piezas del ajedrez

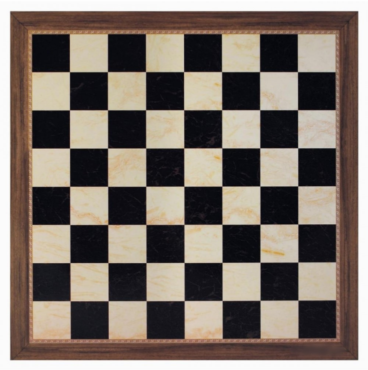
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez



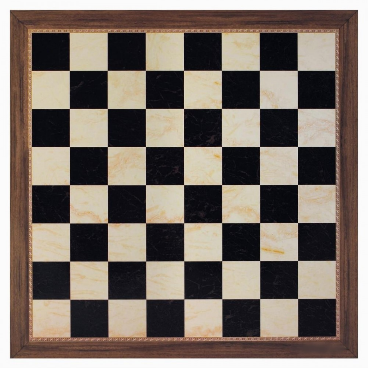
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:



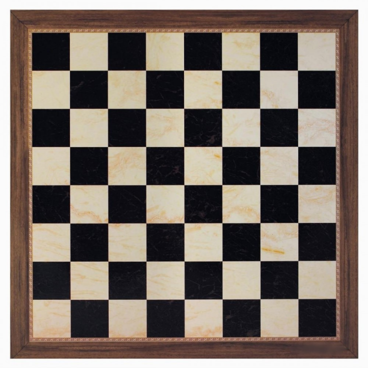
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra. . .



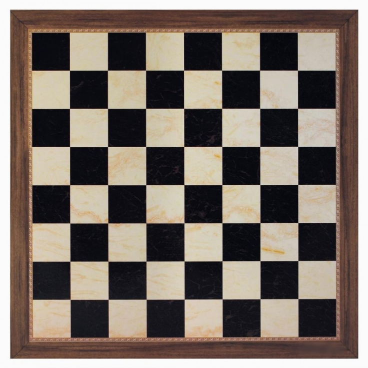
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia Manhattan.



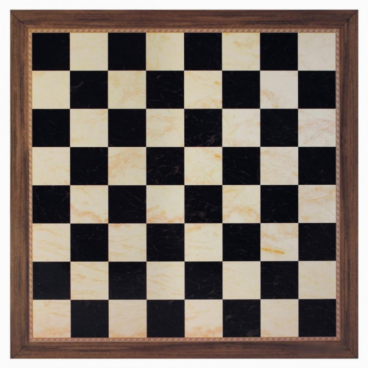
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia Manhattan.
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita el rey para llegar de una casilla a otra. . .



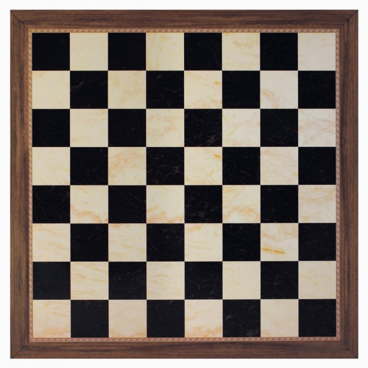
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia Manhattan.
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita el rey para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia del máximo.



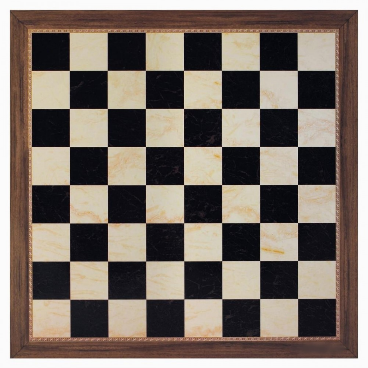
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia Manhattan.
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita el rey para llegar de una casilla a otra. . .
- aparece la distancia del máximo.
- Un par de preguntas:



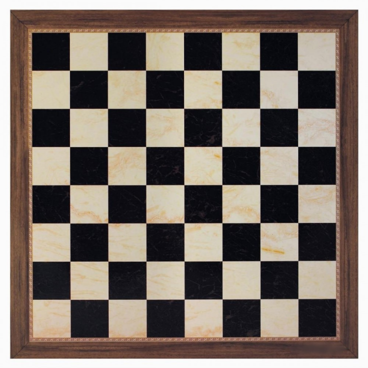
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra...
- aparece la distancia Manhattan.
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita el rey para llegar de una casilla a otra...
- aparece la distancia del máximo.
- Un par de preguntas:
- ¿Qué pasa con el alfil?



Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer una torre para llegar de una casilla a otra...
- aparece la distancia Manhattan.
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita el rey para llegar de una casilla a otra...
- aparece la distancia del máximo.
- Un par de preguntas:
- ¿Qué pasa con el alfil?
- ¿Cómo son las “circunferencias” para cada una de estas distancias?



¿Qué pasa con el caballo?

¿Qué pasa con el caballo?

- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,

¿Qué pasa con el caballo?

- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,
- pero se puede estudiar la cantidad de movimientos que necesita el caballo en llegar de una casilla a otra.

¿Qué pasa con el caballo?

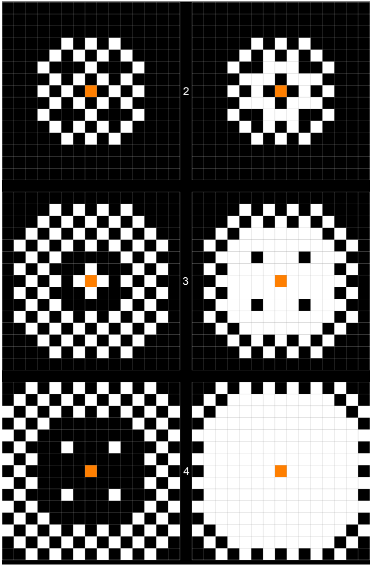
- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,
- pero se puede estudiar la cantidad de movimientos que necesita el caballo en llegar de una casilla a otra.
- Las "circunferencias" asociadas dependen mucho de si estamos en una equina o no.

2	3	4	1	2	1	4	3
3	2	1	2	3	2	1	2
2	3	2	3	♘	3	2	3
3	2	1	2	3	2	1	2
2	3	4	1	2	1	4	3
3	2	3	2	3	2	3	2
4	3	2	3	2	3	2	3
3	4	3	4	3	4	3	4

5	4	3	2	3	2	3	♘
4	3	4	3	2	1	4	3
5	4	3	2	3	4	1	2
4	3	4	3	2	3	2	3
5	4	3	4	3	2	3	2
4	5	4	3	4	3	4	3
5	4	5	4	3	4	3	4
6	5	4	5	4	5	4	5

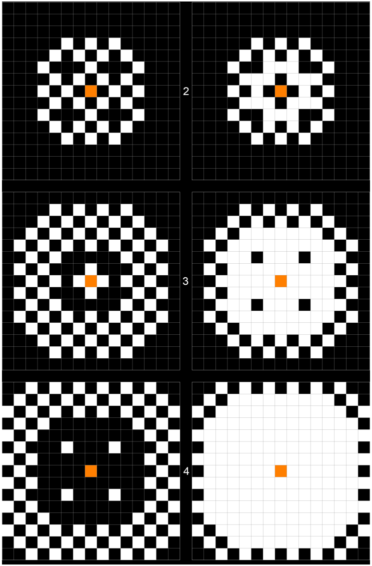
¿Qué pasa con el caballo?

- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,
- pero se puede estudiar la cantidad de movimientos que necesita el caballo en llegar de una casilla a otra.
- Las "circunferencias" asociadas dependen mucho de si estamos en una equina o no.
- Los siguientes gráficos muestran las "circunferencias" y los "círculos" para esta distancia:



¿Qué pasa con el caballo?

- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,
- pero se puede estudiar la cantidad de movimientos que necesita el caballo en llegar de una casilla a otra.
- Las “circunferencias” asociadas dependen mucho de si estamos en una equina o no.
- Los siguientes gráficos muestran las “circunferencias” y los “círculos” para esta distancia:
- En mi opinión, son bastante anti-intuitivas.



¿Qué pasa con el caballo?

- El movimiento del caballo es más difícil de controlar,
- pero se puede estudiar la cantidad de movimientos que necesita el caballo en llegar de una casilla a otra.
- Las "circunferencias" asociadas dependen mucho de si estamos en una equina o no.
- Los siguientes gráficos muestran las "circunferencias" y los "círculos" para esta distancia:
- En mi opinión, son bastante anti-intuitivas.
- Se hace investigación **"seria"** basada en este tema

Mediterr. J. Math. 11 (2014), 217–235
DOI 10.1007/s00009-013-0360-3
0378-620X/14/020217-19
published online November 10, 2013

Mediterranean Journal of Mathematics

The Jumping Knight and Other (Super) Edge-Magic Constructions

S. C. López, F. A. Muntaner-Batle and M. Rius-Font

Abstract. Let G be a graph of order p and size q with loops allowed. A bijective function $f : V(G) \cup E(G) \to \{i\}_{i=1}^{p+q}$ is an edge-magic labeling of G if the sum $f(u) + f(uv) + f(v) = k$ is independent of the choice of the edge uv. The constant k is called either the valence, the magic weight or the magic sum of the labeling f. If a graph admits an edge-magic labeling, then it is called an edge-magic graph. Furthermore, if the function f meets the extra condition that $f(V(G)) = \{i\}_{i=1}^{p}$ then f is called a super edge-magic labeling and G is called a super edge-magic graph. A digraph D admits a labeling, namely l, if its underlying graph, und(D) admits l. In this paper, we introduce a new construction of super edge-magic labelings which are related to the classical jump of the knight on the chess game. We also use super edge-magic labelings of digraphs together with a generalization of the Kronecker product to get edge-magic labelings of some families of graphs.

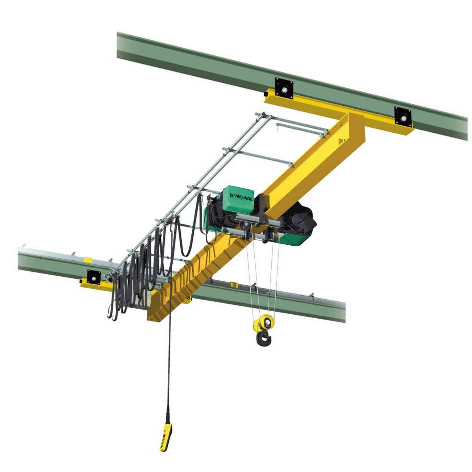
Mathematics Subject Classification (2010). Primary 05C78.

Keywords. (Super) edge-magic, Jacobsthal sequence, dual shuffle prime, $\otimes_h$-product.

Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

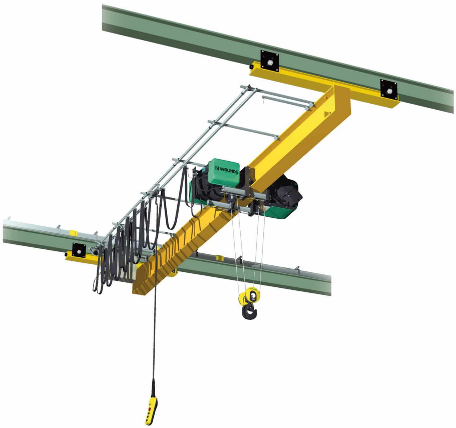
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .



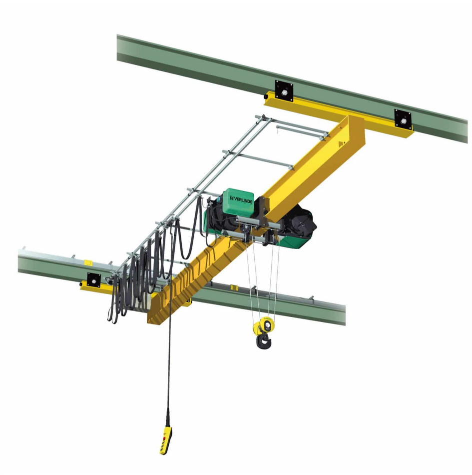
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez**.



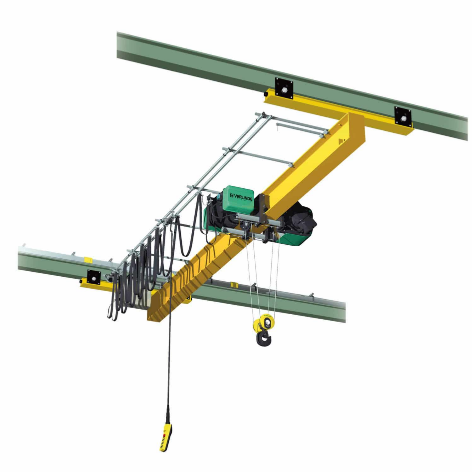
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez**.
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la distancia del máximo.



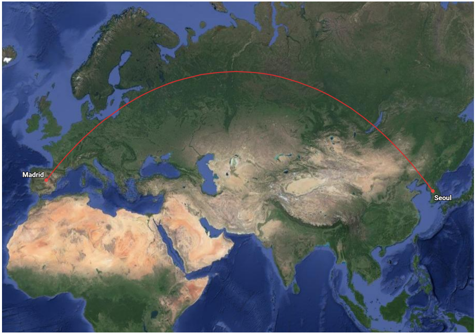
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez**.
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la distancia del máximo.
- Si medimos el gasto de energía (producido por el movimiento de los dos motores), aparece la distancia Manhattan.



Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

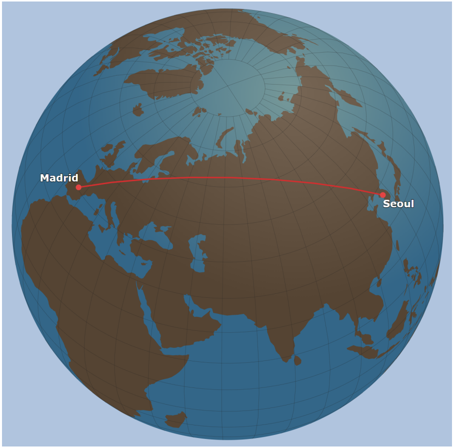
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

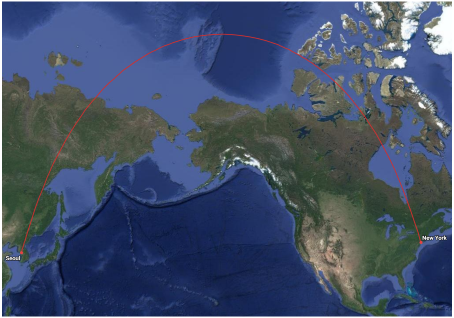
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.

https://www.greatcirclemap.com/

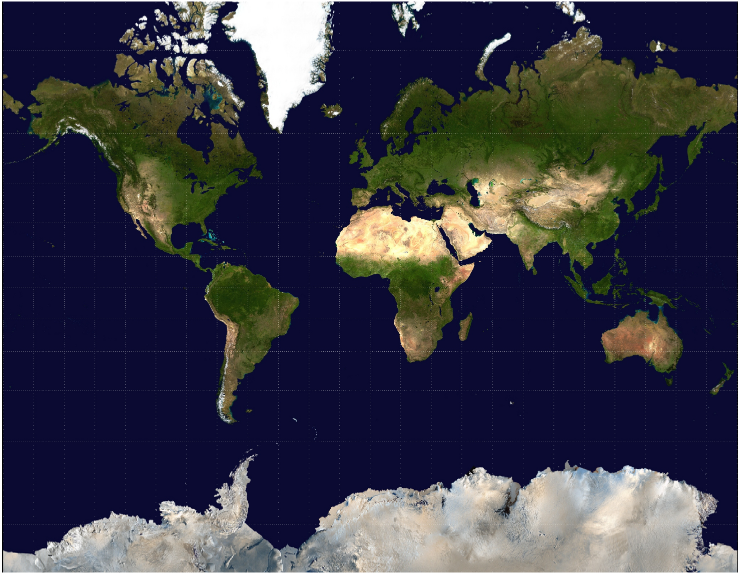
Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.
- las curvas que hacen mínima la distancia en la esfera son los círculos máximos, que se llaman geodésicas.
- "Casi siempre" son únicas.

https://www.greatcirclemap.com/

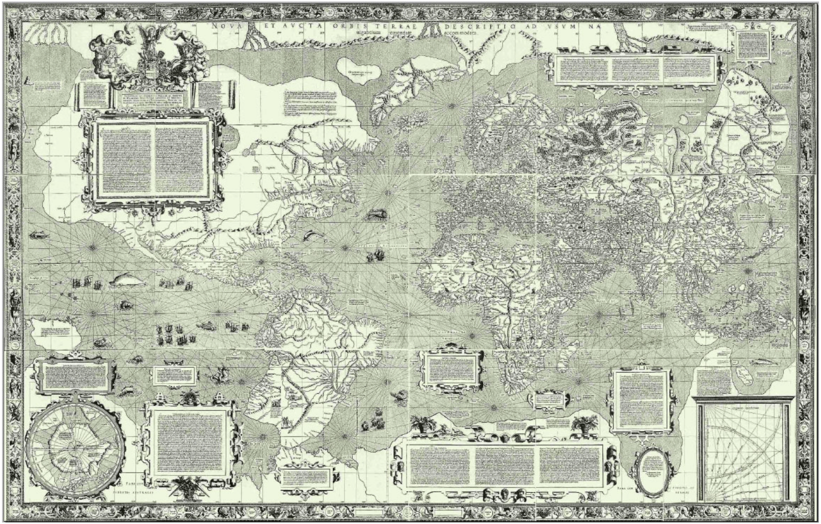
Pero entonces ¿para qué sirven los mapas?

Pero entonces ¿para qué sirven los mapas?



https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_projection

Pero entonces ¿para qué sirven los mapas?

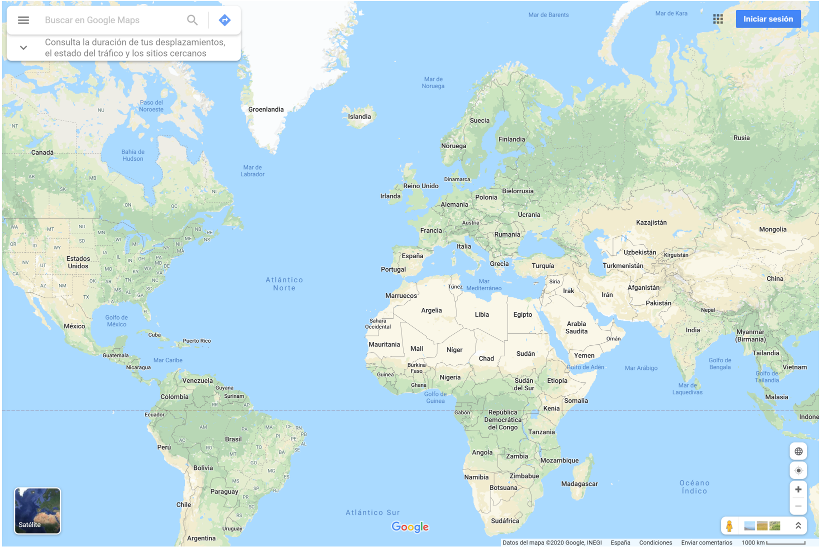


https://en.wikipedia.org/wiki/Mercator_projection

Pero entonces ¿para qué sirven los mapas?

http://www.bl.uk/onlinegallery/ttp/mercator/accessible/pages3and4.html

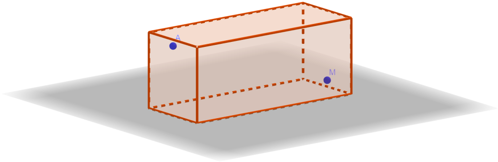
Pero entonces ¿para qué sirven los mapas?



https://www.google.es/maps

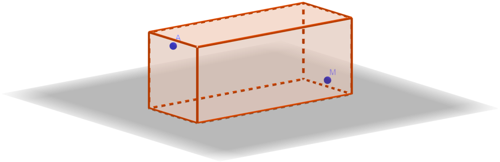
Un último problema sobre distancias

- Una araña intenta llegar a una mosca atrapada en su telaraña, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.



Un último problema sobre distancias

- Una araña intenta llegar a una mosca atrapada en su telaraña, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?



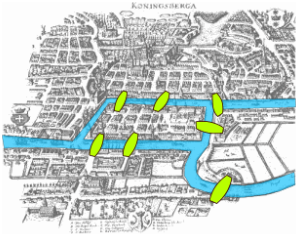
Topología: cuando la forma no importa

Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.

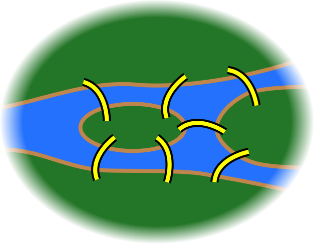


Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.

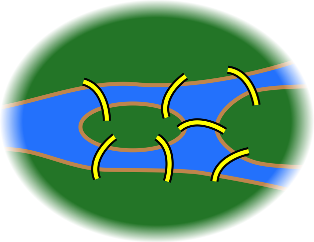


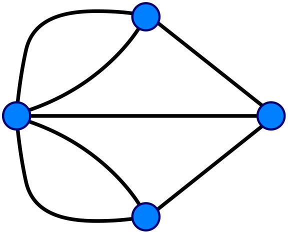
Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.
- Su primera observación fue que el problema no depende en absoluto de la forma de las islas o del río o de la tierra, que puede simplificarse a nodos y arcos.
- Queda entonces el siguiente gráfico:

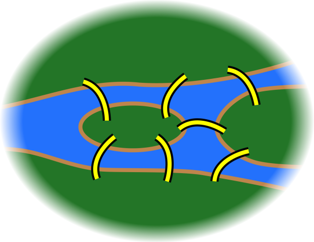




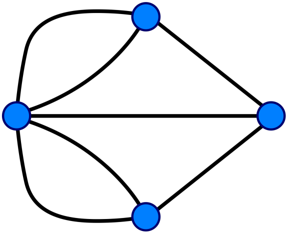
Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?



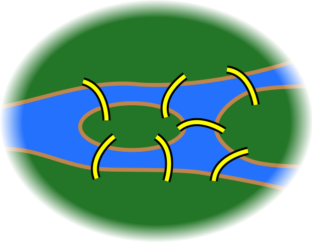
- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.
- Su primera observación fue que el problema no depende en absoluto de la forma de las islas o del río o de la tierra, que puede simplificarse a nodos y arcos.
- Queda entonces el siguiente gráfico:
- Y la pregunta es si se puede recorrer este "grafo" pasando por todas las aristas o "arcos" una sola vez (y, por tanto, pasando por todos los vértices o "nodos", aunque necesariamente más de una vez por cada uno, eso no importa).

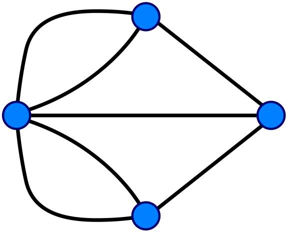


Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) **(Euler, 1736)**

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.



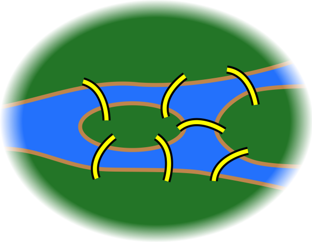


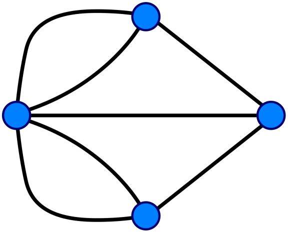
Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):





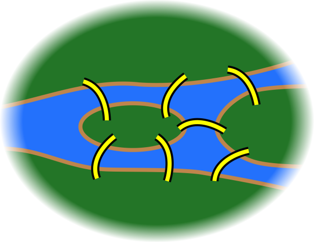
Euler y los puentes de Königsberg. II

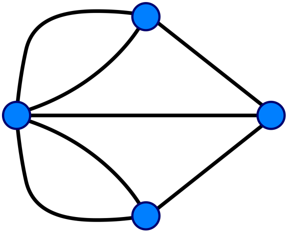
Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):

- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso **NO pasa** en los puentes de Königsberg.

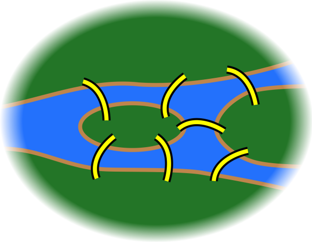




Euler y los puentes de Königsberg. II

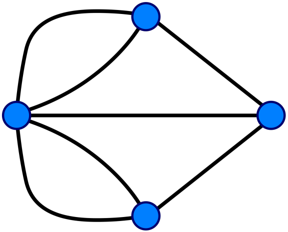
Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.



Explicación (Demostración):

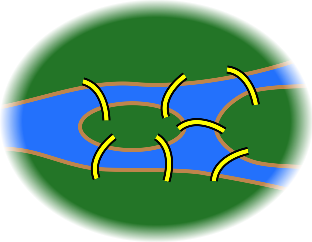
- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso **NO pasa** en los puentes de Königsberg.



Euler y los puentes de Königsberg. II

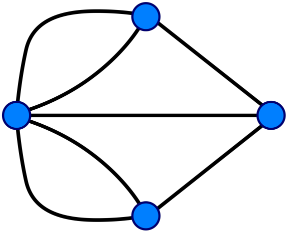
Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.



Explicación (Demostración):

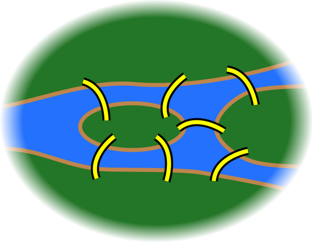
- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso **NO pasa** en los puentes de Königsberg.



Euler y los puentes de Königsberg. II

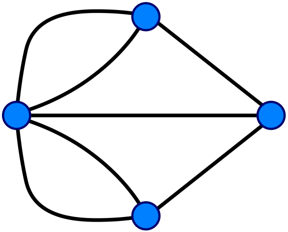
Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.



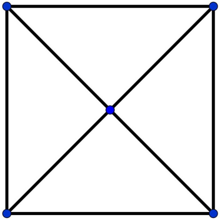
Explicación (Demostración):

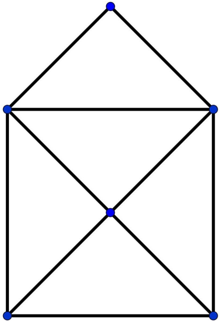
- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso **NO pasa** en los puentes de Königsberg.



Dibujando caminos

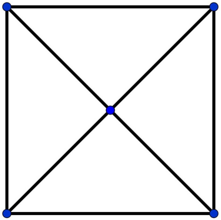
- Se trata de ver cuándo podemos recorrer completamente un grafo pasando por cada arista una sola vez,
- esto es, "dibujando" sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?

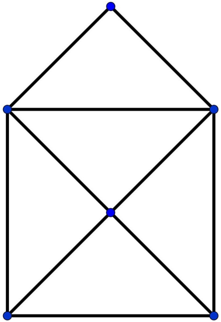




Dibujando caminos

- Se trata de ver cuándo podemos recorrer completamente un grafo pasando por cada arista una sola vez,
- esto es, "dibujando" sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?





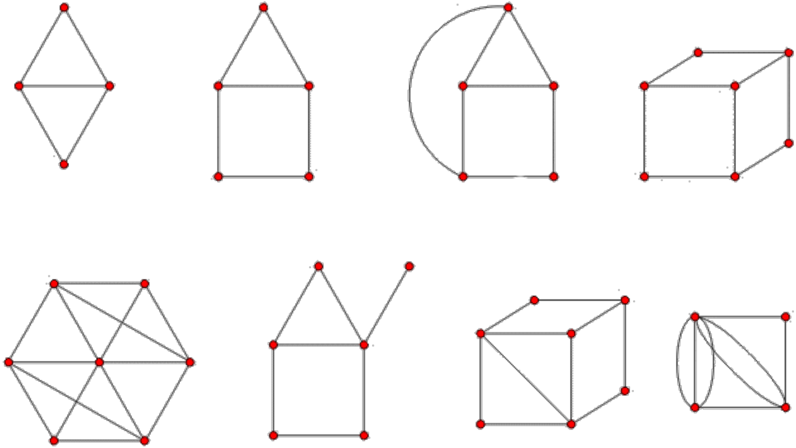
Criterio general

Puede hacerse cuando

- o bien a todos los nodos llegan un número par de aristas,
- o bien a dos nodos llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.

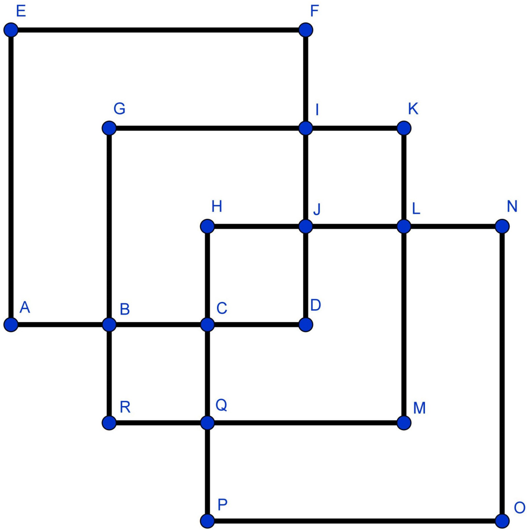
- En el primer caso podemos empezar donde queramos y acabaremos en el mismo sitio,
- En el segundo caso tenemos que empezar en un nodo al que lleguen un número impar de aristas y terminar en el otro.

Dibujando caminos: unos ejemplos



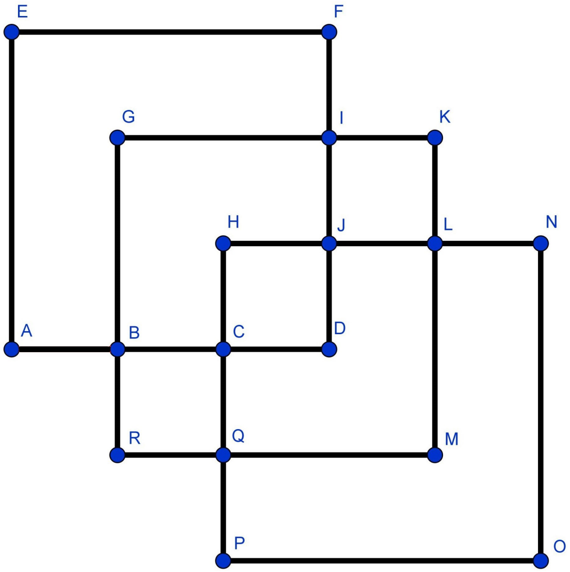
http://sofia.nmsu.edu/˜ pmorandi/CourseMaterials/WalkingSpiders.html

Dibujando caminos: unos ejemplos



https://elpais.com/elpais/2017/02/15/el_aleph/1487155663_012915.html

Dibujando caminos: el ejemplo resuelto

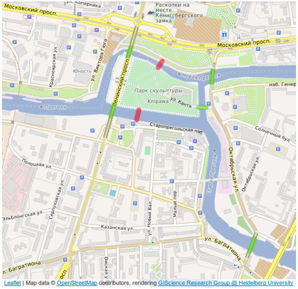


Euler y los puentes de Königsberg. III

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

Euler y los puentes de Königsberg. III

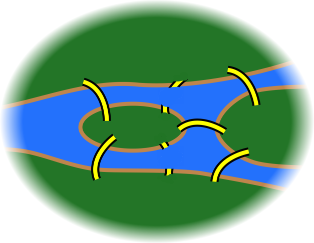


Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Königsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.

Euler y los puentes de Königsberg. III



Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

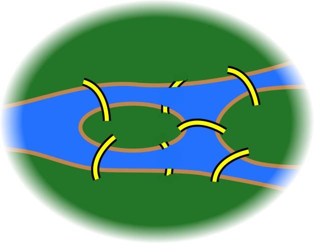
- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Königsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.
- Veámoslo de forma más esquemática...

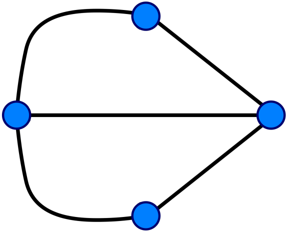
Euler y los puentes de Königsberg. III

Problema

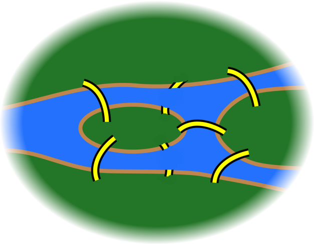
¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Königsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.
- Veámoslo de forma más esquemática...
- ...y en forma de grafo.





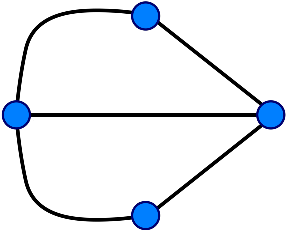
Euler y los puentes de Königsberg. III



Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Königsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.
- Veámoslo de forma más esquemática...
- ...y en forma de grafo.
- ¿Qué ocurre ahora?
  ¿Se pueden recorrer o no?



Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la "geometría", la forma de medir distancias) es relevante.

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la "geometría", la forma de medir distancias) es relevante.
- Esto es el comienzo de la topología, que Euler llamó geometría de la posición.

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la "geometría", la forma de medir distancias) es relevante.

- Esto es el comienzo de la topología, que Euler llamó geometría de la posición.

- La topología estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que no dependen de la forma concreta, si no que se conservan si doblamos, estiramos, encogemos, retorcemos. . . siempre que no rompamos ni separemos el objeto.

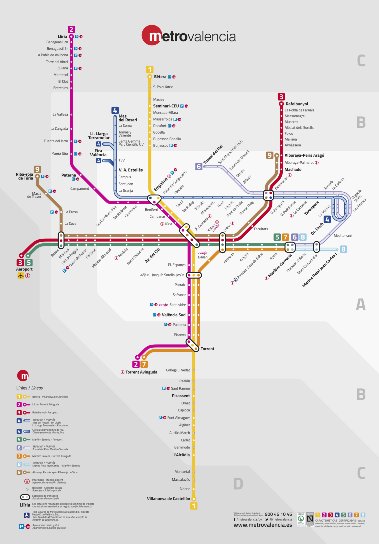
Topología en nuestro día a día

- La idea de que ciertos problemas o cierta información no dependen de la forma concreta de los objetos la usamos constantemente. . .

Topología en nuestro día a día

- La idea de que ciertos problemas o cierta información no dependen de la forma concreta de los objetos la usamos constantemente. . .
- ¿Dónde? ¿Cuándo? ¿Cómo?

Topología en nuestro día a día. II

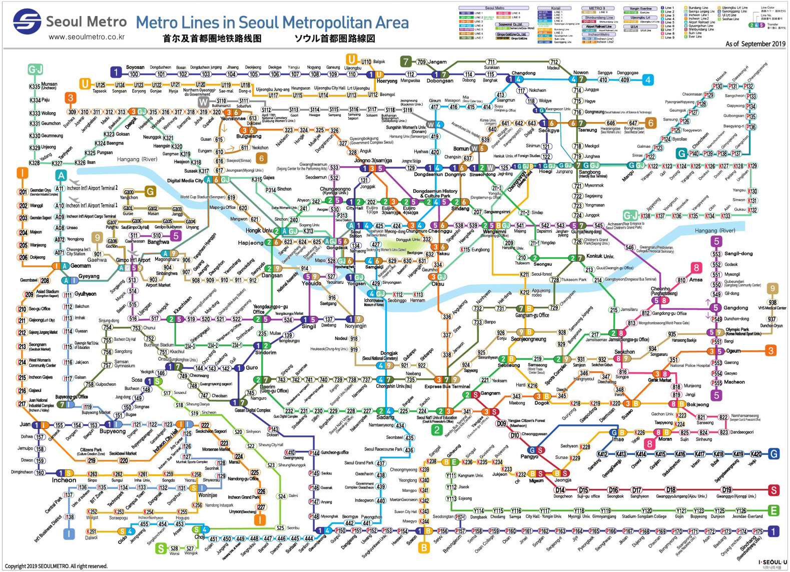


https://www.redtransporte.com/valencia/metro-valencia/plano.html

Topología en nuestro día a día. II

https://www.redtransporte.com/valencia/metro-valencia/plano.html

Topología en nuestro día a día. II



https://english.visitkorea.or.kr/enu/TRP/TP_ENG_6.jsp

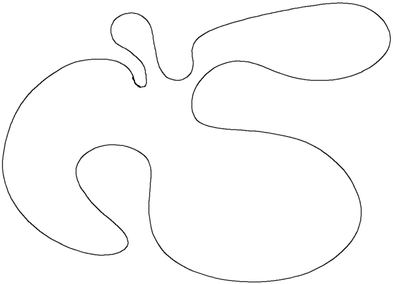
Topología en nuestro día a día. II

https://ecomovilidad.net/granada/plano-metro-de-granada/

El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

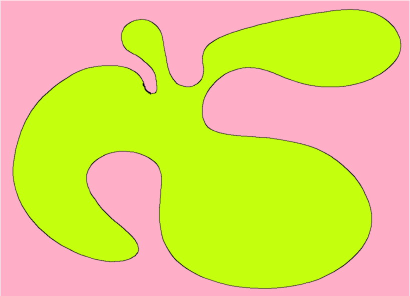
Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel,



El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

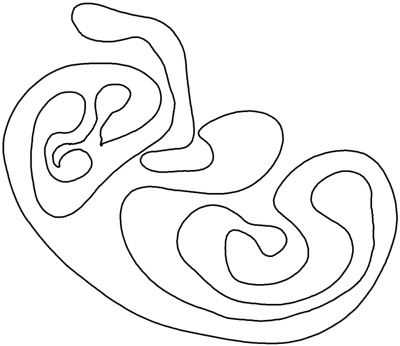


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...

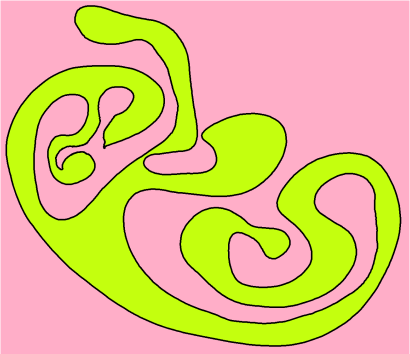


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...

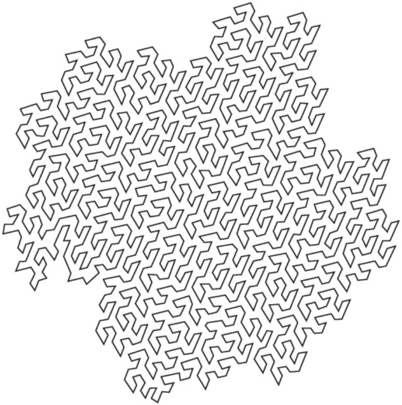


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira...

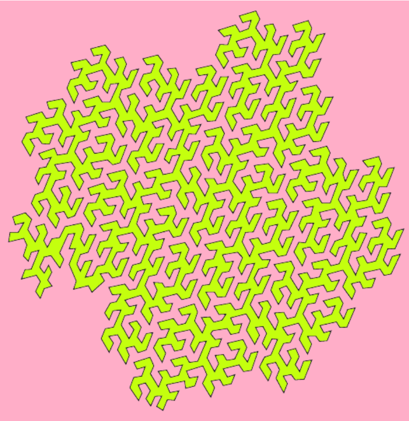


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no



El Teorema de la curva de Jordan

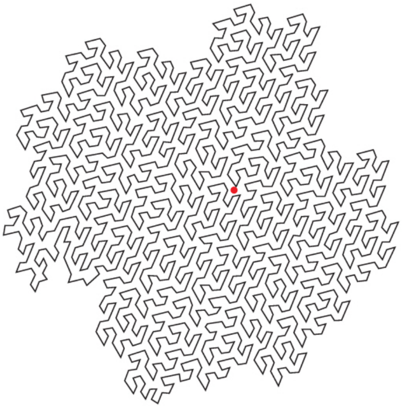
Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no

Pregunta

¿Cómo se puede saber si un punto está dentro o está fuera?



El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

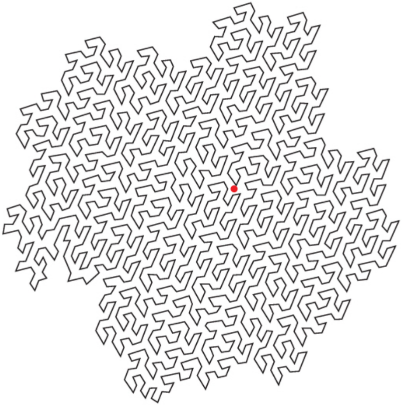
Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no

Pregunta

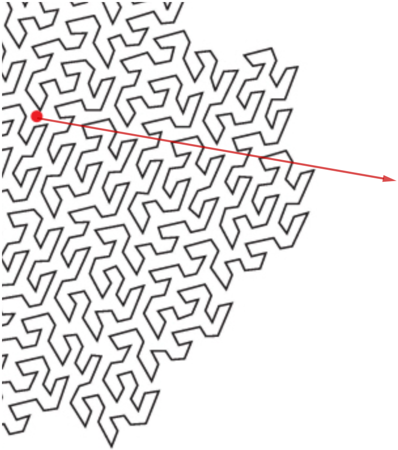
¿Cómo se puede saber si un punto está dentro o está fuera?

- **¡Contando!**



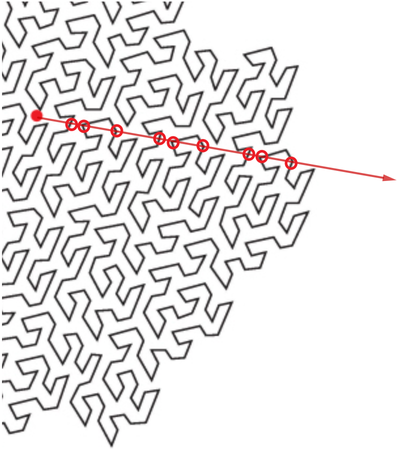
El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva



El Teorema de la curva de Jordan. II

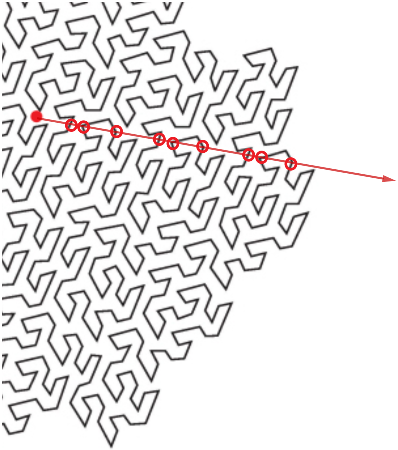
Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva

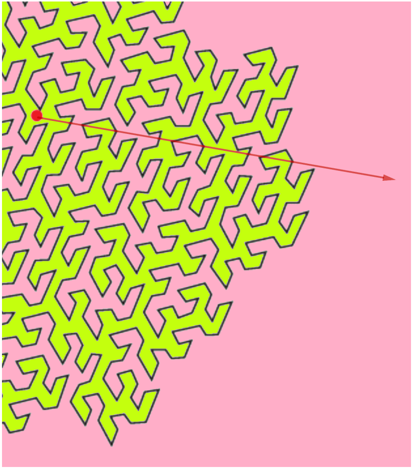


Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva





Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

Un sitio en el que se mezcla todo

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:

https://www.google.es/maps

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,

https://www.google.es/maps

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.

https://www.google.es/maps

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.

https://www.google.es/maps

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.
- ¡Pero esto no se hace por fuerza bruta!
- Se usan algoritmos de búsqueda del camino más corto.

https://www.google.es/maps

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.
- ¡Pero esto no se hace por fuerza bruta!
- Se usan algoritmos de búsqueda del camino más corto.
- ¡Hay muuuuuuucha matemática detrás!

https://www.google.es/maps

Para saber más

Para saber más. . .

Gaussianos
http://gaussianos.com/

Tocamates *matemáticas y creatividad*
http://www.tocamates.com/

Hans Enzensberger
El diablo de los números
Ediciones Siruela, 1998

Santi García Cremades
Un número perfecto
Anaya Multimedia, 2017

José Ángel Murcia
Y me llevo una
Nórdica, 2019

Adrián Paenza
Matemática. . . ¿Estás ahí?
Siglo veintiuno editores, 2005
Muchos libros gratis en http://cms.dm.uba.ar/material/paenza/