¡Hasta el infinito y más allá!

[redacted]

Miguel Martín Suárez

Departamento de Análisis Matemático
Instituto de Matemáticas IMAG

Semana de la Ciencia en Andalucía

MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN

UNIÓN EUROPEA
FONDO EUROPEO DE DESARROLLO REGIONAL
"Una manera de hacer Europa"

AGENCIA ESTATAL DE INVESTIGACIÓN

Noviembre 2021

Organización de la conferencia

Las fotos y gráficos usados en esta conferencia están sacadas de fuentes libres como:

- Wikipedia: https://www.wikipedia.org/
- MacTutor history of Mathematics: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
- Gráficos sencillos creados por el autor de la conferencia. . .

En otros casos, se incluirá referencia explícita a la fuente.

Presentación

Presentación

- Miguel Martín Suárez

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Miembro del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Miembro del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Miembro del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Miembro del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*
- Pero antes, *¿qué es el infinito?*

¿Qué es el infinito?

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor (1888–1962)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor (1888–1962)

El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho, establece una frontera que separa las matemáticas de la lógica (. . .) El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.

Antonio J. Durán (1962–)

Definiciones de infinito I

REAL ACADEMIA ESPAÑOLA

Diccionario de la lengua española | Edición del Tricentenario | Actualización 2020

Consulta posible gracias al compromiso con la cultura de la Fundación "la Caixa"

por palabras | Escriba aquí la palabra | Consultar

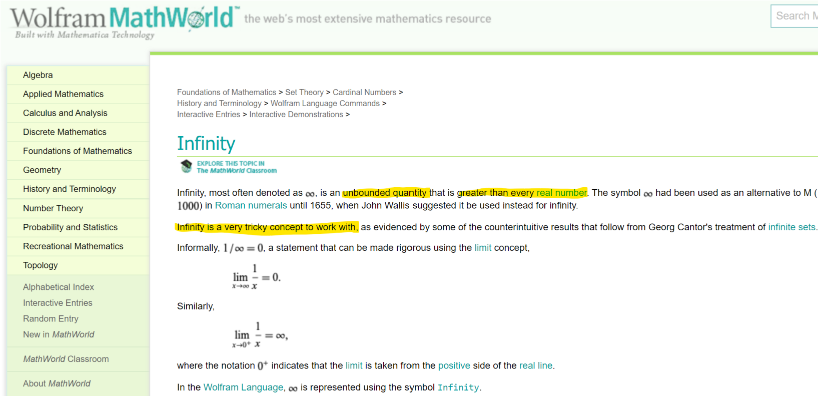
infinito, ta

Del lat. *infinītus*.

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. adj. Muy numeroso o enorme.
3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. m. *Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. *Mat.* Signo (∞) con que se expresa el infinito.
7. adv. Infinita o excesivamente.

`https://dle.rae.es/infinito?m=form`

Definiciones de infinito II



Wolfram MathWorld the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathematica Technology

Search M

- Algebra
- Applied Mathematics
- Calculus and Analysis
- Discrete Mathematics
- Foundations of Mathematics
- Geometry
- History and Terminology
- Number Theory
- Probability and Statistics
- Recreational Mathematics
- Topology

- Alphabetical Index
- Interactive Entries
- Random Entry
- New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*

Foundations of Mathematics > Set Theory > Cardinal Numbers >
History and Terminology > Wolfram Language Commands >
Interactive Entries > Interactive Demonstrations >

Infinity

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{1}{x}=\infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side of the real line.

In the Wolfram Language, ∞ is represented using the symbol `Infinity`.

https://mathworld.wolfram.com/Infinity.html

Definiciones

En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.

Wolfram MathWorld — the web's most extensive mathematics resource
Built with Mathematica Technology

Search M

- Algebra
- Applied Mathematics
- Calculus and Analysis
- Discrete Mathematics
- Foundations of Mathematics
- Geometry
- History and Terminology
- Number Theory
- Probability and Statistics
- Recreational Mathematics
- Topology

- Alphabetical Index
- Interactive Entries
- Random Entry
- New in *MathWorld*

- *MathWorld* Classroom

- About *MathWorld*

Foundations of Mathematics > Set Theory > Cardinal Numbers >
History and Terminology > Wolfram Language Commands >
Interactive Entries > Interactive Demonstrations >

Infinity

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side of the real line.

In the Wolfram Language, ∞ is represented using the symbol `Infinity`.

`https://mathworld.wolfram.com/Infinity.html`

Definiciones de infinito III

No has accedido Discusión Contribuciones Crear una cuenta Acceder

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

Artículo | Discusión | Leer | Editar | Ver historial | Buscar en Wikipedia

Portada
Portal de la comunidad
Actualidad
Cambios recientes
Páginas nuevas
Página aleatoria
Ayuda
Donaciones
Notificar un error

Herramientas

Lo que enlaza aquí
Cambios en enlazadas
Subir archivo

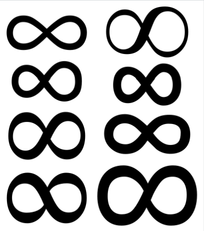
Infinito

Para el canal de televisión por cable, véase Infinito (canal de televisión).

Para el grupo español del mismo nombre, véase Infinito (banda).

El concepto de **infinito** (símbolo: ∞) aparece en varias ramas de la matemática, la filosofía y la astronomía,[1] en referencia a una cantidad sin límite o sin final, contrapuesto al concepto de finitud.[2]

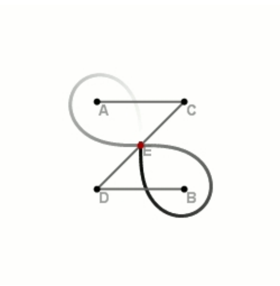
En matemáticas el infinito aparece de diversas formas: en geometría, el punto al infinito en geometría proyectiva y el punto de fuga en geometría descriptiva; en análisis matemático, los límites infinitos; y en teoría de conjuntos como números transfinitos.



El símbolo de infinito ∞ (Unicode U+221E), también llamado lemniscata, en diferentes tipos de letra.

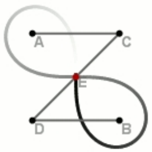
`https://es.wikipedia.org/wiki/Infinito`

Sobre el símbolo ∞



Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto

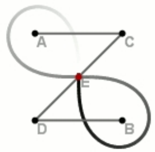


Sobre el símbolo ∞

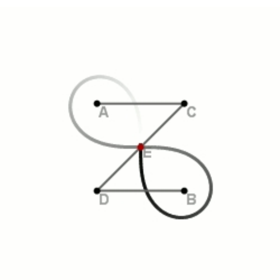
- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin



Sobre el símbolo ∞

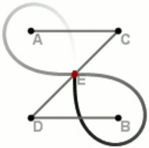


- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor

Sobre el símbolo ∞



- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido,

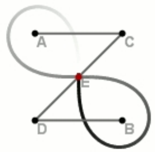
Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin

- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la letra griega *omega*



$$\omega$$

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

- Georg Cantor (1845–1918):

  Primer estudio sistemático del infinito, aritmética del infinito, números transfinitos... No todos los infinitos son iguales.

Pero. . . ¿existe el infinito?

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
- los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor;

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
- los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor;
- los números pares, los números impares, las potencias de $2 \ldots$ son todos conjuntos infinitos.

Los procesos infinitos y sus paradojas

2. Los procesos infinitos y sus paradojas
   - Aquiles y la tortuga
   - Sobre la invención del ajedrez
   - Repartiendo infinitas monedas

La paradoja de Aquiles y la tortuga

La paradoja de Aquiles y la tortuga

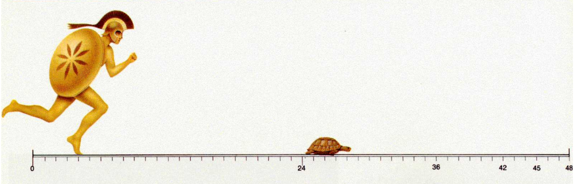
Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . .
De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más...
De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

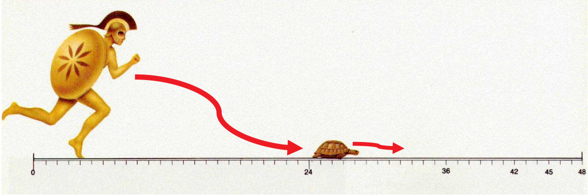
Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . .
De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



Aquiles y la tortuga II

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.

- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que
  el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que
  el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
    - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
    - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
    - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que

  una "suma infinita" de cantidades positivas puede ser finita.

Dos preguntas. . .

Dos preguntas. . .

¿Cuánto vale?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

Dos preguntas. . .

¿Cuánto vale?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

¿Y cuánto vale?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Dos preguntas. . .

¿Cuánto vale?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots$$

¿Y cuánto vale?

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Un comentario

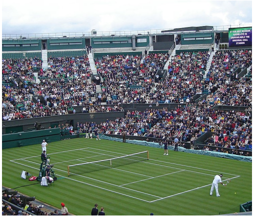
Intentar dar una respuesta sumando consecutivamente los números no es posible, no acabaríamos nunca de sumar, necesitamos ver las cosas de otra forma, mirarlas desde otro lado (pensamiento lateral).

Entrenemos un poco. . .

Entrenemos un poco...

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?

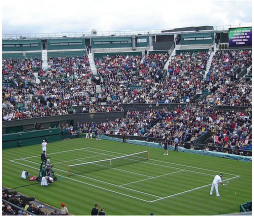


Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?

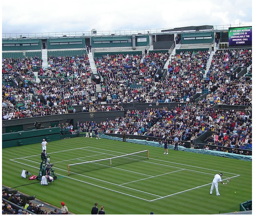
- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .



Entrenemos un poco...

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos...

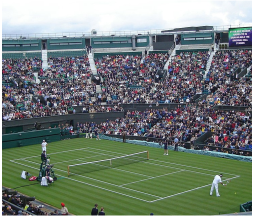
La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=$$

Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .

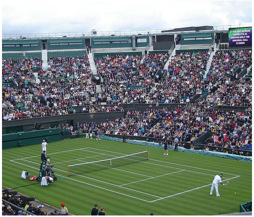
La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

Entrenemos un poco...

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos...

La respuesta:

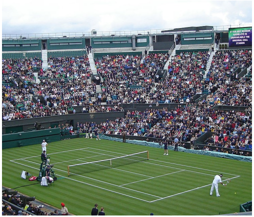
$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

Pero... ¿y si empiezan 1024, o incluso 1.048.576?

Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .

La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

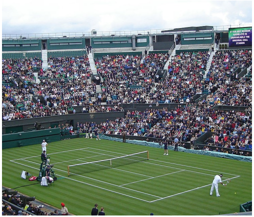
Pero. . . ¿y si empiezan 1024, o incluso 1.048.576?

¿Y si lo vemos de otra forma?

Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .

La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

Pero. . . ¿y si empiezan 1024, o incluso 1.048.576?

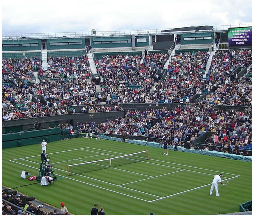
¿Y si lo vemos de otra forma?

- Empiezan X tenistas y en cada partido se elimina a uno,

Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .

La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

Pero. . . ¿y si empiezan 1024, o incluso 1.048.576?

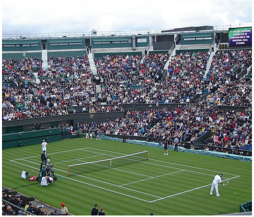
¿Y si lo vemos de otra forma?

- Empiezan X tenistas y en cada partido se elimina a uno,
- se juega hasta que sólo queda uno. . .

Entrenemos un poco. . .

Pregunta

¿Cuántos partidos se juegan en Roland Garrós si empiezan 128 tenistas?



- En primera ronda, hay 64 partidos,
- en segunda ronda hay 32 partidos,
- en tercera ronda hay 16 partidos,
- en octavos de final hay 8 partidos. . .

La respuesta:

$$64+32+16+8+4+2+1=127$$

Pero. . . ¿y si empiezan 1024, o incluso 1.048.576?

¿Y si lo vemos de otra forma?

- Empiezan X tenistas y en cada partido se elimina a uno,
- se juega hasta que sólo queda uno. . .
- luego hay que jugar $X-1$ partidos.

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Se cuenta que cuando Carl F. Gauss (1777–1855) tenía 7 años, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que sumara todos los números del 1 al 100.

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Se cuenta que cuando Carl F. Gauss (1777–1855) tenía 7 años, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que sumara todos los números del 1 al 100.
- El maestro pensaba que el niño tardaría varias horas en resolver el problema, pero a los dos minutos Gauss le entregó la solución: **5050**.

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Se cuenta que cuando Carl F. Gauss (1777–1855) tenía 7 años, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que sumara todos los números del 1 al 100.
- El maestro pensaba que el niño tardaría varias horas en resolver el problema, pero a los dos minutos Gauss le entregó la solución: **5050**.
- Sorprendido por la rapidez, el maestro pidió a Gauss que le explicara el procedimiento que había seguido.

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en dos filas:
  - los 50 primeros de forma creciente
  - y los 50 siguiente de forma decreciente.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 53 & 52 & 51 \end{array}$$

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en dos filas:
  - los 50 primeros de forma creciente
  - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma 101.

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 53 & 52 & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \cdots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en dos filas:
  - los 50 primeros de forma creciente
  - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma 101.
- Como hay 50 columnas, obtenemos

$$50 \times 101 = 5050$$

1	2	3	$\cdots$	48	49	50
100	99	98	$\cdots$	53	52	51
101	101	101	$\cdots$	101	101	101

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en dos filas:
  - los 50 primeros de forma creciente
  - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma 101.
- Como hay 50 columnas, obtenemos

$$50 \times 101 = 5050$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 53 & 52 & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \cdots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

Por supuesto, se nos pueden ocurrir otras formas de hacerlo. . .

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en dos filas:
  - los 50 primeros de forma creciente
  - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma 101.
- Como hay 50 columnas, obtenemos

$$50 \times 101 = 5050$$

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & 48 & 49 & 50 \\ 100 & 99 & 98 & \cdots & 53 & 52 & 51 \\ \hline 101 & 101 & 101 & \cdots & 101 & 101 & 101 \end{array}$$

Por supuesto, se nos pueden ocurrir otras formas de hacerlo...

Ya hemos entrenado, ¡volvamos a nuestras preguntas!

Sumando porciones de pizza I

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

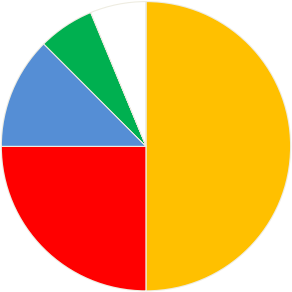
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:

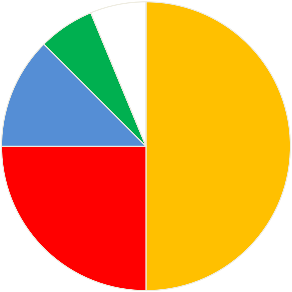


Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



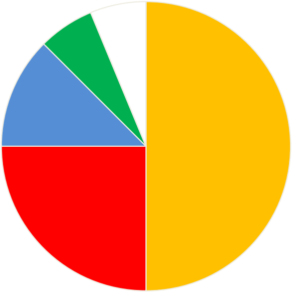
Demostración:

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



Demostración:

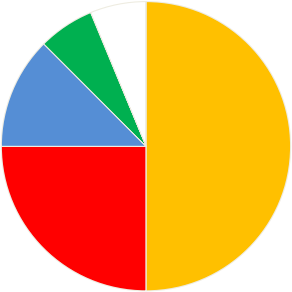
Tomamos una piza

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



Demostración:

Tomamos una piza

y la vamos partiendo. . .

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

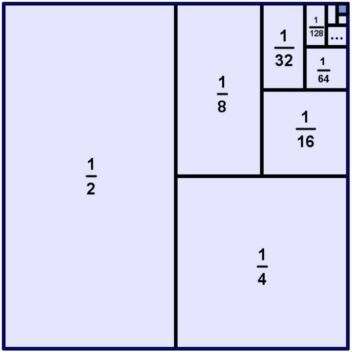
Otra demostración:

Sumando porciones de pizza I

Teorema (Elementos de Euclides, aprox. 300 ac – François Viète, 1593)

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Otra demostración:



Sumando porciones de pizza II

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
=&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema (Nicolás Oresme, 1350)

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

La leyenda del origen del ajedrez

La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Iadava (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.

La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Iadava (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.
Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado Sessa con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el chaturanga, antecesor del ajedrez.

La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Iadava (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.
Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado Sessa con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el chaturanga, antecesor del ajedrez.

La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Iadava (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.
Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado Sessa con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el chaturanga, antecesor del ajedrez.
El rey, encantado con el juego, quiso agradecer a Sessa con palacios, joyas, regalos... que el joven brahmán siempre rechazaba cortésmente.

La leyenda del origen del ajedrez II

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro...

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . . y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . . y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.
El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.
El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.
Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . . y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.
El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.
Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.

¿Puedes imaginar cuánto arroz se necesita?

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . . y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.
El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.
Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.

¿Puedes imaginar cuánto arroz se necesita?

¿Y si te digo que en para llegar a la casilla 32 se necesitan, más o menos, 100.000 kilos de arroz?

El cálculo de la cantidad de arroz

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \quad \textit{granos de arroz}$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \quad \textit{granos de arroz}$$

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18}$$ *granos de arroz*

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ \textit{granos de arroz}}$$

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62}\right)$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \quad \textit{granos de arroz}$$

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62}\right)$$
$$X - 1 = 2\left(X - 2^{63}\right)$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18{,}446{,}744{,}073{,}709{,}551{,}615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

¡mil veces la producción MUNDIAL de arroz en un año!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2\big(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62}\big)$$

$$X - 1 = 2\big(X - 2^{63}\big)$$

Por tanto, $X = 2^{64} - 1 \simeq 18 * 10^{18}$.

El final de la historia

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots$$
$$X - 1 = 2\left(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\right)$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$\begin{aligned} X &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2\big(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\big) \\ X - 1 &= 2X \end{aligned}$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$\begin{aligned} X &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2\big(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\big) \\ X - 1 &= 2X \end{aligned}$$

  - Por tanto, ¡$X = -1$!

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$\begin{aligned} X &= 1+2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots \\ X-1 &= 2+2^2+2^3+2^4+2^5+\cdots \\ X-1 &= 2\left(1+2+2^2+2^3+2^4+\cdots\right) \\ X-1 &= 2X \end{aligned}$$

  - Por tanto, ¡$X=-1$! y el rey pidió a Sessa que le entregara un grano de arroz ☺

Repartiendo infinitas monedas

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots$

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia?

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, $5, \dots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
    - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
    - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
    - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.
- NO ES JUSTO NI EQUITATIVO.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de **infinitas** monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.
- NO ES JUSTO NI EQUITATIVO.

¿Qué está pasando aquí?

¿Cuántos infinitos hay?

3. ¿Cuántos infinitos hay?
    - El hotel de Hilbert
    - Cantor y el continuo

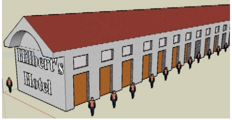
El hotel de Hilbert

El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.

El hotel de Hilbert

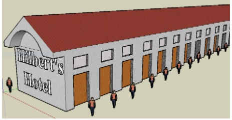
- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.



El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.
- Su lema es

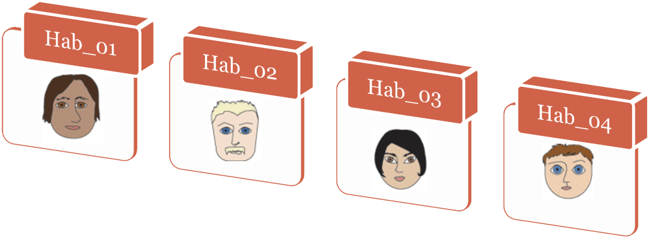
  "Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti".



Infinito más uno igual a infinito

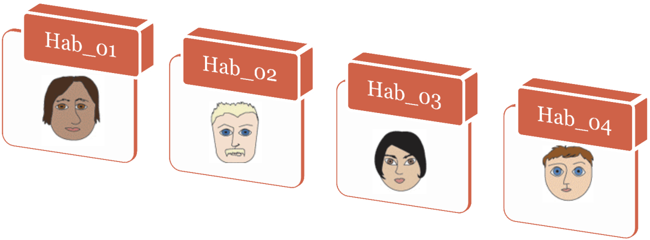
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.



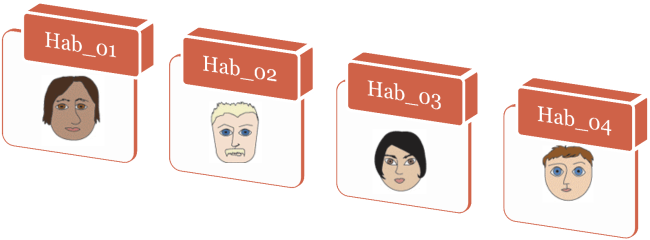
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?



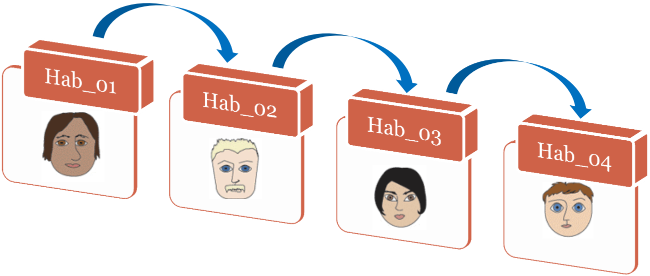
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:



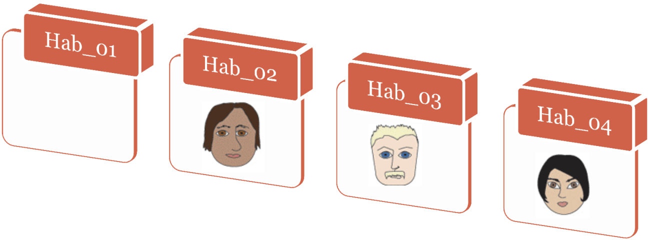
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,



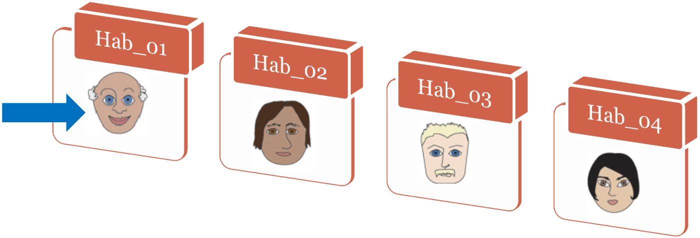
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,



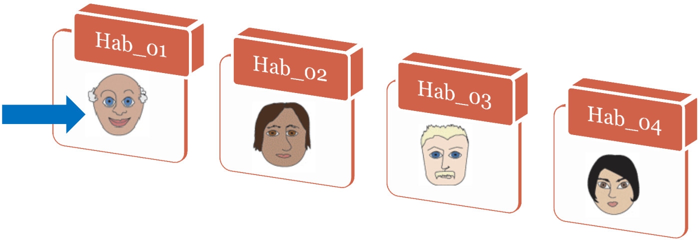
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.



Infinito más uno igual a infinito

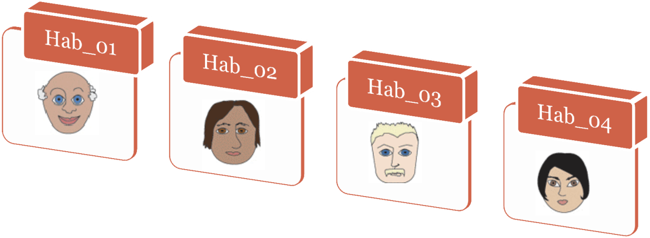
- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a cualquier cantidad finita de nuevos huéspedes.



Infinito más infinito igual a infinito

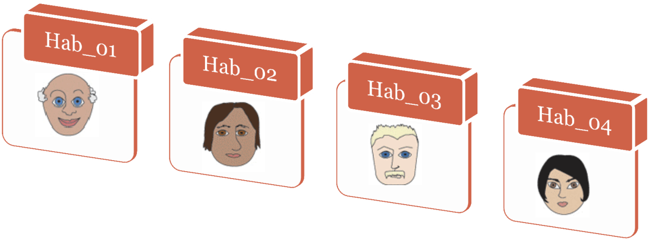
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.



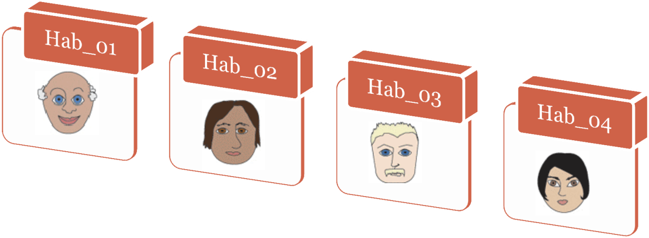
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



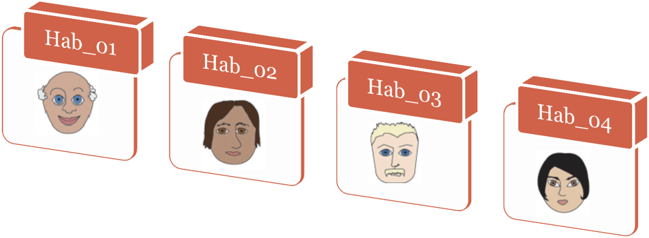
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:



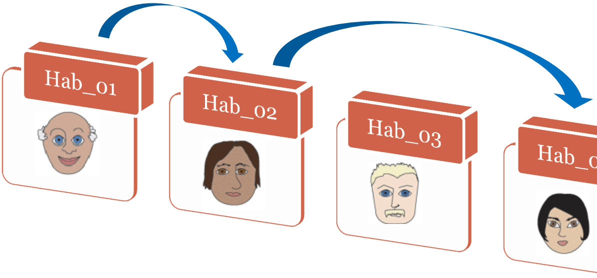
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,



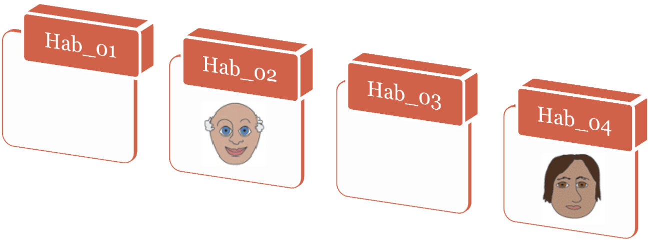
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
    - hay infinitas habitaciones pares,
    - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,



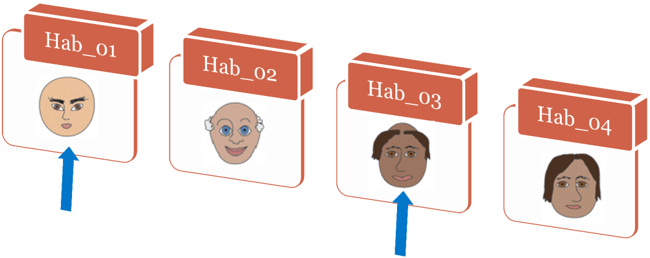
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,



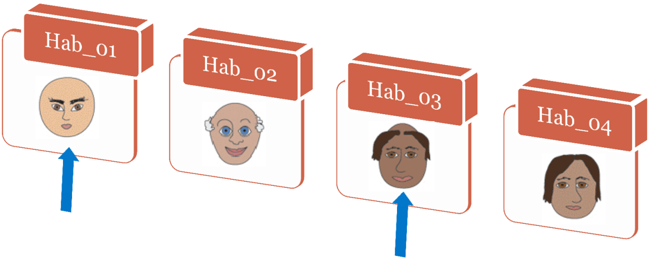
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.



Infinito más infinito igual a infinito

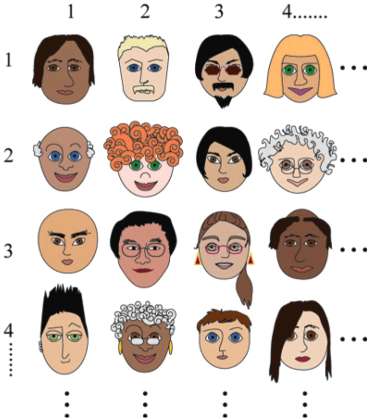
- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
    - hay infinitas habitaciones pares,
    - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
    - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
    - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con cualquier cantidad finita de autobuses.



¡Más difícil todavía!

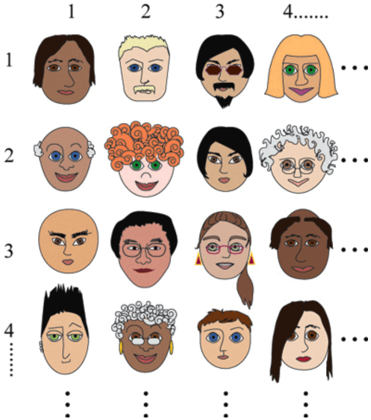
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.



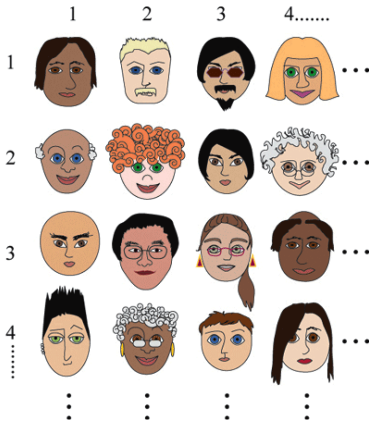
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



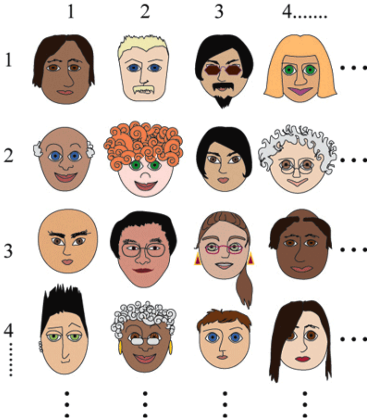
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:



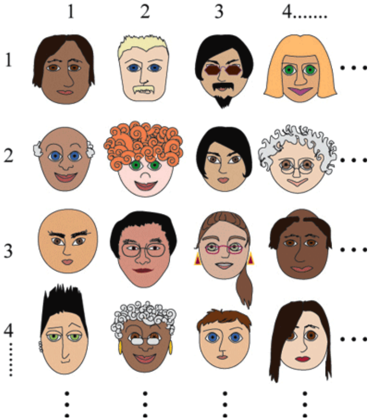
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,



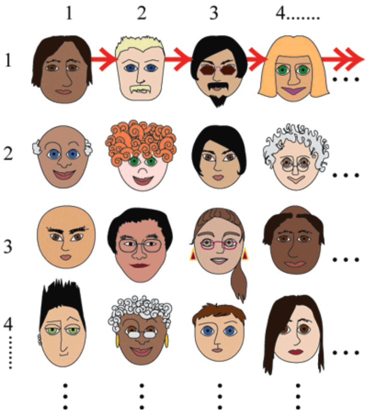
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,



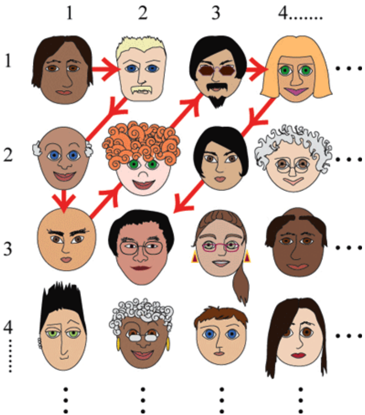
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .



¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .
  - mejor lo hacemos así.



¿Son todos los infinitos iguales?

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
  - $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \colon p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
  - $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.
- ¿Pasará lo mismo con $\mathbb{R}$?

El ejemplo de Cantor

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 0,12567894\ldots \\ 2 & \longrightarrow & 0,83809823\ldots \\ 3 & \longrightarrow & 0,99990023\ldots \\ 4 & \longrightarrow & 0,00012785\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\dots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\dots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\dots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\dots \\
\dots & &
\end{array}$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\dots$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\
\ldots & &
\end{array}
$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\dots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\dots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\dots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\dots \\
\dots & &
\end{array}
$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\dots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, ninguna lista recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego, $\mathbb{R}$ **no** es equivalente a $\mathbb{N}$.

Para terminar: un viejo teorema y un problema abierto

Números primos

Números primos

- Un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\ldots$$

Números primos

- Un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. . .

- No es sencillo saber si un número (grande) es primo o no. A la derecha tenemos los números primos menores que 100 obtenidos mediante la llamada criba de Eratóstenes, que nos permite ir encontrando primos menores que un número dado.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Números primos

- Un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. . .

- No es sencillo saber si un número (grande) es primo o no. A la derecha tenemos los números primos menores que 100 obtenidos mediante la llamada criba de Eratóstenes, que nos permite ir encontrando primos menores que un número dado.
- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo (y que será menor o igual que su raíz cuadrada).

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Números primos

- Un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- No es sencillo saber si un número (grande) es primo o no. A la derecha tenemos los números primos menores que 100 obtenidos mediante la llamada criba de Eratóstenes, que nos permite ir encontrando primos menores que un número dado.
- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo (y que será menor o igual que su raíz cuadrada).
- Actualmente, encontrar números primos grandes tiene utilidad práctica en criptografía.

1	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

¿Cuántos números primos hay?

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

Demostración:

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

Demostración:

- Tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

Demostración:

- Tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
- y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

Demostración:

- Tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
- y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
- Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots p_n$,

¿Cuántos números primos hay?

- Incluso hoy en día no sabemos muchas cosas sobre el conjunto de los números primos, pero hay algo que se sabe desde la antigüedad:

Teorema (Euclides de Alejandría, 330 a.C.–275 a.C.)

El conjunto de los números primos es **infinito**.

Demostración:

- Tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
- y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
- Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots p_n$,
- pero como M tiene que tener un divisor exacto que sea primo, obtenemos un nuevo número primo.

Primos gemelos

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades:
  $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,19\}\ldots$

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades:
  $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,19\}\ldots$
- Estos pares se llaman primos gemelos:
  $\{29,31\}$, $\{41,43\}$, $\{59,61\}$, $\{71,73\}$, $\{101,103\}$, $\{107,109\}$, $\{137,139\}$, $\{149,151\}$, $\{179,181\}$, $\{191,193\}$, $\{197,199\}$, $\{227,229\}$, $\{239,241\}\ldots$

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades: $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,19\}\dots$
- Estos pares se llaman primos gemelos: $\{29,31\}$, $\{41,43\}$, $\{59,61\}$, $\{71,73\}$, $\{101,103\}$, $\{107,109\}$, $\{137,139\}$, $\{149,151\}$, $\{179,181\}$, $\{191,193\}$, $\{197,199\}$, $\{227,229\}$, $\{239,241\}\dots$
- El par de primos gemelos más grandes que se conoce es:

$$\left\{2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1,\ 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1\right\}$$

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades: $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,19\}\dots$
- Estos pares se llaman primos gemelos: $\{29,31\}$, $\{41,43\}$, $\{59,61\}$, $\{71,73\}$, $\{101,103\}$, $\{107,109\}$, $\{137,139\}$, $\{149,151\}$, $\{179,181\}$, $\{191,193\}$, $\{197,199\}$, $\{227,229\}$, $\{239,241\}\dots$
- El par de primos gemelos más grandes que se conoce es:

$$\left\{2996863034895\cdot 2^{1290000}-1,\ 2996863034895\cdot 2^{1290000}+1\right\}$$

Problema abierto

¿Hay infinitos primos gemelos?

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades: $\{3, 5\}$, $\{5, 7\}$, $\{11, 19\}\ldots$
- Estos pares se llaman primos gemelos: $\{29, 31\}$, $\{41, 43\}$, $\{59, 61\}$, $\{71, 73\}$, $\{101, 103\}$, $\{107, 109\}$, $\{137, 139\}$, $\{149, 151\}$, $\{179, 181\}$, $\{191, 193\}$, $\{197, 199\}$, $\{227, 229\}$, $\{239, 241\}\ldots$
- El par de primos gemelos más grandes que se conoce es:

$$\left\{2996863034895 \cdot 2^{1290000} - 1,\ 2996863034895 \cdot 2^{1290000} + 1\right\}$$

Problema abierto

¿Hay infinitos primos gemelos?

- Lo que se sabe actualmente, y sólo desde hace menos de 10 años, es que hay una cota M de manera que el conjunto

$$\left\{(p, q) \colon p, q \text{ primos},\ p < q < p + M\right\}$$

es infinito;

Primos gemelos

- No puede haber más primos consecutivos que el 2 y el 3 (¿por qué?),
- pero hay primos que están separados dos unidades:
  $\{3,5\}$, $\{5,7\}$, $\{11,19\}\dots$
- Estos pares se llaman primos gemelos:
  $\{29,31\}$, $\{41,43\}$, $\{59,61\}$, $\{71,73\}$, $\{101,103\}$, $\{107,109\}$, $\{137,139\}$, $\{149,151\}$, $\{179,181\}$, $\{191,193\}$, $\{197,199\}$, $\{227,229\}$, $\{239,241\}\dots$
- El par de primos gemelos más grandes que se conoce es:

$$\left\{2996863034895\cdot 2^{1290000}-1,\ 2996863034895\cdot 2^{1290000}+1\right\}$$

Problema abierto

¿Hay infinitos primos gemelos?

- Lo que se sabe actualmente, y sólo desde hace menos de 10 años, es que hay una cota M de manera que el conjunto

$$\left\{(p,q)\colon p,q \text{ primos},\ p<q<p+M\right\}$$

  es infinito;
- Algunos valores: $M=70{,}000{,}000$ Yitang Zhang 2013, $M=600$ James Maynard 2015, $M=246$ Terry Tao y otros 2014.

Para saber más

Para saber más...

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Gaussianos
http://gaussianos.com/

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Tocamates *matemáticas y creatividad*
http://www.tocamates.com/

Libros de Adrian Paenza
Se pueden descargar en la **página web de la Universidad de Buenos Aires**
https://cms.dm.uba.ar/material/paenza

Hans Enzensberger
El diablo de los números
Ediciones Siruela, 1998

Jordi Sierra i Fabra
El asesinato del profesor de matemáticas
Anaya, 2002

Jordi Sierra i Fabra
La venganza del profesor de matemáticas
Anaya, 2017