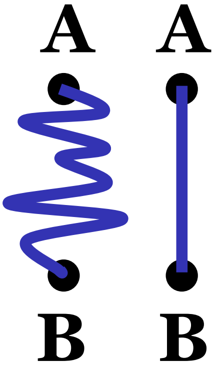


¿Es la línea recta el camino más corto entre dos puntos? ¿Siempre importa la forma de los objetos?

Miguel Martín Suárez
Universidad de Granada

XX Semana de la Ciencia, Noviembre 2020

Organización de la conferencia

Las fotos y gráficos usados en esta conferencia están sacadas de fuentes libres como:

- Wikipedia: https://www.wikipedia.org/
- MacTutor history of Mathematics: https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/
- Gráficos sencillos creados por el autor de la conferencia...

En otros casos, se incluirá referencia explícita a la fuente.

Presentación y esquema de la charla

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Mi campo de estudio es el Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias y en espacios de dimensión infinita y también su "topología".
- **Dejaremos para otro día lo de la dimensión infinita. . .**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Ahora daré ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones**.
- **Finalmente hablaremos de cuándo la forma o la distancia concreta no es importante, esto es, hablaremos de "topología" o "geometría de la posición"**.

“Otras” formas de medir distancias

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

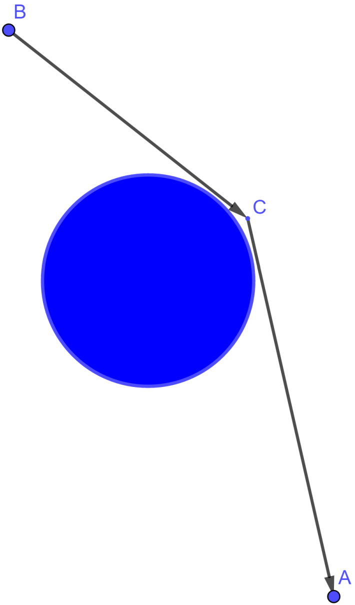
  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está,
  si no hay obstáculos.



¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está,
  si no hay obstáculos.
- ¿Qué pasa en una ciudad?
- ...pues que no siempre podemos ir en línea recta,
- luego tenemos que medir de otra forma.

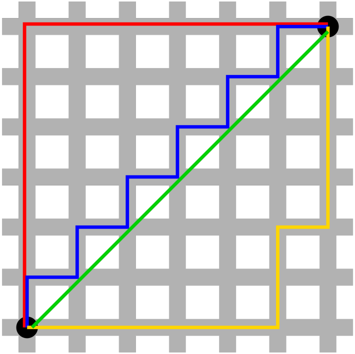
https://wikitravel.org/en/Manhattan_Theater_District

Distancia Manhattan

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

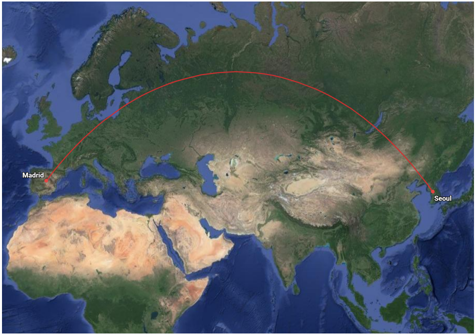
  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Hay **muchos** caminos que realizan la distancia.
- ¿Cuántos?
- Aunque no parezca la distancia más natural, es la más práctica cuando planificamos rutas.



Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

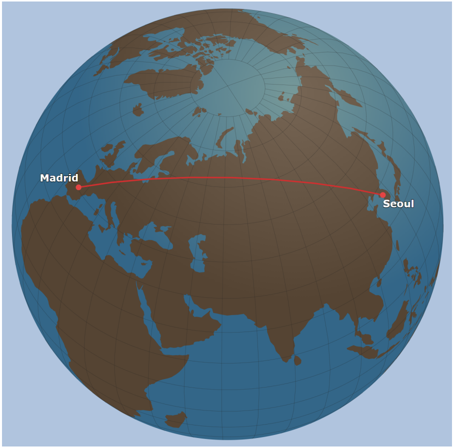
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

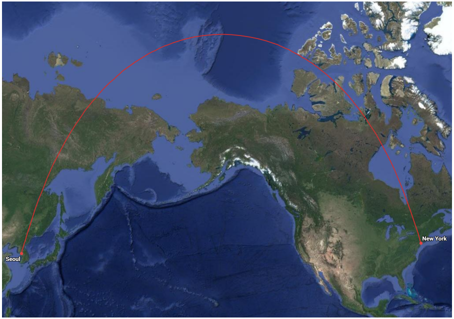
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.

https://www.greatcirclemap.com/

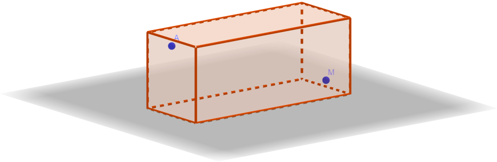
Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.
- las curvas que hacen mínima la distancia en la esfera son los círculos máximos, que se llaman geodésicas.
- Casi siempre son únicas.

https://www.greatcirclemap.com/

Un último problema sobre distancias

- Una araña intenta llegar a una mosca atrapada en su telaraña, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?



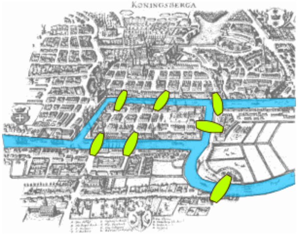
Topología: cuando la forma no importa

Euler y los puentes de Köningsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente?

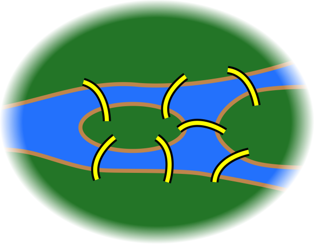
- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.



Euler y los puentes de Köningsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente?



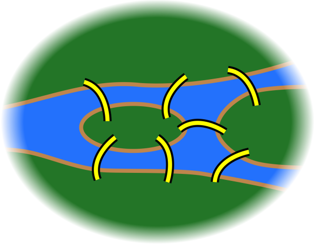
- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.

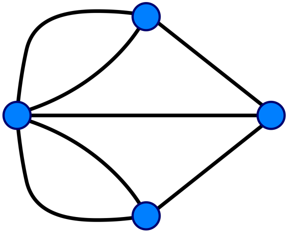
Euler y los puentes de Köningsberg

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente?

- Era un problema de entretenimiento en la corte de Federico el grande de Prusia, que resolvió Leonhard Euler en 1736.
- Su primera observación fue que el problema no depende en absoluto de la forma de las islas o del río o de la tierra, que puede simplificarse a puntos y arcos.
- Queda entonces el siguiente gráfico:
- Y la pregunta es si se puede recorrer este "grafo" pasando por todas las aristas o "arcos" una sola vez (y, por tanto, pasando por todos los vértices o "nodos", aunque necesariamente más de una vez por cada uno, eso no importa).

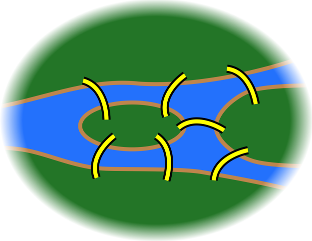




Euler y los puentes de Köningsberg. II

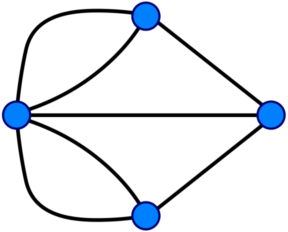
Teorema (Euler, 1736)

NO se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente.



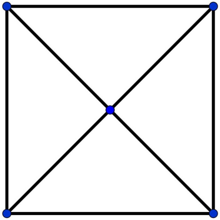
Demostración:

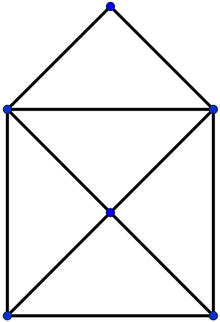
- Imaginemos un camino que recorre todos los puentes una sola vez.
- Salvo en el punto inicial y en el final, en los demás nodos tiene que haber tantos caminos que entran como caminos que salen, distintos.
- Por lo tanto, salvo posiblemente en dos puntos, en los demás nodos el número de arcos que llegan tiene que ser par.
- Eso NO pasa en los puentes de Köningsberg.



Dibujando caminos

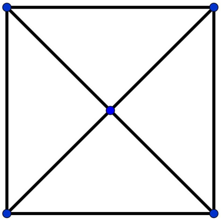
- Se trata de ver cuándo podemos recorrer completamente un grafo pasando por cada arista una sola vez,
- esto es, "dibujando" sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?

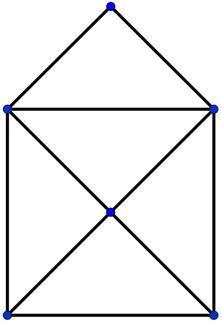




Dibujando caminos

- Se trata de ver cuándo podemos recorrer completamente un grafo pasando por cada arista una sola vez,
- esto es, "dibujando" sin levantar el lápiz, pasando una sola vez por cada arista.
- ¿Se puede o no se puede en estos dos?





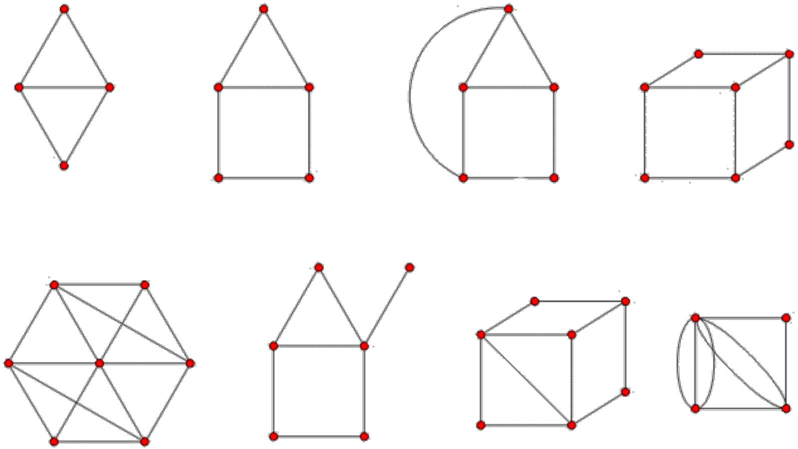
Criterio general

Puede hacerse cuando

- o bien a todos los nodos llegan un número par de aristas,
- o bien a dos nodos llegan un número impar de aristas y a los demás un número par.

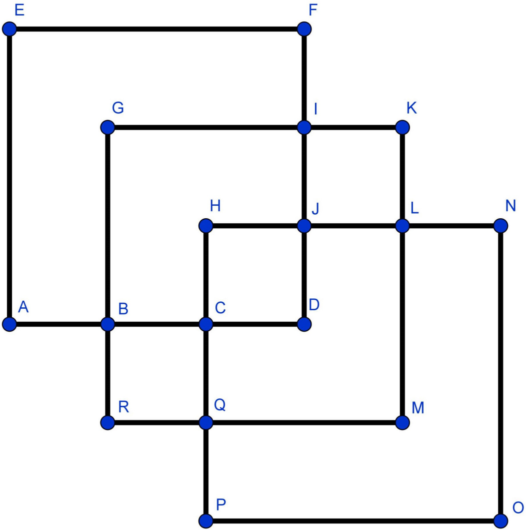
- En el primer caso podemos empezar donde queramos y acabaremos en el mismo sitio,
- En el segundo caso tenemos que empezar en un nodo al que lleguen un número impar de aristas y terminar en el otro.

Dibujando caminos: unos ejemplos



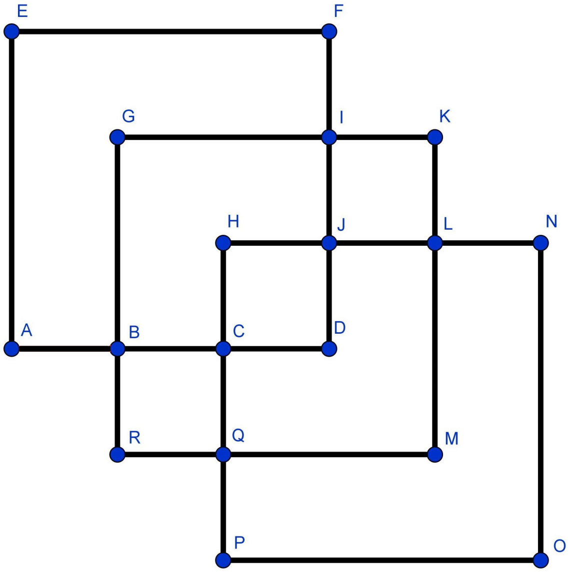
http://sofia.nmsu.edu/˜ pmorandi/CourseMaterials/WalkingSpiders.html

Dibujando caminos: unos ejemplos

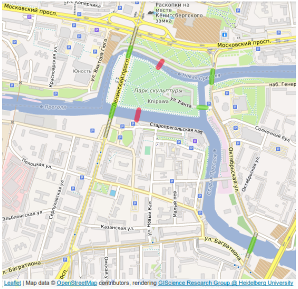


https://elpais.com/elpais/2017/02/15/el_aleph/1487155663_012915.html

Dibujando caminos: el ejemplo resuelto



Euler y los puentes de Köningsberg. III



Problema

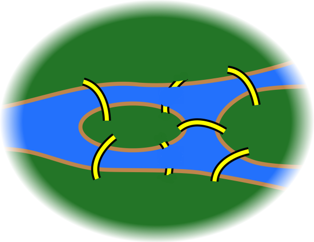
¿Se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?

- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Köningsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.

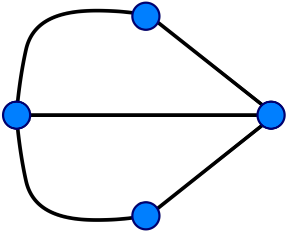
Euler y los puentes de Köningsberg. III

Problema

¿Se pueden atravesar todos los puentes de Köningsberg pasando sólo una vez por cada puente en la actualidad?



- En 1941, durante la Segunda Guerra Mundial, Stalin ordenó el bombardeo de Köningsberg, quedando destruidos dos puentes que no han sido reconstruidos.
- Veámoslo de forma más esquemática...
- ...y en forma de grafo.
- ¿Qué ocurre ahora?
  ¿Se pueden recorrer o no?



Topología

- Estas ideas de Euler dieron lugar a una nueva forma de entender algunos problemas de matemáticas,
- puesto que no siempre la forma concreta (la "geometría", la forma de medir distancias) es relevante.
- Esto es el comienzo de la topología, que Euler definió como la geometría de la posición.
- La topología estudia las propiedades de los cuerpos geométricos que no dependen de la forma concreta si no que se conservan por transformaciones bicontinuas.
- Para la topología, dos objetos son equivalentes si podemos pasar de uno a otro doblando, estirando, encogiendo, retorciendo. . . siempre que no rompamos ni separemos el objeto.

Topología en nuestro día a día

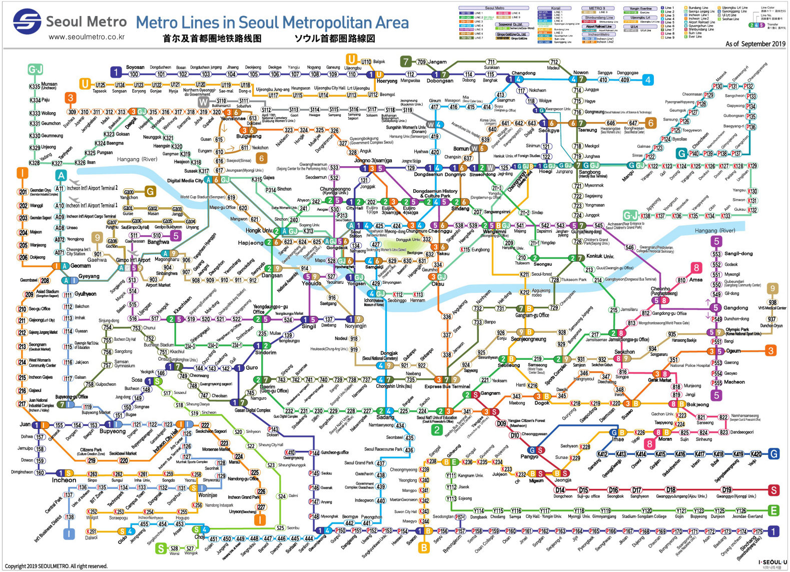
- La idea de que ciertos problemas o cierta información no dependen de la forma concreta de los objetos la usamos constantemente. . .
- ¿Dónde? ¿Cuándo? ¿Cómo?

Topología en nuestro día a día. II

https://planometromadrid.com.es/

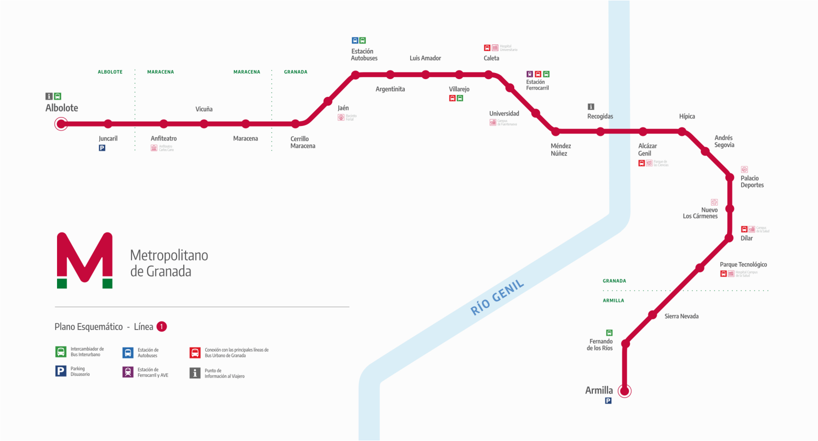
Topología en nuestro día a día. II

Topología en nuestro día a día. II



https://english.visitkorea.or.kr/enu/TRP/TP_ENG_6.jsp

Topología en nuestro día a día. II

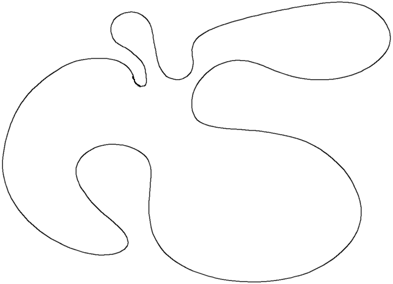


https://ecomovilidad.net/granada/plano-metro-de-granada/

El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

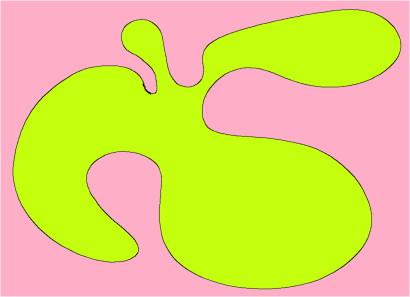
Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel,



El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

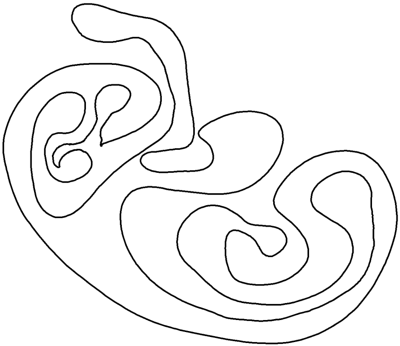


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver. . .

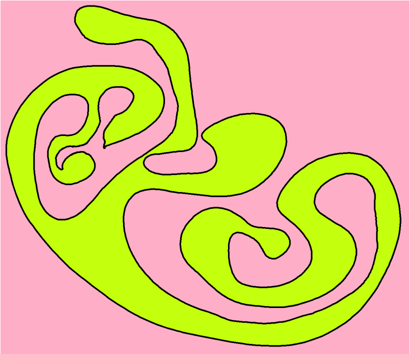


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver. . .

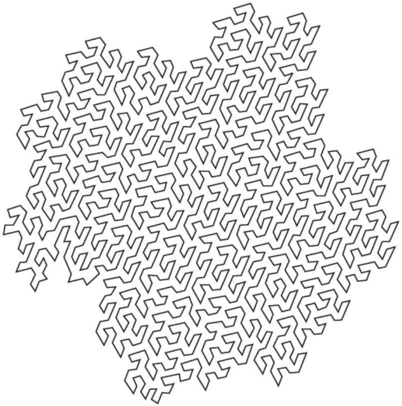


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver. . .
- E incluso parece que podría ser mentira. . .

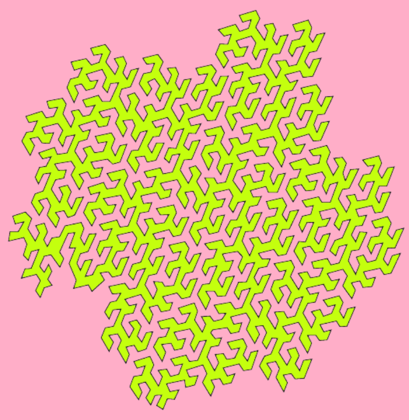


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver. . .
- E incluso parece que podría ser mentira. . . pero no

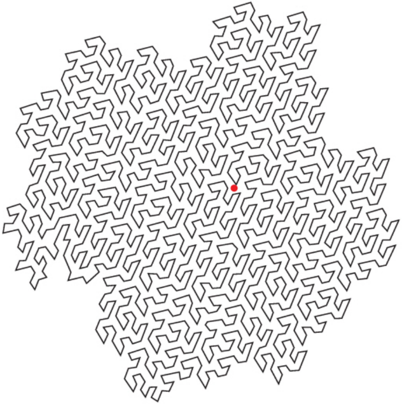


El Teorema de la curva de Jordan

Teorema de la curva de Jordan (Veblen, 1905)

Si dibujamos una curva cerrada sin que se corte a si misma y sin levantar el lápiz del papel, entonces dividimos el plano en dos regiones:
la de dentro y la de fuera.

- No siempre es tan fácil de ver...
- E incluso parece que podría ser mentira... pero no



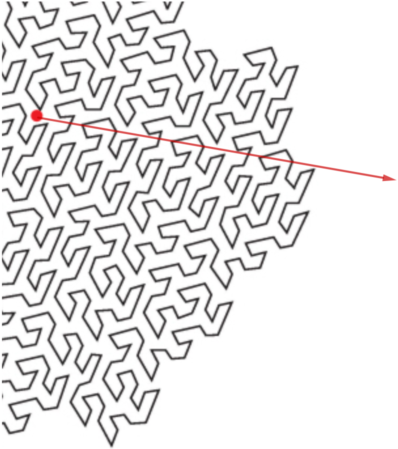
Pregunta

¿Cómo saber si un punto está dentro o está fuera?

- **¡Contando!**

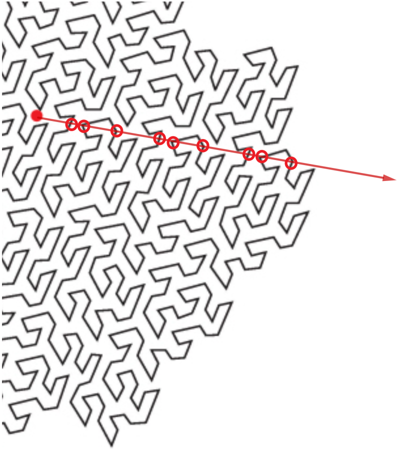
El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que sale del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva



El Teorema de la curva de Jordan. II

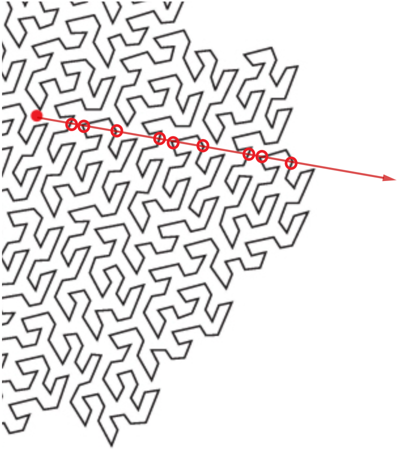
Trazamos una semirrecta que sale del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva

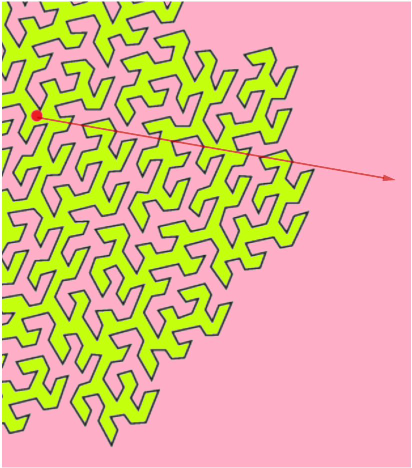


Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

El Teorema de la curva de Jordan. II

Trazamos una semirrecta que sale del punto y **contamos** cuantas veces corta a la curva





Si sale **impar**, **dentro**; si sale **par**, **fuera**.

Un sitio en el que se mezcla todo

Google Maps

- En Google Maps© se mezcla todo lo que hemos contado:
- Se mide usando distintas distancias, porque cada trayecto (y cada medio de transporte) necesita una forma de medir,
- algunas veces las representaciones son geométricas, respetan la forma de la realidad, porque necesitamos orientarnos,
- pero, otras veces da igual y se representa como un camino dentro de un grafo.
- De hecho, si pensamos en cómo funciona Google Maps© por dentro, parece claro que el motor de búsqueda no mira mapas, más bien convierte todas las posibles rutas en un grafo,
- y luego calcula la mejor ruta.
- ¡Pero esto no se hace por fuerza bruta!
- Se usan algoritmos de búsqueda del camino más corto
- ¡Hay muuuuuuucha matemática detrás!

https://www.google.es/maps

Para saber más

Para saber más. . .

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Gaussianos
http://gaussianos.com/

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Tocamates *matemáticas y creatividad*
http://www.tocamates.com/

Edwin A. Abbott
Planilandia: una novela en muchas dimensiones
1884 (se puede encontrar una edición de Editorial Laertes, 2008)

Hans Enzensberger
El diablo de los números
Ediciones Siruela, 1998

Jordi Sierra i Fabra
El asesinato del profesor de matemáticas
Anaya, 2002

Jordi Sierra i Fabra
La venganza del profesor de matemáticas
Anaya, 2017