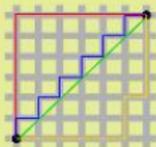


¿Es la línea recta el camino más corto entre dos puntos?



Imparte: **Miguel Martín Suárez**

Profesor del Departamento de Análisis Matemático
Facultad de Ciencias. Universidad de Granada.



UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Vicerrectorado de Investigación y
Transferencia

Miércoles **3 de Agosto**, 2022
21:30 Parque del Majuelo
Almuñécar



GOBIERNO
DE ESPAÑA

MINISTERIO
DE CIENCIA
E INNOVACIÓN

FECYT

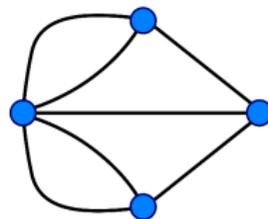
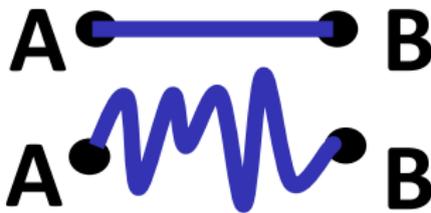


FUNDACIÓN ESPAÑOLA
PARA LA CIENCIA
Y LA TECNOLOGÍA

cultur **ALMUÑÉCAR**



Centro de Estudios y Promoción AVULNIA ALMUÑÉCAR



Organización de la conferencia

- 1 Preliminares
- 2 Formas de medir distancias
- 3 Cuando la forma no importa
- 4 Mezclando todo
- 5 Colofón

Las fotos y gráficos usados en este taller están sacadas de fuentes libres como:

- Wikipedia: <https://www.wikipedia.org/>
- MacTutor history of Mathematics: <https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/>
- Gráficos sencillos creados por el autor de la conferencia. . .

En otros casos, se incluirá referencia explícita a la fuente.

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*
- Mi campo de estudio es el
 Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*
- Mi campo de estudio es el
 Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- Ya vimos aquí hace un par de años lo de la dimensión infinita...

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*
- Mi campo de estudio es el
 Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- **Ya vimos aquí hace un par de años lo de la dimensión infinita...**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*
- Mi campo de estudio es el
 Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- **Ya vimos aquí hace un par de años lo de la dimensión infinita...**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Se darán ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones.**

Presentación y esquema

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático de *Análisis Matemático* de la *Universidad de Granada*
- Miembro del *Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada*
- Mi campo de estudio es el
 Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita y también las propiedades que no dependen de la distancia concreta.
- **Ya vimos aquí hace un par de años lo de la dimensión infinita...**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Se darán ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones.**
- **Finalmente hablaremos de cuándo la forma o la distancia concreta no es importante, esto es, hablaremos de “topología” o “geometría de la posición”.**

“Otras” formas de medir distancias

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

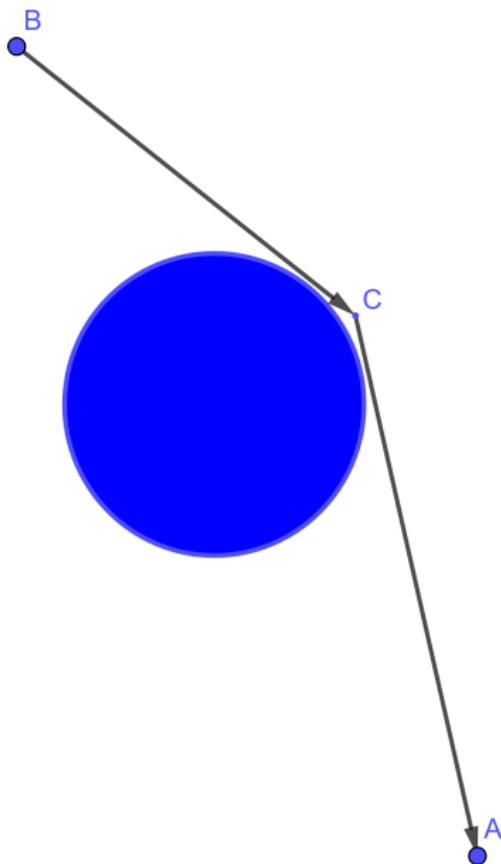
- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, sólo hay un camino con distancia mínima.



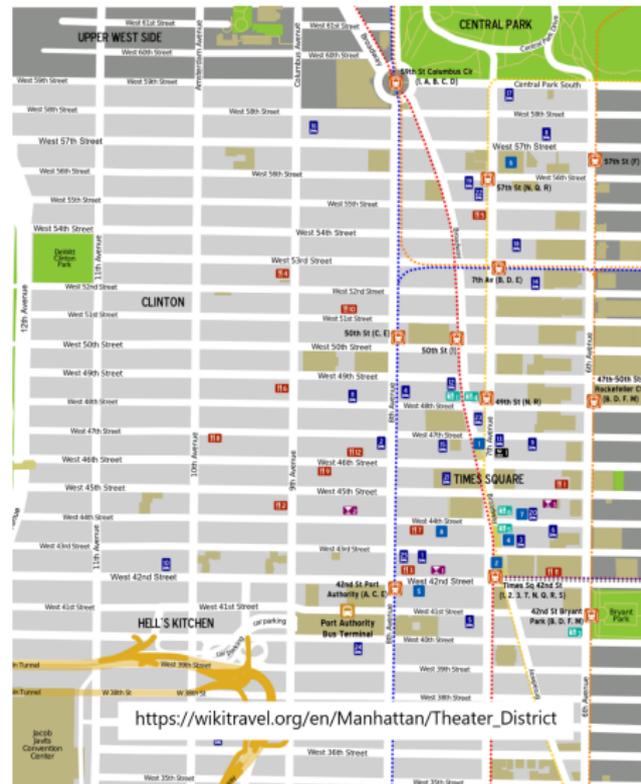
¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:
la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, sólo hay un camino con distancia mínima.
- Eso, claro está, **si no hay obstáculos.**



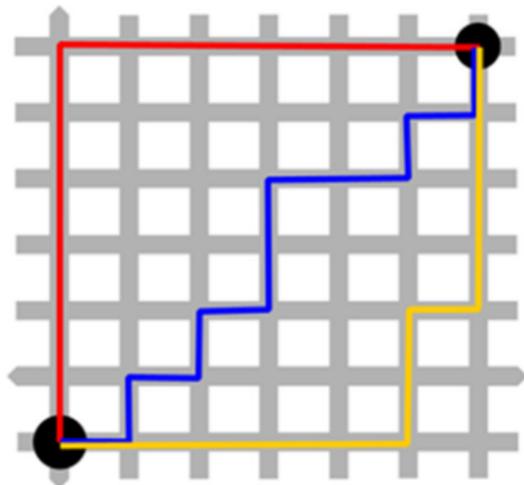
¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:
la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, sólo hay un camino con distancia mínima.
- Eso, claro está, si no hay obstáculos.
- ¿Qué pasa en una ciudad?
- . . . pues que no siempre podemos ir en línea recta,
- luego tenemos que medir de otra forma.



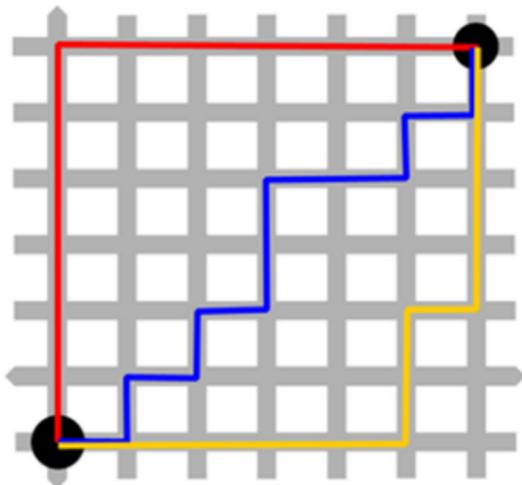
Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada *distancia Manhattan* o *distancia taxi*
- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.



Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada *distancia Manhattan* o *distancia taxi*
 - consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos **amarillo**, **azul** y **rojo**, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.

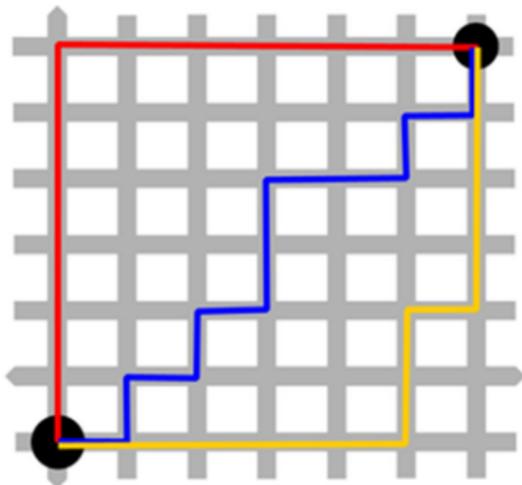


Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos **amarillo**, **azul** y **rojo**, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
- Esta es la distancia más **práctica** cuando planificamos rutas.

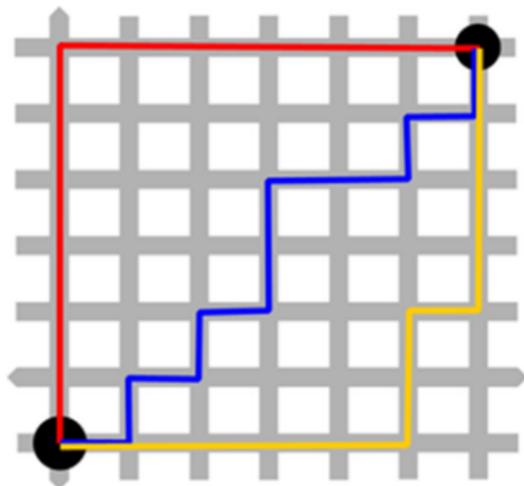


Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
 - Aunque no lo parezca, los caminos **amarillo**, **azul** y **rojo**, MIDEN LO MISMO.
 - CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
 - Esta es la distancia más **práctica** cuando planificamos rutas.
 - Otra forma de medir es la
- distancia Chebyshev* o *del máximo*.
- Consiste en tomar **el número más grande** entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.



Distancia Manhattan

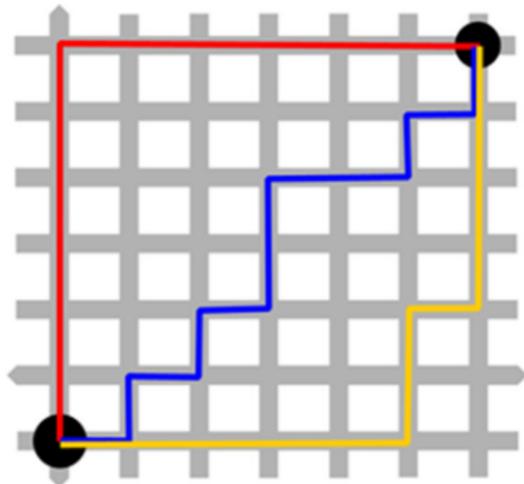
- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Aunque no lo parezca, los caminos **amarillo**, **azul** y **rojo**, MIDEN LO MISMO.
- CUALQUIER CAMINO mide lo mismo.
- Esta es la distancia más **práctica** cuando planificamos rutas.
- Otra forma de medir es la

distancia Chebyshev o *del máximo*.

- Consiste en tomar **el número más grande** entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.
- Y esto... ¿de dónde viene? ¿para qué puede servir?



Una explicación: las piezas del ajedrez

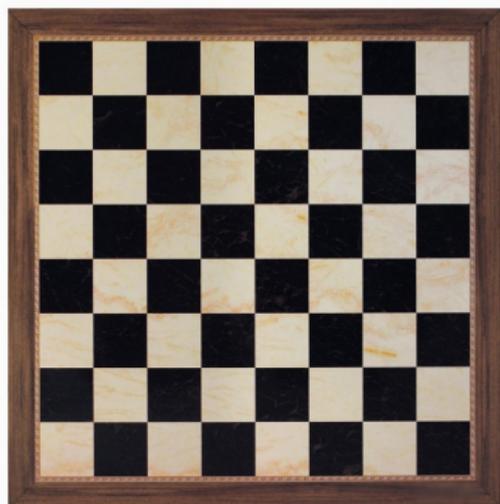
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez



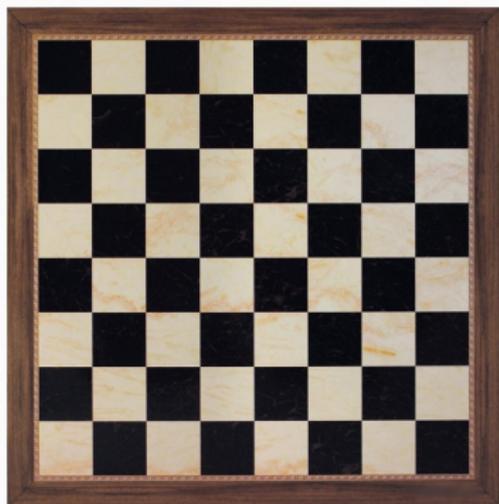
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:



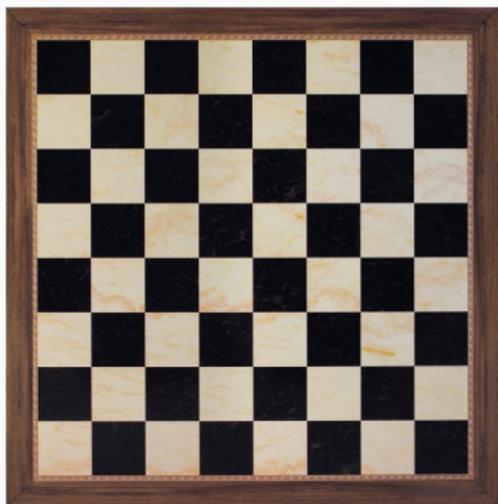
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...



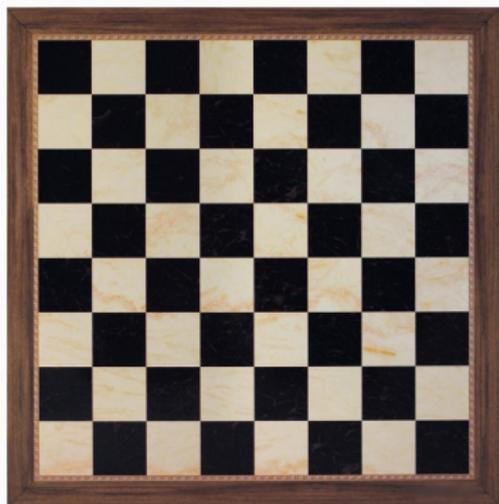
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**



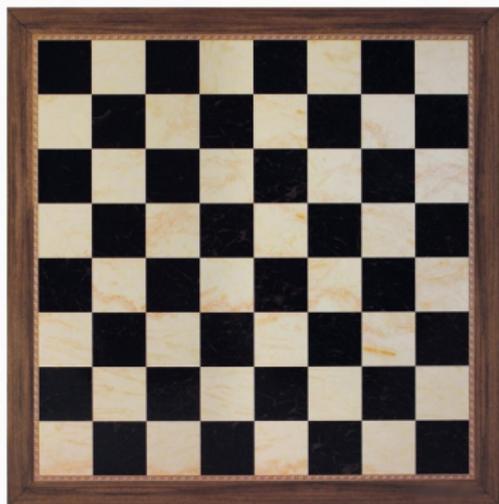
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos un tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita **el rey** para llegar de una casilla a otra...



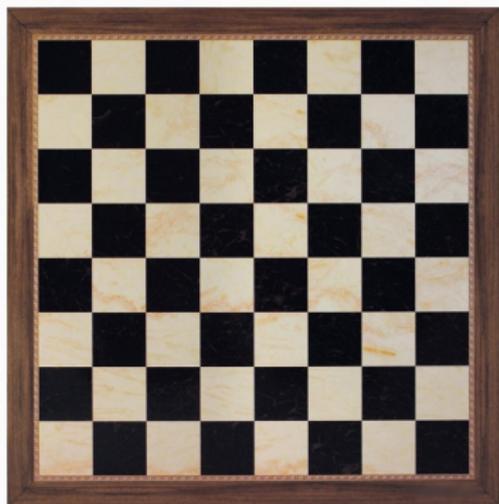
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos un tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita **el rey** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia del máximo.**



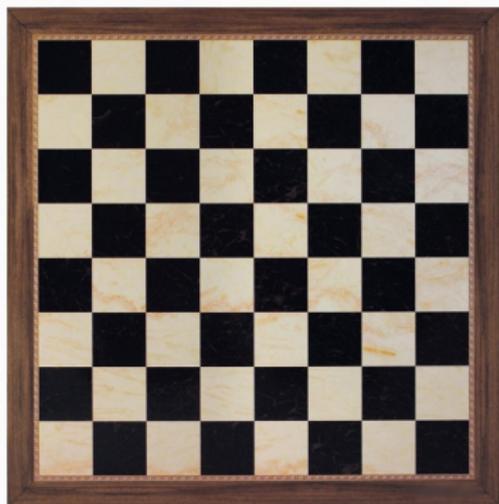
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita **el rey** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia del máximo.**
- Un par de preguntas:



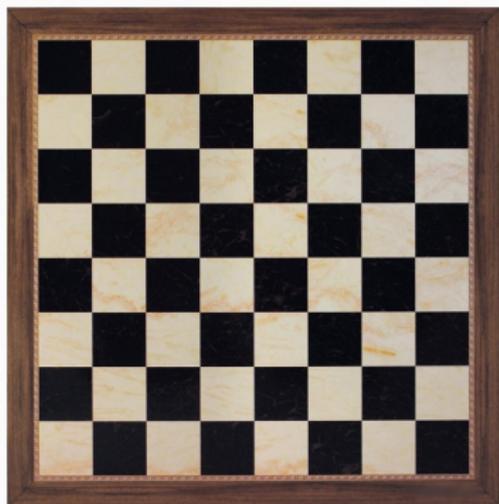
Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos una tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita **el rey** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia del máximo.**
- Un par de preguntas:
- ¿Qué pasa con el alfil?



Una explicación: las piezas del ajedrez

- Consideremos un tablero de ajedrez
- y veamos los distintos movimientos de las piezas:
- si medimos cuántas casillas tiene que recorrer **una torre** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia Manhattan.**
- si medimos cuántos movimientos (o cuántas casillas) necesita **el rey** para llegar de una casilla a otra...
- **aparece la distancia del máximo.**
- Un par de preguntas:
- ¿Qué pasa con el alfil?
- ¿Cómo son las “circunferencias” para cada una de estas distancias?



Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .



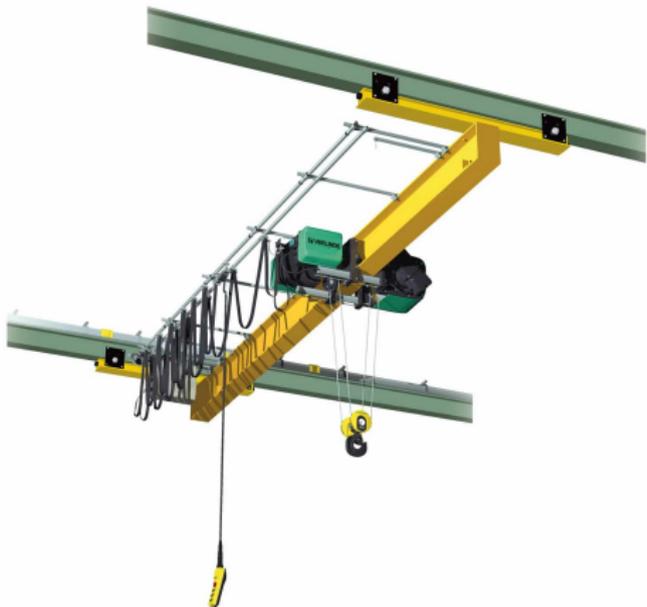
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez.**



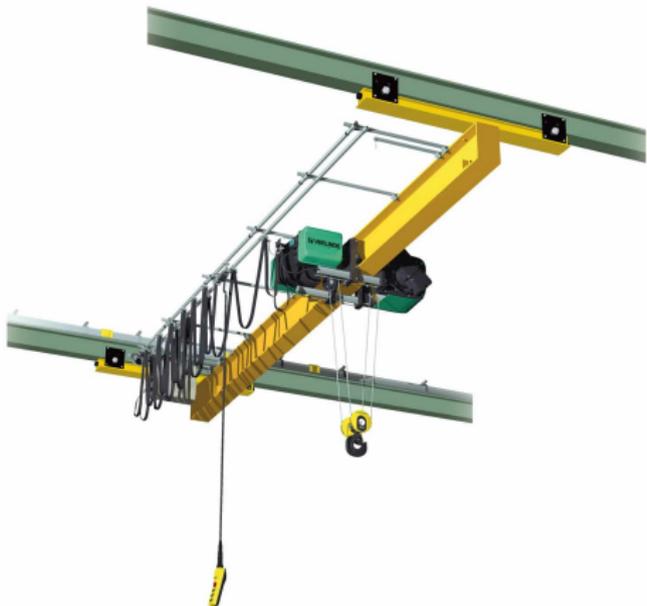
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez.**
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la **distancia del máximo.**



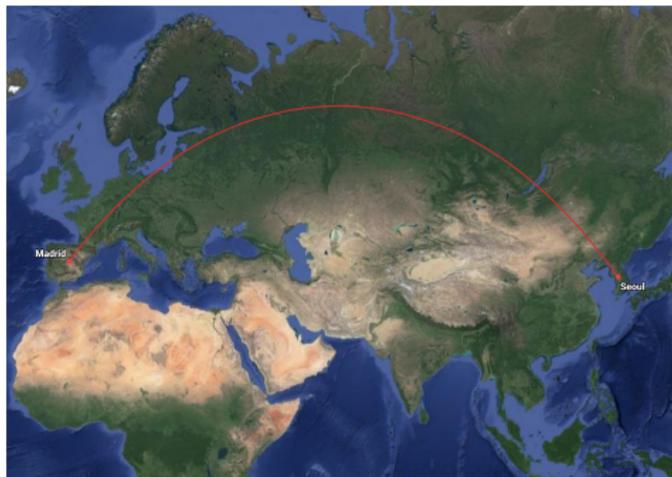
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, **que pueden darse a la vez.**
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la **distancia del máximo.**
- Si medimos el gasto de energía (producido por el movimiento de los dos motores), aparece la **distancia Manhattan.**



Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?



<https://www.greatcirclemap.com/>

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

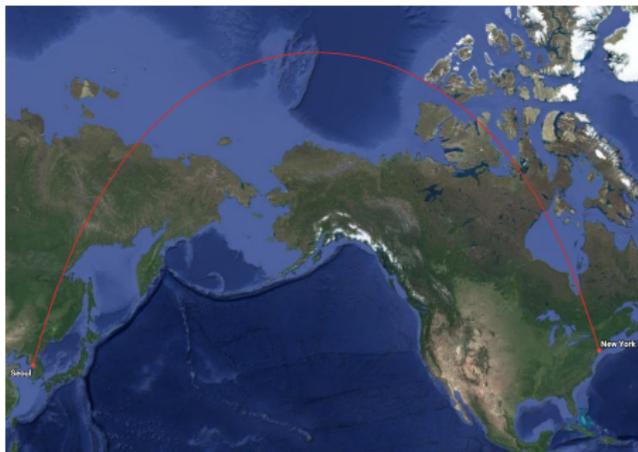
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.



<https://www.greatcirclemap.com/>

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: **plano**



<https://www.greatcirclemap.com/>

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: **plano** y **esfera**.



<https://www.greatcirclemap.com/>

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

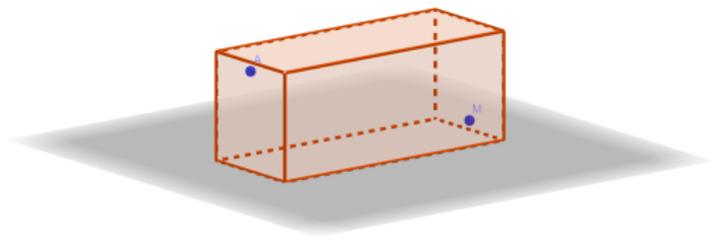
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: **plano** y **esfera**.
- las curvas que hacen mínima la distancia en la esfera son los círculos máximos, que se llaman **geodésicas**.
- “Casi siempre” son únicas.



<https://www.greatcirclemap.com/>

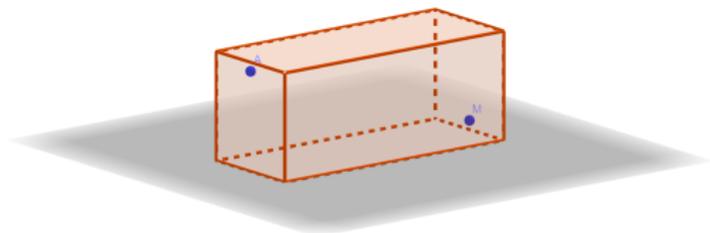
Un último problema sobre distancias

- Una **araña** intenta llegar a una **mosca** atrapada en su telaraña, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.



Un último problema sobre distancias

- Una **araña** intenta llegar a una **mosca** atrapada en su telaraña, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?



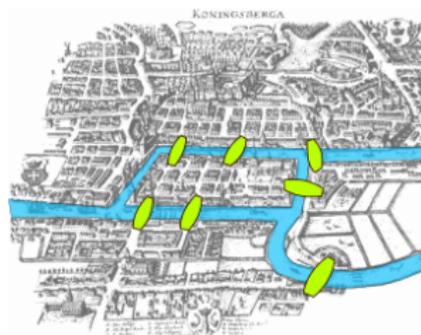
Topología: cuando la forma no importa

Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.

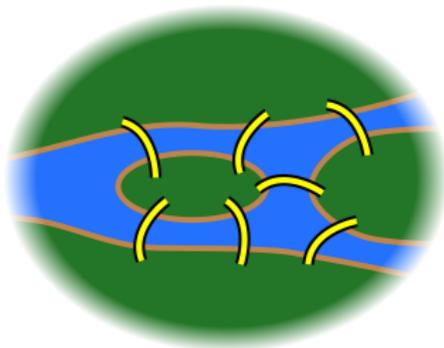


Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.

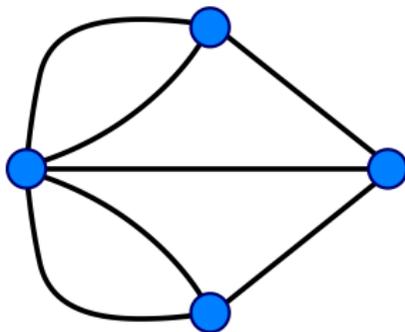
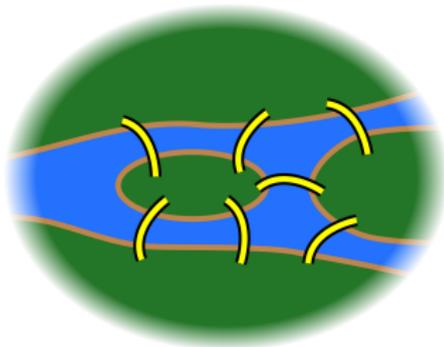


Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.
- Su primera observación fue que el problema no depende en absoluto de la forma de las islas o del río o de la tierra, que puede simplificarse a **nodos** y **arcos**.
- Queda entonces el siguiente gráfico:

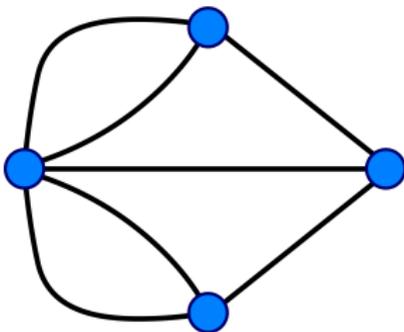
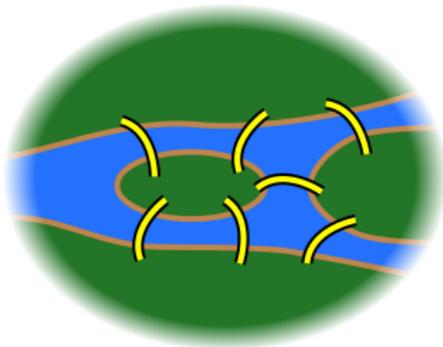


Euler y los puentes de Königsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente?

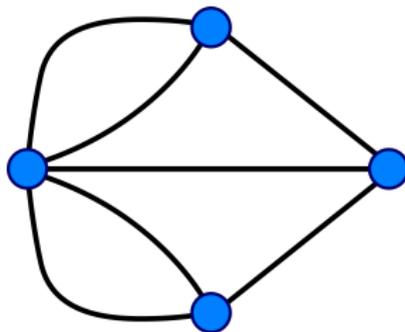
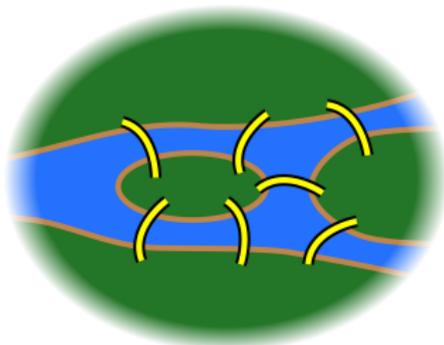
- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.
- Su primera observación fue que el problema no depende en absoluto de la forma de las islas o del río o de la tierra, que puede simplificarse a **nodos** y **arcos**.
- Queda entonces el siguiente gráfico:
- Y la pregunta es si se puede recorrer este "grafo" pasando por todas las aristas o "arcos" una sola vez (y, por tanto, pasando por todos los vértices o "nodos", aunque necesariamente más de una vez por cada uno, eso no importa).



Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

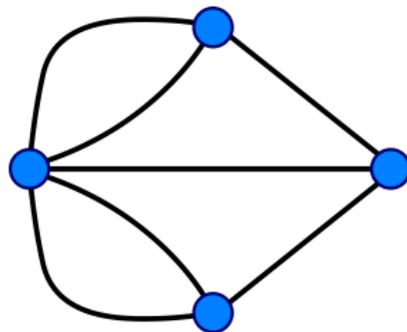
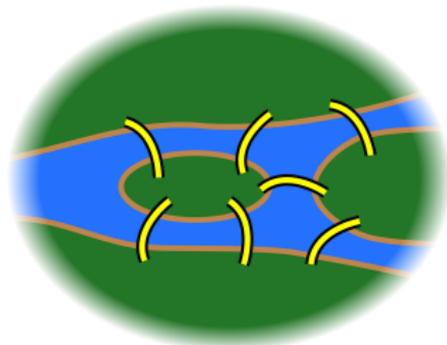


Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):



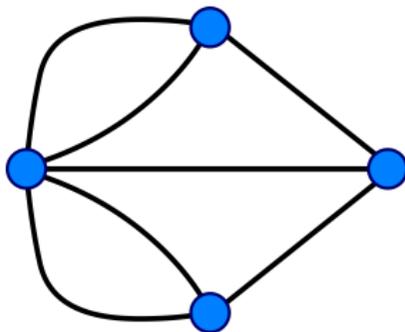
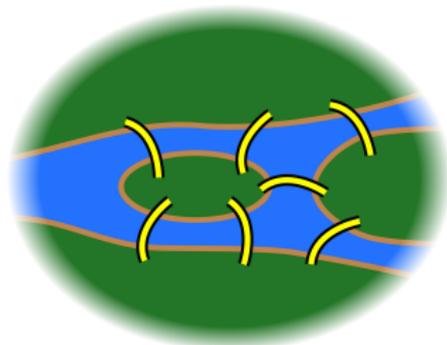
Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):

- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, **distintos**.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos **el número de arcos que llegan tiene que ser par**.
- Eso **NO** pasa en los puentes de Königsberg.



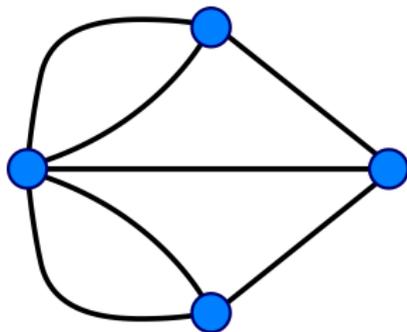
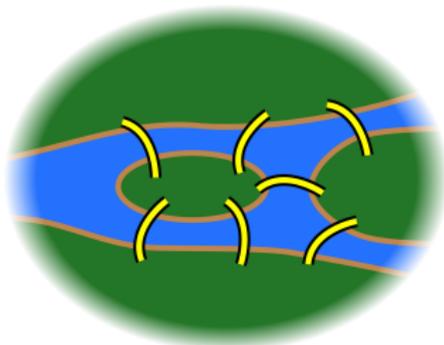
Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):

- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso **NO** pasa en los puentes de Königsberg.



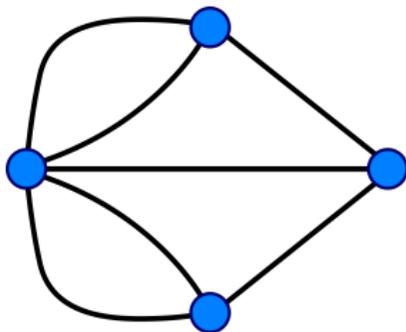
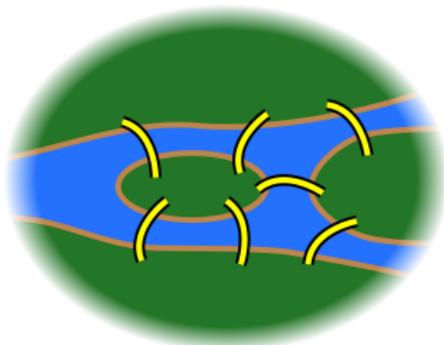
Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

Explicación (Demostración):

- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, **distintos**.
- **Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.**
- Eso **NO** pasa en los puentes de Königsberg.



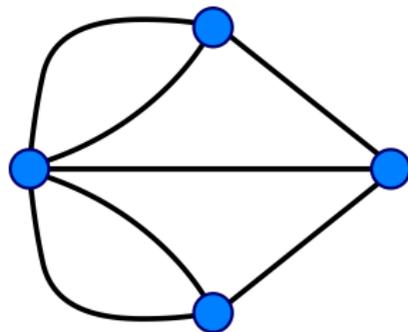
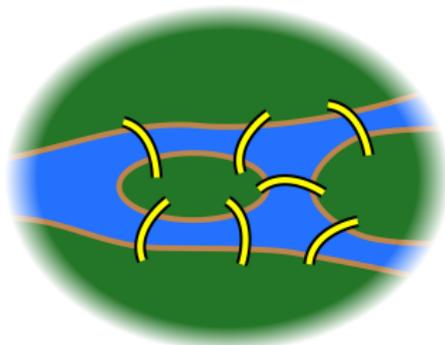
Euler y los puentes de Königsberg. II

Solución (Teorema) (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Königsberg pasando sólo una vez por cada puente.

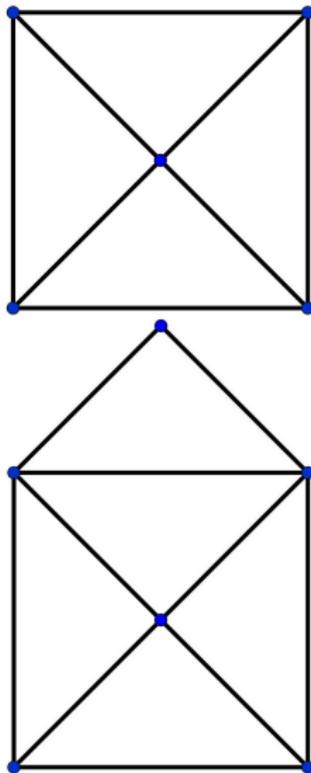
Explicación (Demostración):

- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, **distintos**.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos **el número de arcos que llegan tiene que ser par**.
- **Eso NO pasa en los puentes de Königsberg.**



Dibujando caminos

- Se trata de ver **cuándo** podemos recorrer **completamente** un grafo pasando por cada arista **una sola vez**,
- esto es, “dibujando” sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?



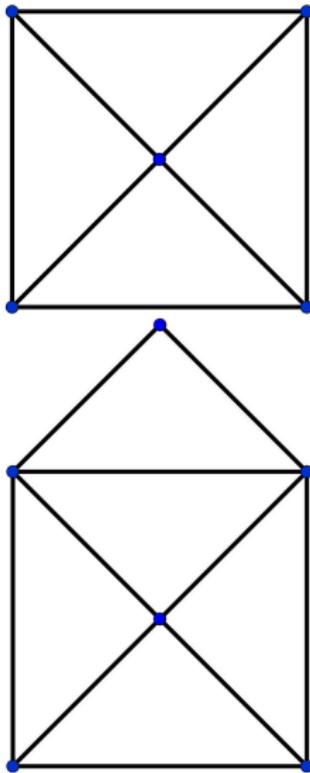
Dibujando caminos

- Se trata de ver **cuándo** podemos recorrer **completamente** un grafo pasando por cada arista **una sola vez**,
- esto es, “dibujando” sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?

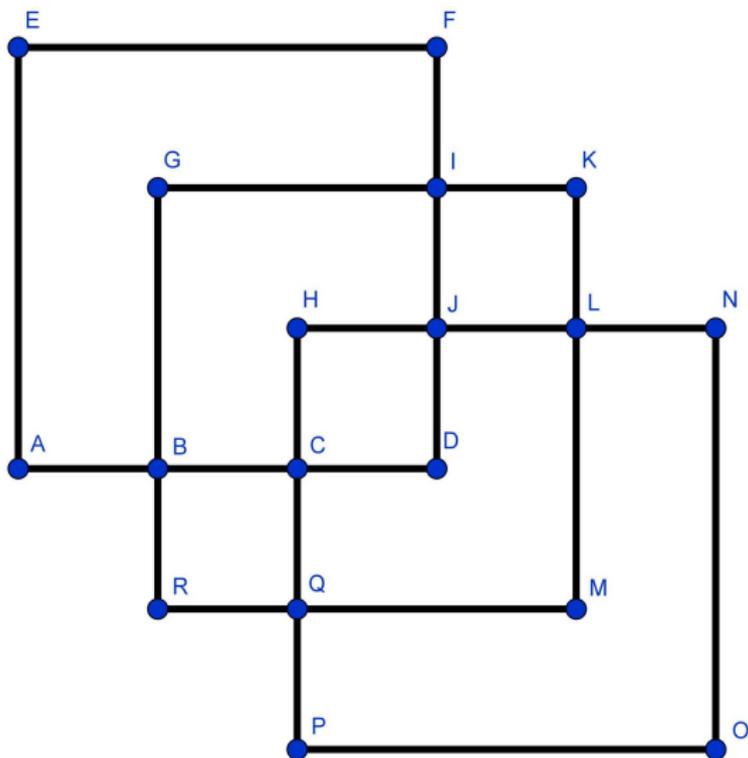
Criterio general

Puede hacerse cuando

- o bien a todos los nodos llegan un número par de aristas,
 - o bien a dos nodos llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.
-
- En el primer caso podemos empezar donde queramos y acabaremos en el mismo sitio,
 - En el segundo caso tenemos que empezar en un nodo al que lleguen un número impar de aristas y terminar en el otro.



Dibujando caminos: un ejemplo

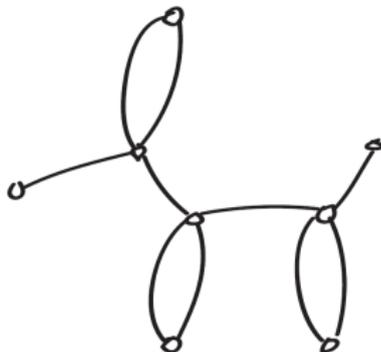
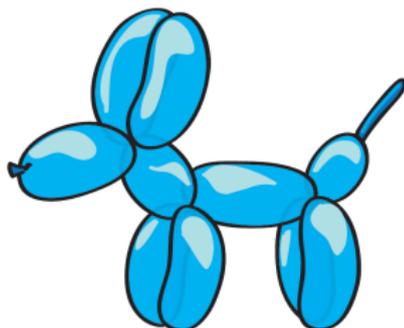


https://elpais.com/elpais/2017/02/15/el_aleph/1487155663_012915.html

Dibujando caminos: el ejemplo resuelto

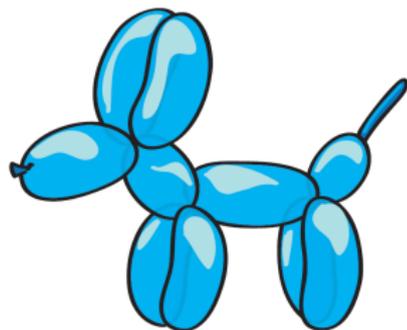
Haciendo figuras con globos

- Es muy sencillo asociar un grafo a cada figura formada con globos:
- ¿Qué figuras podemos hacer con un solo globo?



Haciendo figuras con globos

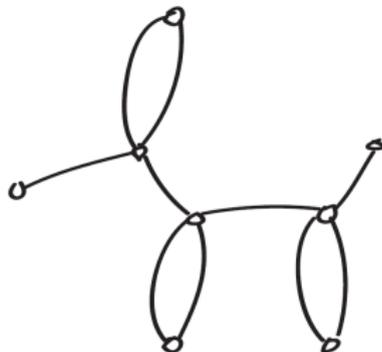
- Es muy sencillo asociar un grafo a cada figura formada con globos:
- ¿Qué figuras podemos hacer con un solo globo?
- Podremos hacer aquéllas figuras cuyo grafo asociado pueda recorrerse sin repetir aristas, es decir,



Criterio general

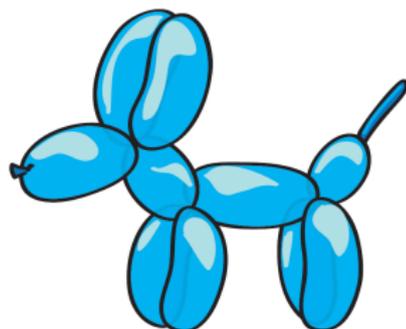
Puede hacerse cuando

- o bien a todos los vértices llegan un número par de aristas,
- o bien a dos vértices llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.



Haciendo figuras con globos

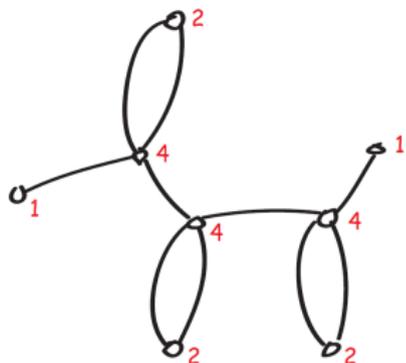
- Es muy sencillo asociar un grafo a cada figura formada con globos:
- ¿Qué figuras podemos hacer con un solo globo?
- Podremos hacer aquéllas figuras cuyo grafo asociado pueda recorrerse sin repetir aristas, es decir,



Criterio general

Puede hacerse cuando

- o bien a todos los vértices llegan un número par de aristas,
- o bien a dos vértices llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.



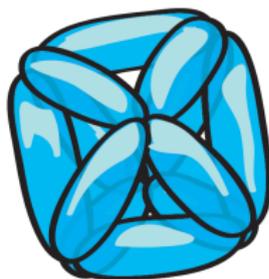
Haciendo figuras con globos

- Es muy sencillo asociar un grafo a cada figura formada con globos:
- ¿Qué figuras podemos hacer con un solo globo?
- Podremos hacer aquéllas figuras cuyo **grafo asociado pueda recorrerse sin repetir aristas**, es decir,

Criterio general

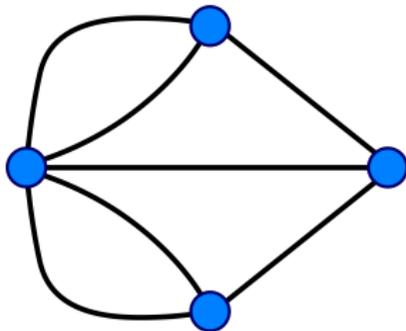
Puede hacerse cuando

- o bien a todos los vértices llegan un número par de aristas,
- o bien a dos vértices llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.



Haciendo figuras con globos II

- Y si una figura NO se puede hacer con un único globo, ¿cuántos globos se necesitarían?

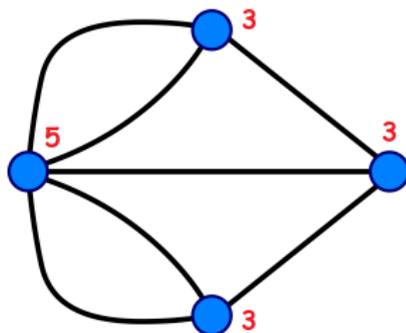


Haciendo figuras con globos II

- Y si una figura NO se puede hacer con un único globo, ¿cuántos globos se necesitarían?
- La respuesta se obtiene contando los vértices con un número impar de aristas.

Respuesta

El número de globos necesarios para hacer una figura será la **mitad del número de vértices con aristas impares**.



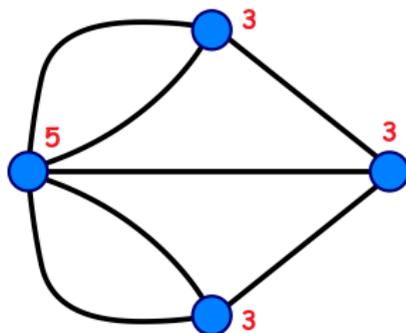
Haciendo figuras con globos II

- Y si una figura NO se puede hacer con un único globo, ¿cuántos globos se necesitarían?
- La respuesta se obtiene contando los vértices con un número impar de aristas.

Respuesta

El número de globos necesarios para hacer una figura será la **mitad del número de vértices con aristas impares**.

- ¿Cuántos globos se necesitan para construir el grafo de los puentes de Königsberg?



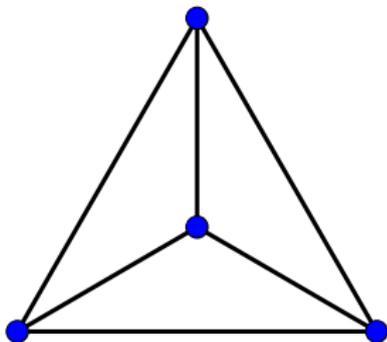
Haciendo figuras con globos II

- Y si una figura NO se puede hacer con un único globo, ¿cuántos globos se necesitarían?
- La respuesta se obtiene contando los vértices con un número impar de aristas.

Respuesta

El número de globos necesarios para hacer una figura será la **mitad del número de vértices con aristas impares**.

- ¿Cuántos globos se necesitan para construir el grafo de los puentes de Königsberg?
- ¿Y un tetraedro?



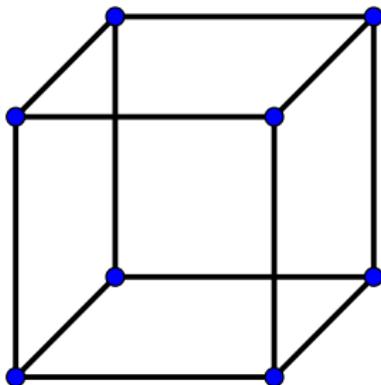
Haciendo figuras con globos II

- Y si una figura NO se puede hacer con un único globo, ¿cuántos globos se necesitarían?
- La respuesta se obtiene contando los vértices con un número impar de aristas.

Respuesta

El número de globos necesarios para hacer una figura será la **mitad del número de vértices con aristas impares**.

- ¿Cuántos globos se necesitan para construir el grafo de los puentes de Königsberg?
- ¿Y un tetraedro?
- ¿Y un cubo?



Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la “geometría”, la forma de medir distancias) es relevante.

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la “geometría”, la forma de medir distancias) es relevante.
- Esto es el comienzo de la **topología**, que Euler llamó **geometría de la posición**.

Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que, **no siempre**, la forma concreta (la “geometría”, la forma de medir distancias) es relevante.
- Esto es el comienzo de la **topología**, que Euler llamó **geometría de la posición**.
- La **topología** estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que no dependen de la forma concreta, si no que se conservan si doblamos, estiramos, encogemos, retorremos. . . siempre que no rompamos ni separemos el objeto.

Topología en nuestro día a día

- La idea de que ciertos problemas o cierta información no dependen de la forma concreta de los objetos la usamos constantemente. . .

Topología en nuestro día a día

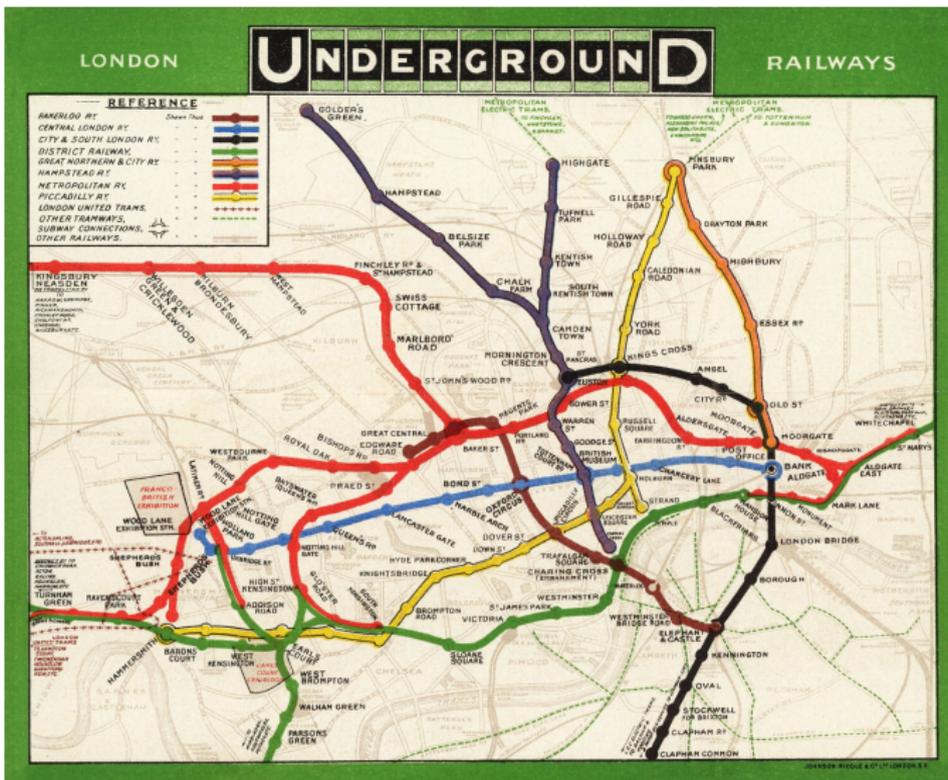
- La idea de que ciertos problemas o cierta información no dependen de la forma concreta de los objetos la usamos constantemente. . .
- ¿Dónde? ¿Cuándo? ¿Cómo?

Topología en nuestro día a día II



PA
L

Topología en nuestro día a día II



A.J. KENT, When Topology Trumped Topography: Celebrating 90 Years of Beck's Underground Map, *The Cartographic Journal* (2021)

Topología en nuestro día a día II



A.J. KENT, When Topology Trumped Topography: Celebrating 90 Years of Beck's Underground Map, *The Cartographic Journal* (2021)

Topología en nuestro día a día II

Tube map



- Check before you travel**
- † **Headline**
TFL services should change at Terminal 2 & 3 for the rail transfer to Terminal 5.
 - † **Headline Terminal 4**
Closed until further notice.
 - † **Headline West**
Stop the services for impact of Heathrow only.
 - † **Health Development**
Possibly the terms not stopping until spring 2022.
 - † **Services or services at these stations are subject to variation.**
To check before you travel, visit tfl.gov.uk/planner.

- Key to lines**
- Bakerloo
 - Central
 - Circle
 - District
 - Hammersmith & City
 - Jubilee
 - Metropolitan
 - Northern
 - Piccadilly
 - Victoria
 - Waterloo & City
 - Elizabeth Line
DASH CAR
National Rail service
 - London Overground
 - TfL Rail
 - London Trams
TfL Tramlink
TfL Tram
 - District
District line

- Key to symbols**
- interchange stations
 - transfer interchange
 - transfer to other services
 - stop-free across these stations to platform
 - National Rail
 - Airport
 - TfL Waterways
 - London Underground
 - National Rail
 - District line
 - TfL Rail
- Explanation of zones**
- 1 Bakerloo Zone 1
 - 2 Bakerloo Zone 2
 - 3 Bakerloo Zone 3
 - 4 Bakerloo Zone 4
 - 5 Bakerloo Zone 5
 - 6 Bakerloo Zone 6
 - 7 Bakerloo Zone 7
 - 8 Bakerloo Zone 8
 - 9 Bakerloo Zone 9
 - 10 Bakerloo Zone 10
 - 11 Bakerloo Zone 11
 - 12 Bakerloo Zone 12
 - 13 Bakerloo Zone 13
 - 14 Bakerloo Zone 14
 - 15 Bakerloo Zone 15
 - 16 Bakerloo Zone 16
 - 17 Bakerloo Zone 17
 - 18 Bakerloo Zone 18
 - 19 Bakerloo Zone 19
 - 20 Bakerloo Zone 20
 - 21 Bakerloo Zone 21
 - 22 Bakerloo Zone 22
 - 23 Bakerloo Zone 23
 - 24 Bakerloo Zone 24
 - 25 Bakerloo Zone 25
 - 26 Bakerloo Zone 26
 - 27 Bakerloo Zone 27
 - 28 Bakerloo Zone 28
 - 29 Bakerloo Zone 29
 - 30 Bakerloo Zone 30
 - 31 Bakerloo Zone 31
 - 32 Bakerloo Zone 32
 - 33 Bakerloo Zone 33
 - 34 Bakerloo Zone 34
 - 35 Bakerloo Zone 35
 - 36 Bakerloo Zone 36
 - 37 Bakerloo Zone 37
 - 38 Bakerloo Zone 38
 - 39 Bakerloo Zone 39
 - 40 Bakerloo Zone 40
 - 41 Bakerloo Zone 41
 - 42 Bakerloo Zone 42
 - 43 Bakerloo Zone 43
 - 44 Bakerloo Zone 44
 - 45 Bakerloo Zone 45
 - 46 Bakerloo Zone 46
 - 47 Bakerloo Zone 47
 - 48 Bakerloo Zone 48
 - 49 Bakerloo Zone 49
 - 50 Bakerloo Zone 50
 - 51 Bakerloo Zone 51
 - 52 Bakerloo Zone 52
 - 53 Bakerloo Zone 53
 - 54 Bakerloo Zone 54
 - 55 Bakerloo Zone 55
 - 56 Bakerloo Zone 56
 - 57 Bakerloo Zone 57
 - 58 Bakerloo Zone 58
 - 59 Bakerloo Zone 59
 - 60 Bakerloo Zone 60
 - 61 Bakerloo Zone 61
 - 62 Bakerloo Zone 62
 - 63 Bakerloo Zone 63
 - 64 Bakerloo Zone 64
 - 65 Bakerloo Zone 65
 - 66 Bakerloo Zone 66
 - 67 Bakerloo Zone 67
 - 68 Bakerloo Zone 68
 - 69 Bakerloo Zone 69
 - 70 Bakerloo Zone 70
 - 71 Bakerloo Zone 71
 - 72 Bakerloo Zone 72
 - 73 Bakerloo Zone 73
 - 74 Bakerloo Zone 74
 - 75 Bakerloo Zone 75
 - 76 Bakerloo Zone 76
 - 77 Bakerloo Zone 77
 - 78 Bakerloo Zone 78
 - 79 Bakerloo Zone 79
 - 80 Bakerloo Zone 80
 - 81 Bakerloo Zone 81
 - 82 Bakerloo Zone 82
 - 83 Bakerloo Zone 83
 - 84 Bakerloo Zone 84
 - 85 Bakerloo Zone 85
 - 86 Bakerloo Zone 86
 - 87 Bakerloo Zone 87
 - 88 Bakerloo Zone 88
 - 89 Bakerloo Zone 89
 - 90 Bakerloo Zone 90
 - 91 Bakerloo Zone 91
 - 92 Bakerloo Zone 92
 - 93 Bakerloo Zone 93
 - 94 Bakerloo Zone 94
 - 95 Bakerloo Zone 95
 - 96 Bakerloo Zone 96
 - 97 Bakerloo Zone 97
 - 98 Bakerloo Zone 98
 - 99 Bakerloo Zone 99
 - 100 Bakerloo Zone 100

© Transport for London, September 2021. 100004-001

MAYOR OF LONDON

tfl.gov.uk

24 hour travel information
0343 222 1234*

Check your travel
tfl.gov.uk/travel-tools

*These travel maps are for personal use only. To license the Tube map for commercial use please visit tfl.gov.uk/travellicensing



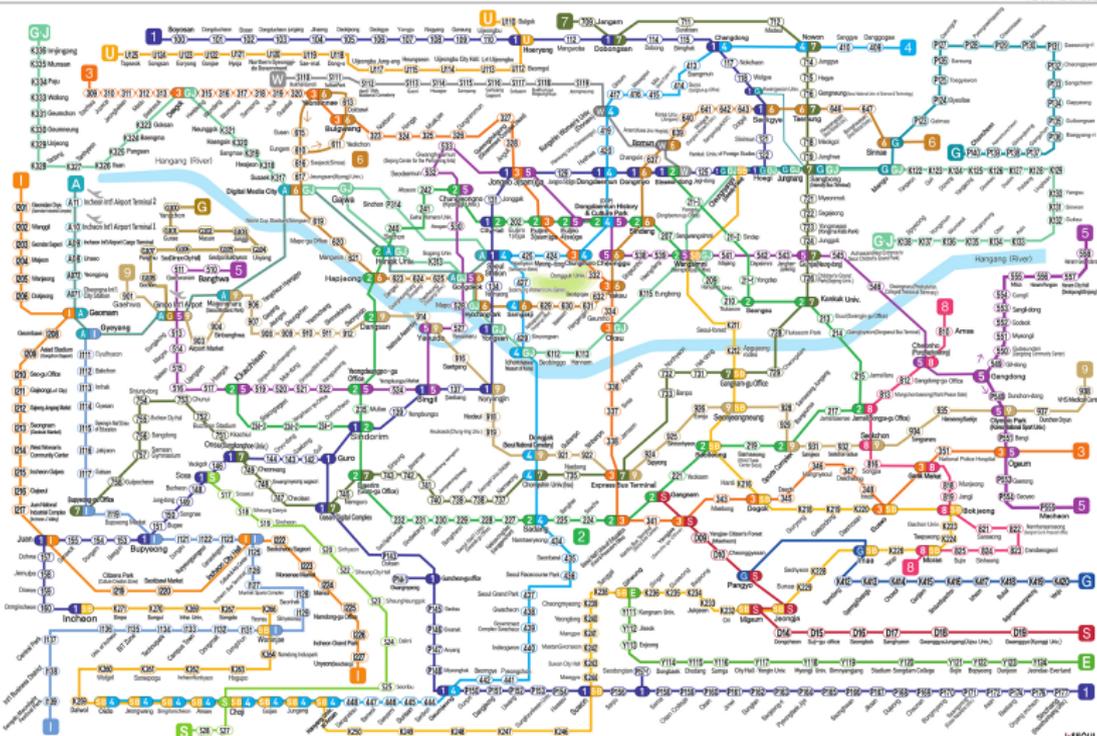
TRANSPORT FOR LONDON
EVERY JOURNEY MATTERS

<https://tfl.gov.uk/maps/track/tube>

Topología en nuestro día a día II

Seoul Metro Metro Lines in Seoul Metropolitan Area
www.seoulmetro.co.kr 首尔及首都圈地铁线图 ソウル首都圏路線図

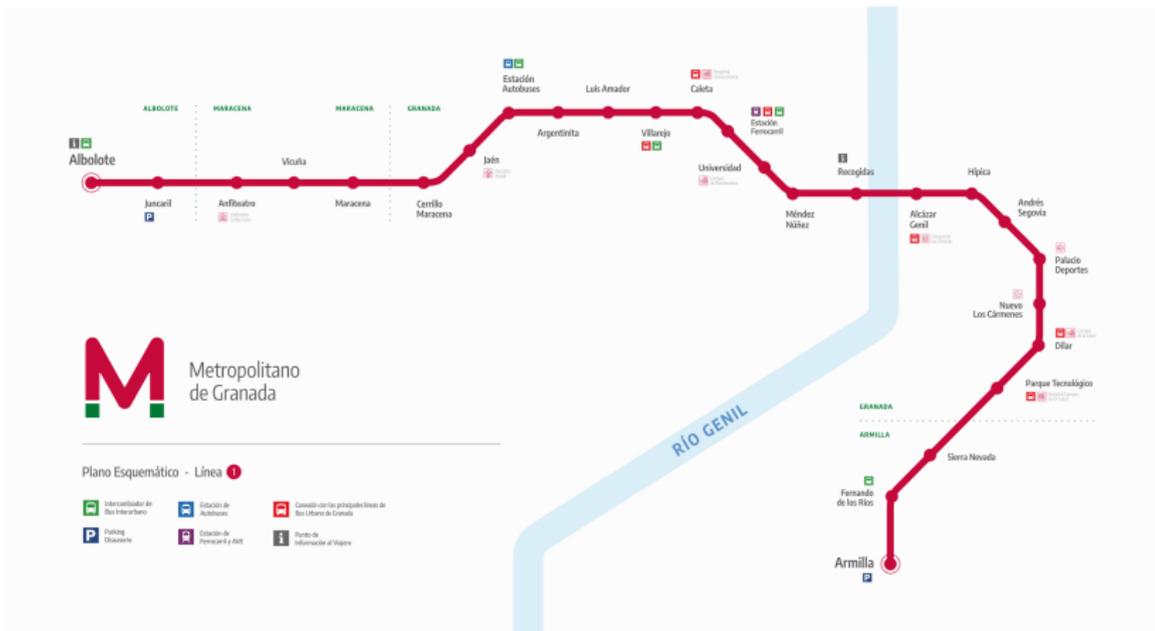
As of March 2021



Copyright 2020 SEoulMETRO. All rights reserved.

I-SEOUL-U

Topología en nuestro día a día II

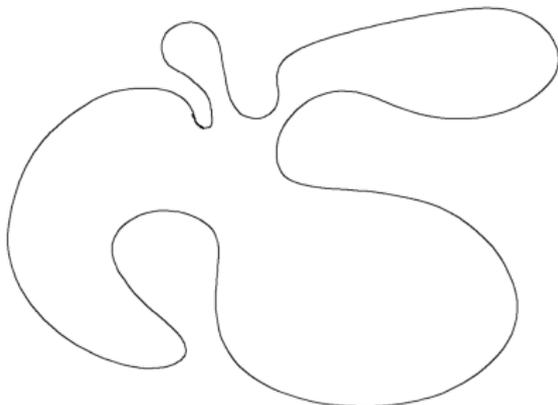


<https://ecomovilidad.net/granada/plano-metro-de-granada/>

El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

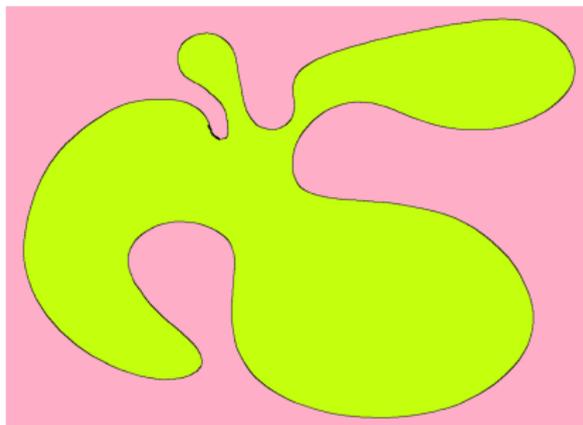
Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel,



El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

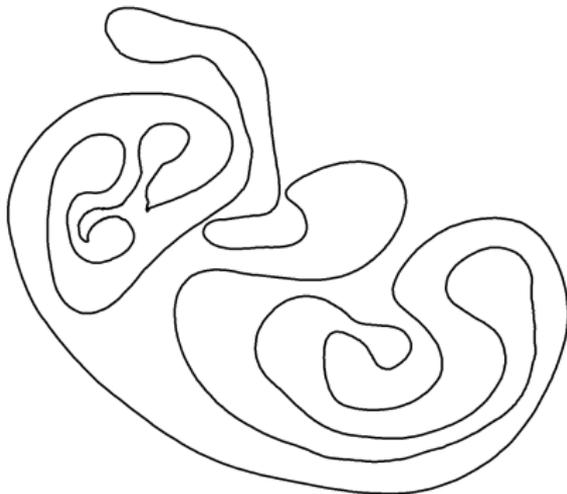


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...

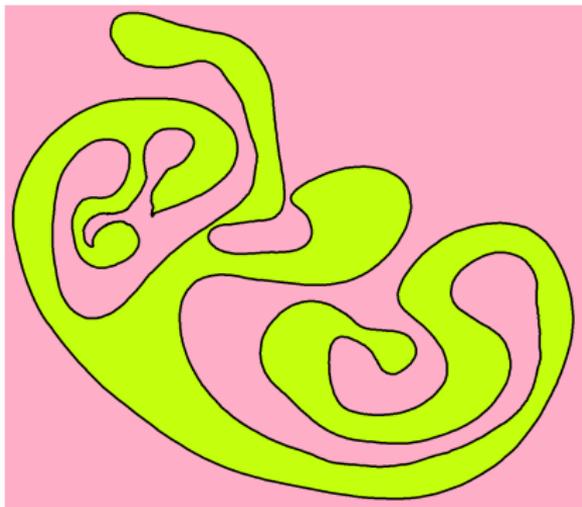


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...

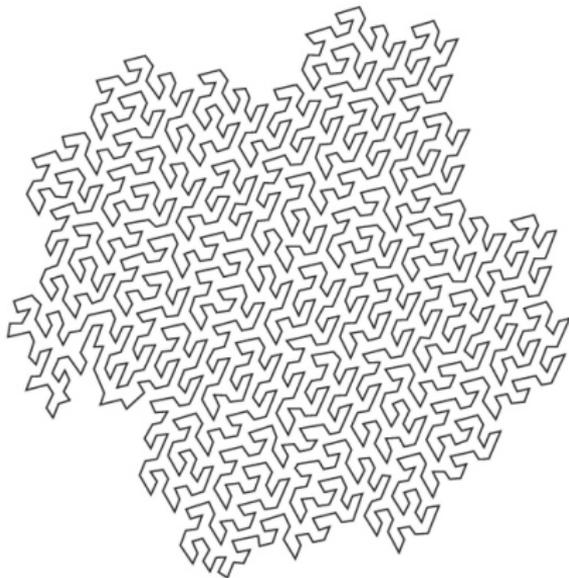


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira...

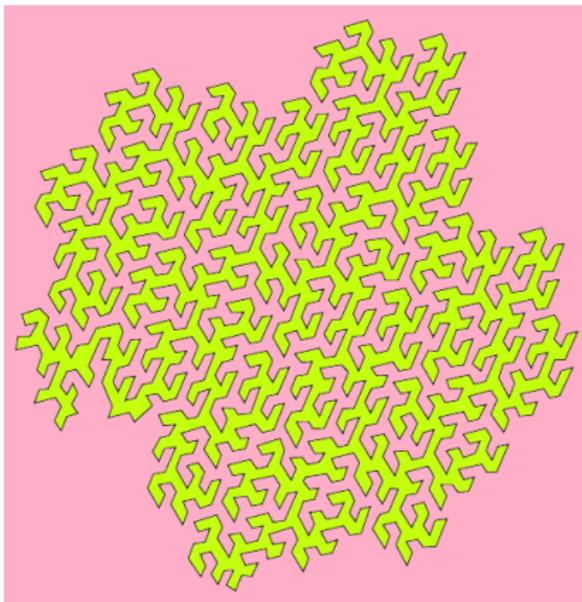


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no



El Teorema de la curva de Jordan

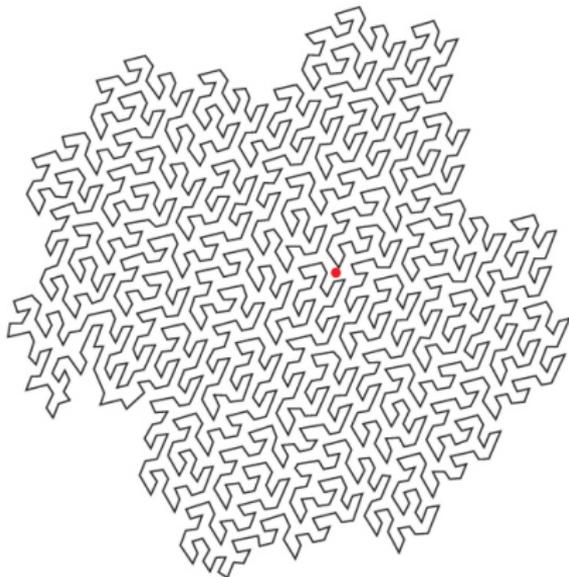
Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no

Pregunta

¿Cómo se puede saber si un punto está dentro o está fuera?



El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

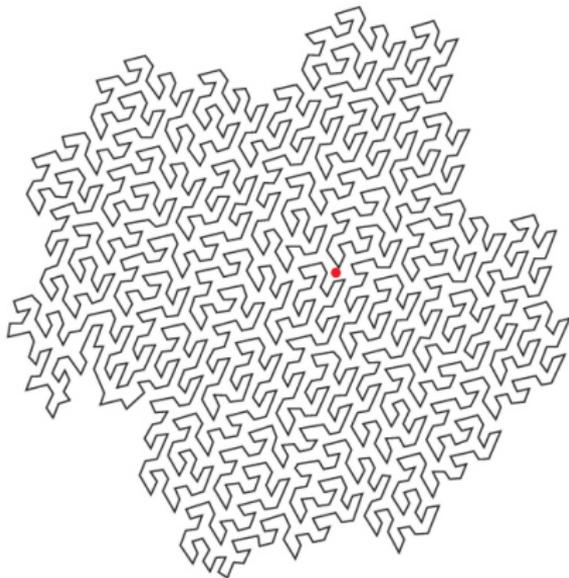
Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones: **la de dentro** y **la de fuera**.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no

Pregunta

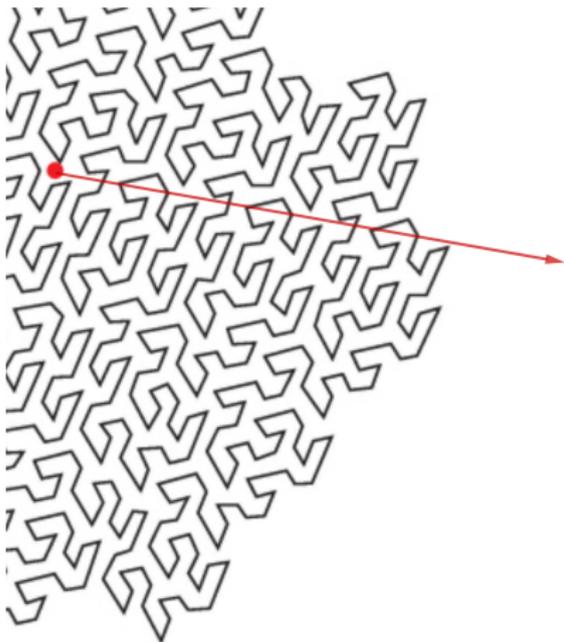
¿Cómo se puede saber si un punto está dentro o está fuera?

- ¡**Contando!**



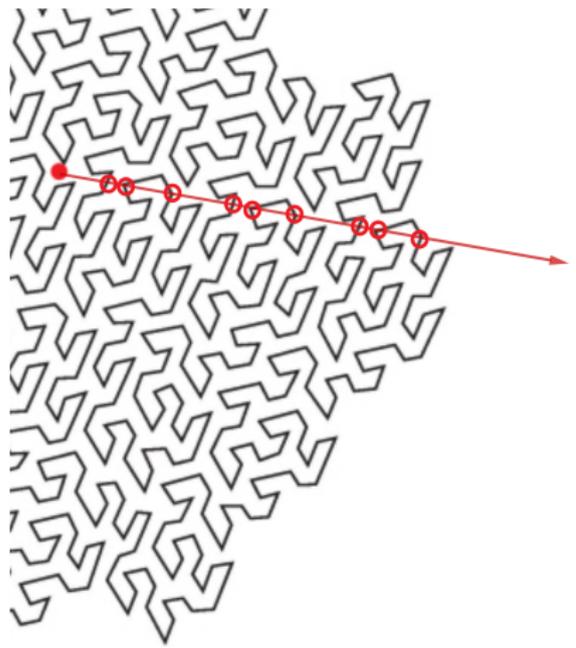
El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva



El Teorema de la curva de Jordan. II

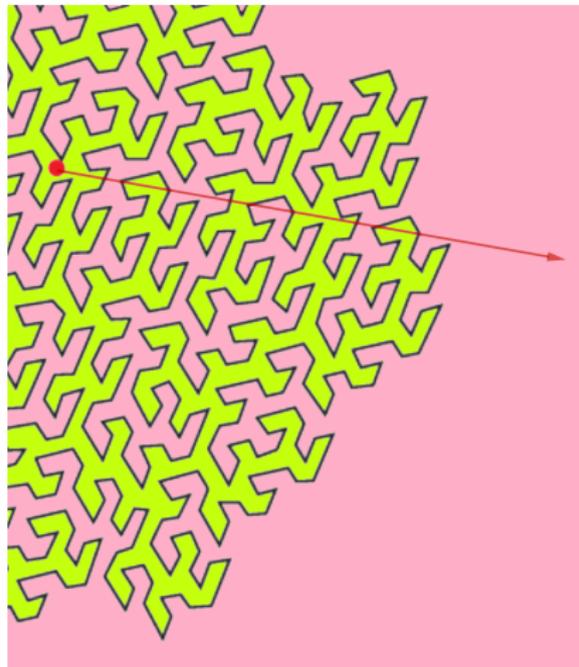
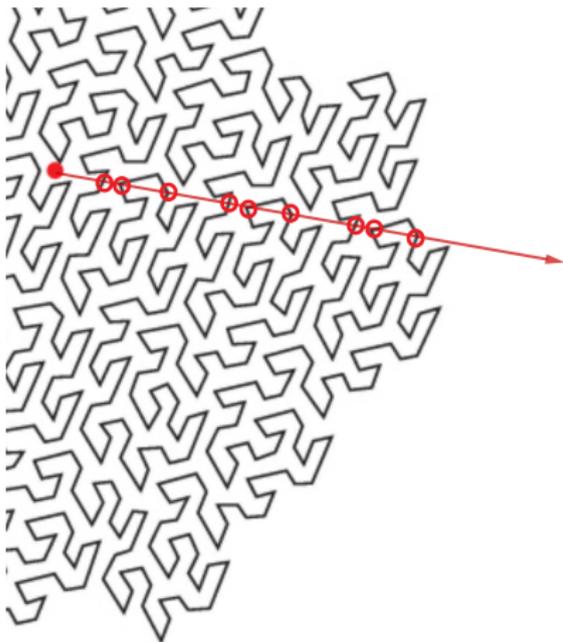
Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva



Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que salga del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva



Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

Un sitio en el que se mezcla todo



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:

<https://www.google.es/maps>



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.
- ¡Pero esto no se hace por fuerza bruta!
- Se usan algoritmos de búsqueda del camino más corto.



- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.
- ¡Pero esto no se hace por fuerza bruta!
- Se usan algoritmos de búsqueda del camino más corto.
- ¡Hay muuuuuuuucha matemática detrás!

Preliminares
○○

Formas de medir distancias
○○○○○○○

Cuando la forma no importa
○○○○○○○○○○○○○○○○

Mezclando todo
○○

Colofón
●○○

Colofón

Para saber más. . .



Gaussianos

<http://gaussianos.com/>



Tocamates *matemáticas y creatividad*

<http://www.tocamates.com/>



Hans Enzensberger

El diablo de los números

Ediciones Siruela, 1998



Santi García Cremades

Un número perfecto

Anaya Multimedia, 2017



José Ángel Murcia

Y me llevo una

Nórdica, 2019



Adrián Paenza

Matemática. . . ¿Estás ahí?

Siglo veintiuno editores, 2005

Muchos libros gratis en <http://cms.dm.uba.ar/material/paenza/>

Dos citas de *Maryna Viazovska*, medalla Fields 2022



Mi sueño es que el hecho de que las mujeres obtengan premios importantes sea un acontecimiento rutinario. . . Este premio podría tener un efecto positivo en las mujeres jóvenes, pero lo que es mucho más importante es lo que ocurre desde el principio en la escuela: el trabajo duro y cotidiano que realizan los padres, los maestros, los profesores universitarios.

Maryna Viazovska, **matemática ucraniana**, ha obtenido una de las cuatro medallas Fields que la IMU ha entregado durante el ICM 2022