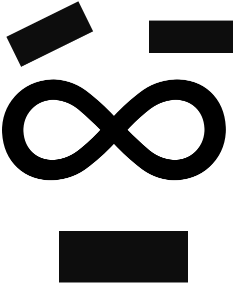


¿Dónde está el infinito?

Miguel Martín Suárez

Universidad de Granada

Viernes, 21 de febrero de 2020, 19:30
Casa de la Cultura, Almuñecar

culturALMUÑÉCAR
Concejalía de Cultura y Fiestas - AYUNTAMIENTO de ALMUÑÉCAR

GOBIERNO DE ESPAÑA MINISTERIO DE CIENCIA, INNOVACIÓN Y UNIVERSIDADES
FECYT FUNDACIÓN ESPAÑOLA PARA LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

ugr Universidad de Granada
Vicerrectorado de Extensión Universitaria
Unidad de Cultura Científica

Organización de la conferencia

1. Preliminares
2. Los procesos infinitos y sus paradojas
3. ¿Cuántos infinitos hay?
4. ¿A qué me dedico? ¿Qué estudio?
5. Para saber más

Presentación

Presentación

- Miguel Martín Suárez

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en espacios de Banach de dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*
- Pero antes, *¿qué es el infinito?*

¿Qué es el infinito?

¿Qué es el infinito?

> *. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.*
>
> *Galileo Galilei (1564–1642)*

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor (1888–1962)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei *(1564–1642)*

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor *(1888–1962)*

El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho, establece una frontera que separa las matemáticas de la lógica (. . .) El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.

Antonio J. Durán *(1962–)*

Definiciones de infinito I

enclave | RAE

Descubra la nueva plataforma de recursos lingüísticos de la RAE

infinito, ta

Del lat. *infinītus.*

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. adj. Muy numeroso o enorme.
3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. m. *Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. *Mat.* Signo (∞) con que se expresa el infinito.
7. adv. Infinita o excesivamente.

línea infinita

proceso en infinito

Definiciones de infinito II

Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathematics
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*
Contribute to *MathWorld*
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

Foundations of Mathematics > Set Theory > Cardinal Numbers >
History and Terminology > *Mathematica* Commands >

Infinity

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

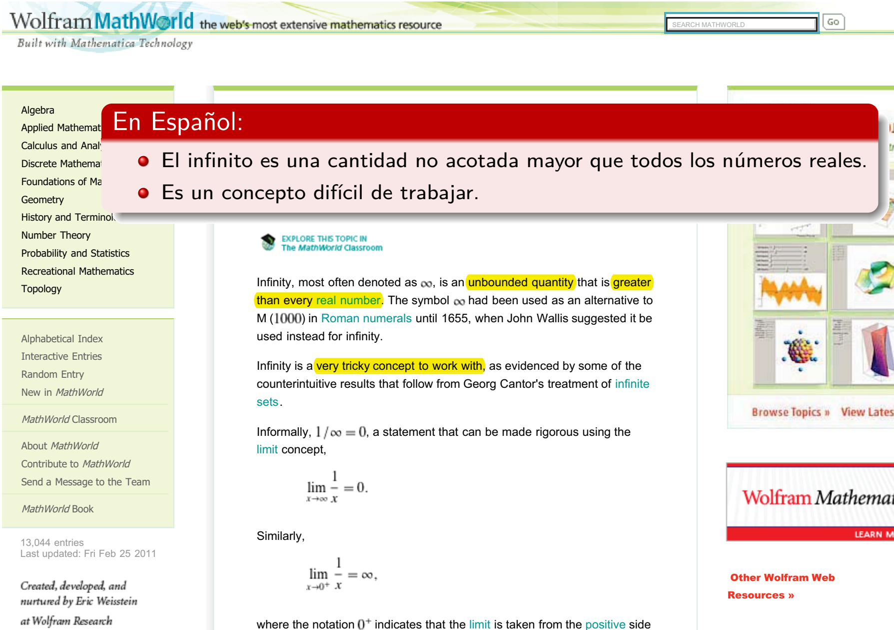
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side

Definiciones de infinito II



Wolfram MathWorld the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathematica Technology

SEARCH MATHWORLD Go

Algebra
Applied Mathemat
Calculus and Analy
Discrete Mathemat
Foundations of Ma
Geometry
History and Terminol
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*
Contribute to *MathWorld*
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side

Browse Topics » View Lates

Wolfram Mathemat

LEARN M

Other Wolfram Web Resources »

En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.

Definiciones de infinito III

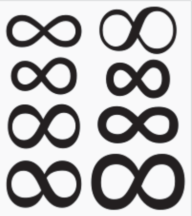
Infinito

Para el canal de televisión por cable, véase Infinito (canal de televisión).

Para el grupo español del mismo nombre, véase Infinito (banda).

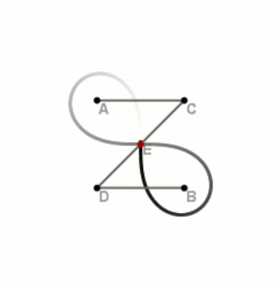
El concepto de **infinito** (símbolo: ∞) aparece en varias ramas de la matemática, la filosofía[1] y la astronomía,[2] en referencia a una cantidad sin límite o sin final, contrapuesto al concepto de finitud.[3]

En matemáticas el infinito aparece de diversas formas: en geometría, el punto al infinito en geometría proyectiva y el punto de fuga en geometría descriptiva; en análisis matemático, los límites infinitos; y en teoría de conjuntos como números transfinitos. Todos estos conceptos son diferentes y no corresponden todos ellos a la misma noción de infinitud.



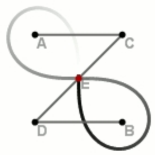
El símbolo de infinito ∞ (Unicode U+221E), también llamado lemniscata,

Sobre el símbolo ∞

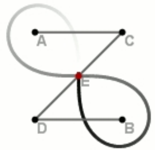


Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto



Sobre el símbolo ∞

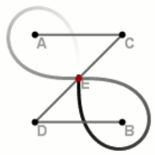


- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin

Sobre el símbolo ∞

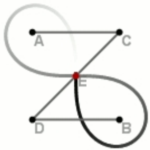


- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor

Sobre el símbolo ∞



- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2+y^2)^2 = x^2 - y^2$$

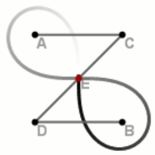
  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido,

Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la letra griega *omega*



ω

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):
  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):
  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

- Georg Cantor (1845–1918):
  Primer estudio sistemático del infinito, aritmética del infinito, números transfinitos... No todos los infinitos son iguales.

Pero. . . ¿existe el infinito?

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
    - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
  - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.
  - los números pares, los números impares, las potencias de 2. . . son todos conjuntos infinitos.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
  - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.
  - los números pares, los números impares, las potencias de $2\ldots$ son todos conjuntos infinitos.
- Hay otro conjunto importante cuya infinitud no es tan obvia: el conjunto de los números primos.

Los números primos son infinitos

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\ldots$$

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
  - Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots p_n$,

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
  - Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots p_n$,
  - pero M tiene que tener un divisor exacto que sea primo, con lo que obtenemos un nuevo número primo.

Los procesos infinitos y sus paradojas

La paradoja de Aquiles y la tortuga

La paradoja de Aquiles y la tortuga

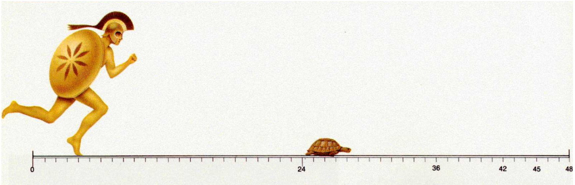
Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

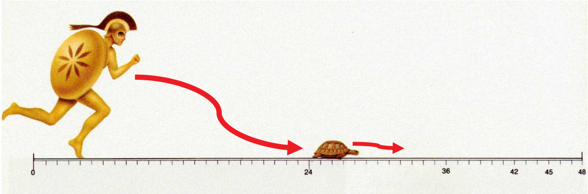
Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



Aquiles y la tortuga II

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que
  el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que
  el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, es decir, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que

  una "suma infinita" de cantidades positivas puede ser finita.

Sumando porciones de pizza I

Sumando porciones de pizza I

Teorema

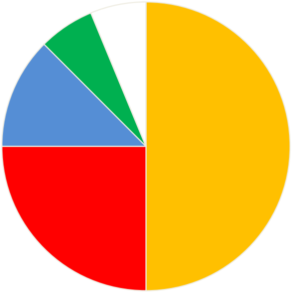
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:

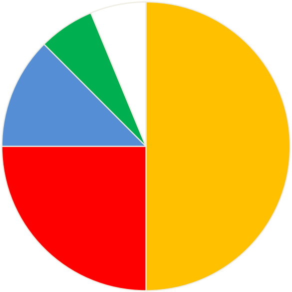


Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



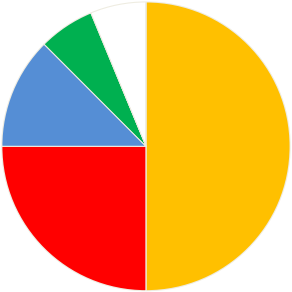
Demostración:

Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



Demostración:

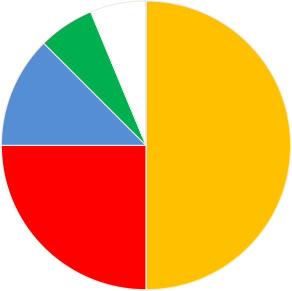
Tomamos una piza

Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



Demostración:

Tomamos una piza

y la vamos partiendo. . .

Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

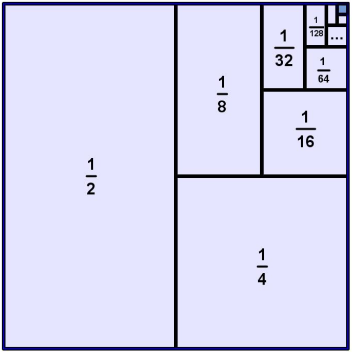
Otra demostración:

Sumando porciones de pizza I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Otra demostración:



Sumando porciones de pizza II

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\ =&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\end{aligned}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
=&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
>&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots
\end{aligned}$$

Sumando porciones de pizza II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

Una última cita sobre Aquiles y la Tortuga

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera? – dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita de distancias?
Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.

Lewis Carroll,
Lo que la Tortuga le dijo a Aquiles, 1894

Repartiendo infinitas monedas

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
    - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,$\ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia?

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, $5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, $5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: $1, 2, 3, 4, 5, \ldots$
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.
- NO ES JUSTO NI EQUITATIVO.

Repartiendo infinitas monedas

- Dos amigos, Natalia y Miguel, se encuentran un cofre lleno de infinitas monedas de oro, numeradas de forma consecutiva: 1, 2, 3, 4, 5,...
- Deciden, como buenos amigos, repartirlas de forma equitativa y justa.
- Natalia propone el siguiente método de reparto:
  - Miguel elige *dos monedas cualesquiera* en cada turno,
  - y entonces Natalia elige *una de las monedas del montón* de Miguel,
  - y siguen así sucesivamente.

¿Es justa la propuesta de Natalia? ¡DEPENDE de cómo se haga!

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 3, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá las monedas impares y Miguel las pares.
- ES JUSTO Y EQUITATIVO.

- Miguel elige las monedas 1 y 2,
- entonces Natalia coge la moneda 1 del montón,
- Miguel elige las monedas 3 y 4,
- entonces Natalia coge la moneda 2, y así sucesivamente.
- Como resultado, Natalia tendrá TODAS LAS MONEDAS y Miguel, NINGUNA.
- NO ES JUSTO NI EQUITATIVO.

¿Qué está pasando aquí?

¿Cuántos infinitos hay?

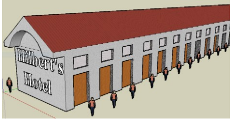
El hotel de Hilbert

El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.

El hotel de Hilbert

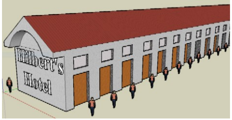
- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.



El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.
- Su lema es

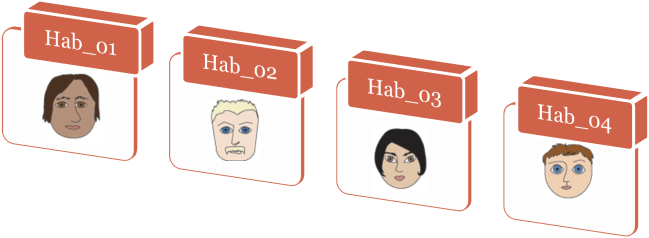
  "Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti".



Infinito más uno igual a infinito

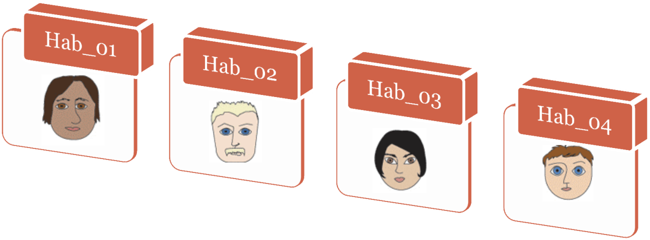
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.



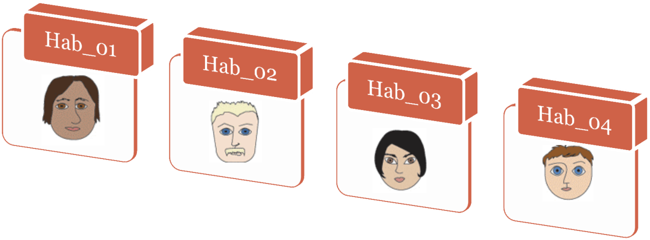
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?



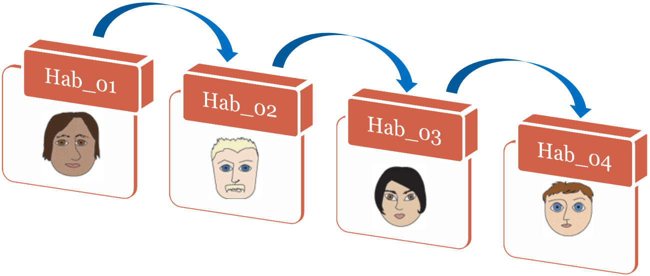
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:



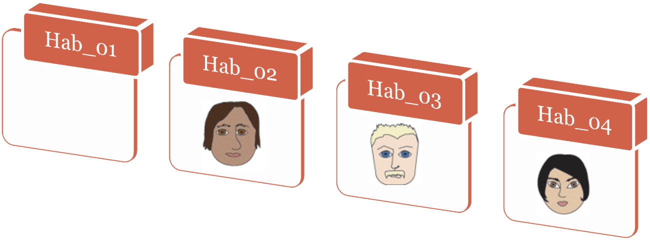
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,



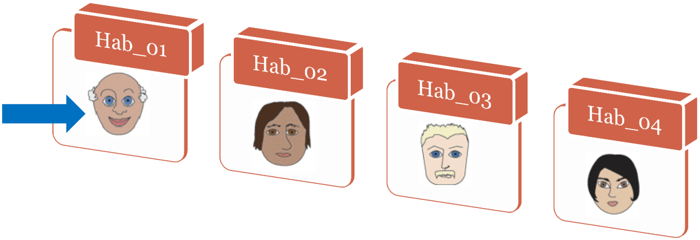
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,



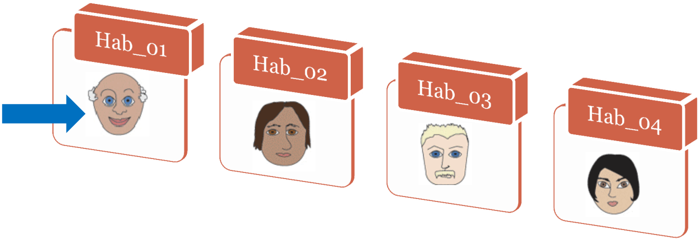
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
    - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
    - lo que deja una habitación libre,
    - que será ocupada por el nuevo huésped.



Infinito más uno igual a infinito

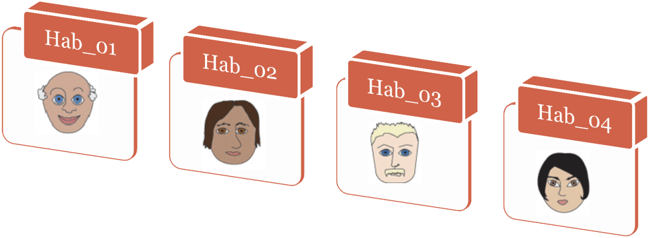
- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a cualquier cantidad finita de nuevos huéspedes.



Infinito más infinito igual a infinito

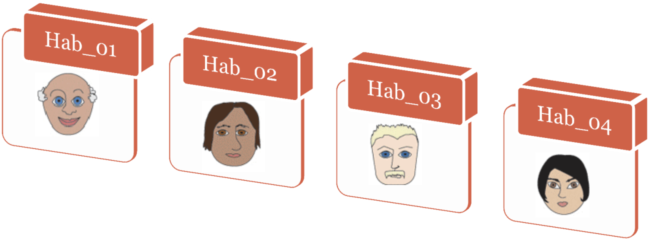
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.



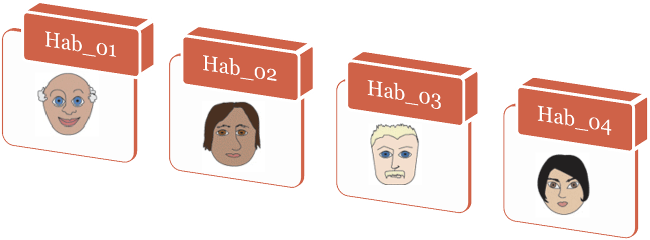
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



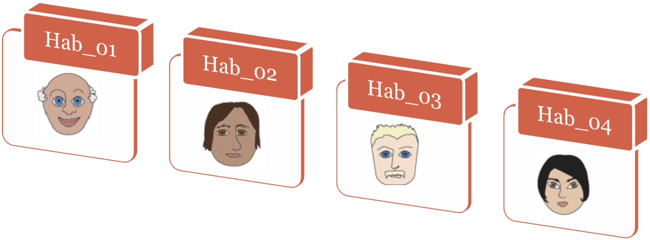
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:



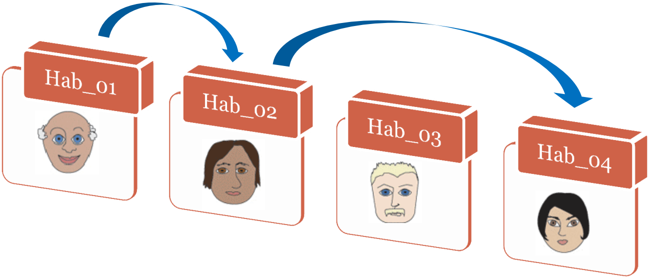
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
    - hay infinitas habitaciones pares,



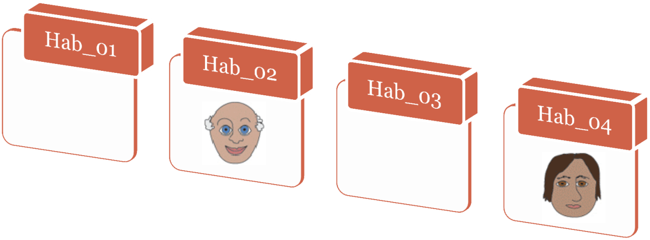
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,



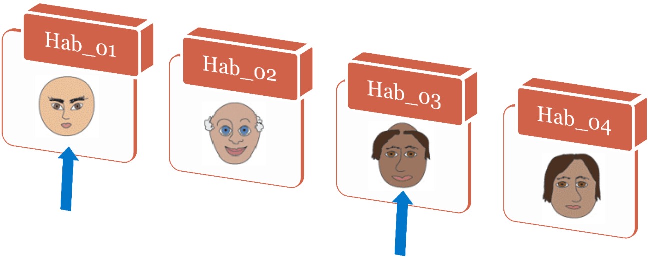
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,



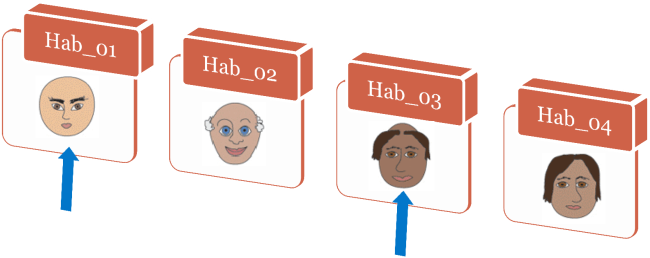
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.



Infinito más infinito igual a infinito

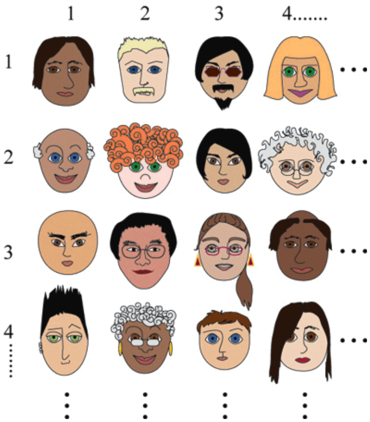
- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con cualquier cantidad finita de autobuses.



¡Más difícil todavía!

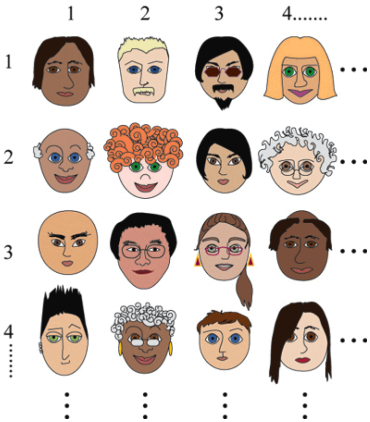
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.



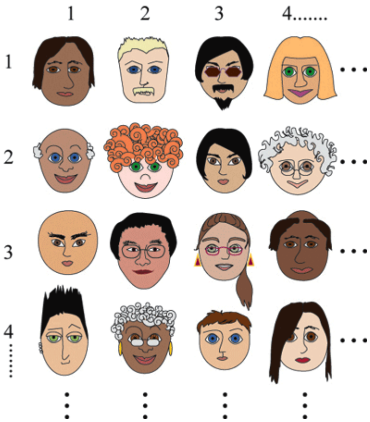
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



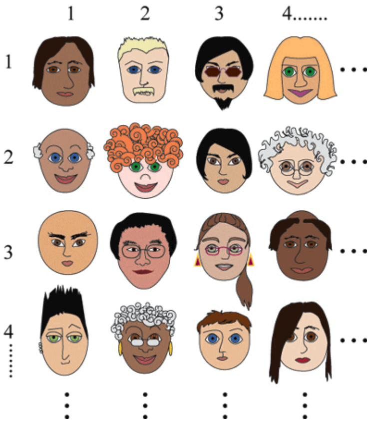
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:



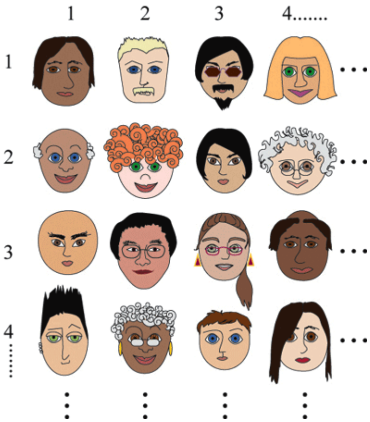
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
    - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,



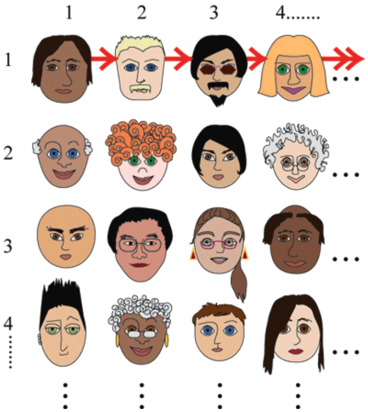
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,



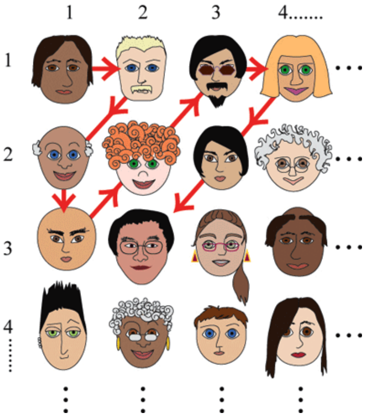
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .



¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
    - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
    - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
    - esto es mala idea. . .
    - mejor lo hacemos así.



¿Son todos los infinitos iguales?

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \;:\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ números naturales;
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ números enteros;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
  - $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.
- ¿Pasará lo mismo con $\mathbb{R}$?

El ejemplo de Cantor

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{ccc}
1 & \longrightarrow & 0,12567894\dots \\
2 & \longrightarrow & 0,83809823\dots \\
3 & \longrightarrow & 0,99990023\dots \\
4 & \longrightarrow & 0,00012785\dots \\
\dots & &
\end{array}
$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\dots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\dots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\dots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\dots \\
\dots & &
\end{array}
$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\dots$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\
\ldots & &
\end{array}
$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{lcl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\
\ldots & &
\end{array}$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, ninguna lista recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego, $\mathbb{R}$ **no** es equivalente a $\mathbb{N}$.

¿A qué me dedico? ¿Qué estudio?

Mi campo de estudio

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita.

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita.
- La "dimensión infinita" NO significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita.

- La "dimensión infinita" NO significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita.
- La "dimensión infinita" NO significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.

Mi campo de estudio

- Mi campo de estudio es el
  Análisis Funcional en espacios de dimensión infinita.
- Podríamos decir que estudio distintas formas de medir distancias en espacios de dimensión infinita.
- La "dimensión infinita" NO significa que los espacios sean infinitos, eso lo son todos los conjuntos interesantes, si no que para representar sus elementos no basta un conjunto finito, esto es, se necesitan bases infinitas.
- **Enseguida intentaré explicar lo que es una base.**
- Aunque pueda parecer extraño, distintos problemas pueden necesitar distintas formas de medir distancias.
- **Un poco después daré ejemplos sencillos de distintas formas de medir distancias y sus posibles aplicaciones.**

¿Qué es una base?

¿Qué es una base?

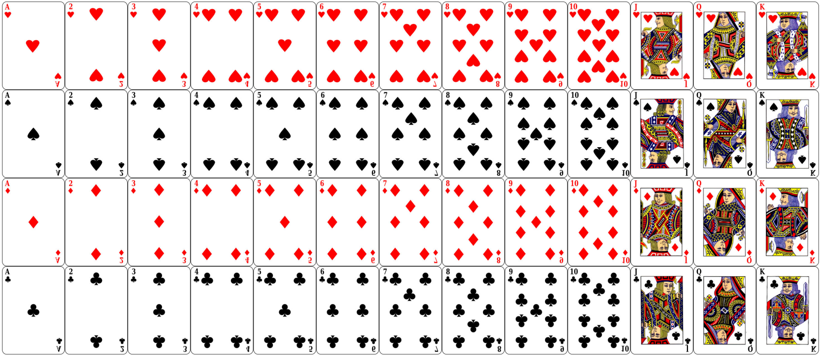
- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.

¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.

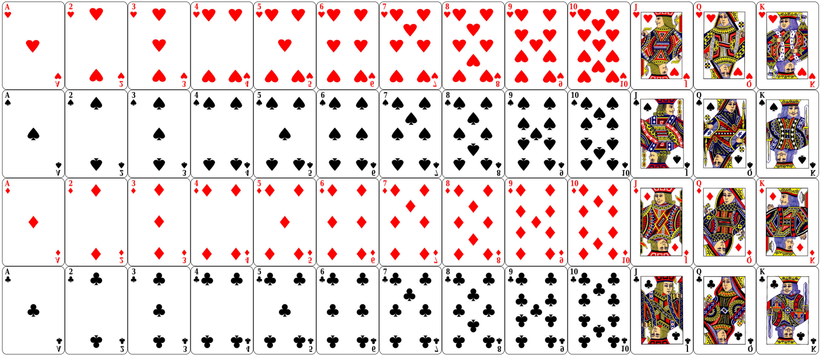
¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.



¿Qué es una base?

- Una **base** de un conjunto es una parte pequeña del conjunto que sirve para representarlo.
- Un ejemplo sencillo lo podemos ver con una baraja de cartas.



- Con 4 cartas "básicas" podemos representar toda la baraja.

Bases infinitas

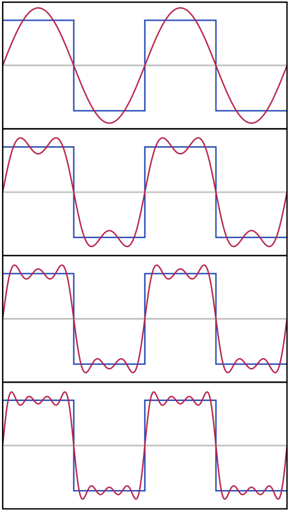
Bases infinitas

- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).

Bases infinitas

- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
- Las llamadas Series de Fourier permiten representar cualquier onda como una suma infinita de funciones sinusoidales:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \,+\, b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right]$$



Bases infinitas

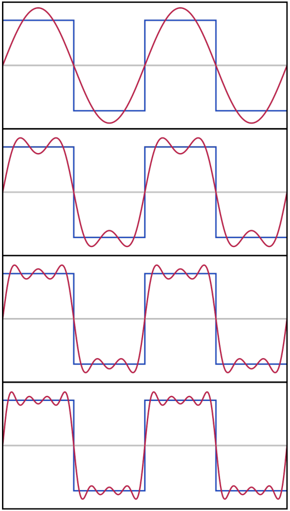
- Quizá el primer ejemplo importante de base infinita se deba a Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768–1830).
- Las llamadas Series de Fourier permiten representar cualquier onda como una suma infinita de funciones sinusoidales:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \,+\, b_n \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right]$$

- Los números $a_0, a_1, \ldots$ y $b_1, b_2, \ldots$ se llaman coeficientes de Fourier y el conjunto de funciones

$$\left\{ \cos \frac{2n\pi}{T} t,\ \operatorname{sen} \frac{2n\pi}{T} t \ :\ n \in \mathbb{N} \right\}$$

es una base (infinita) del espacio de las ondas con energía finita.



¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

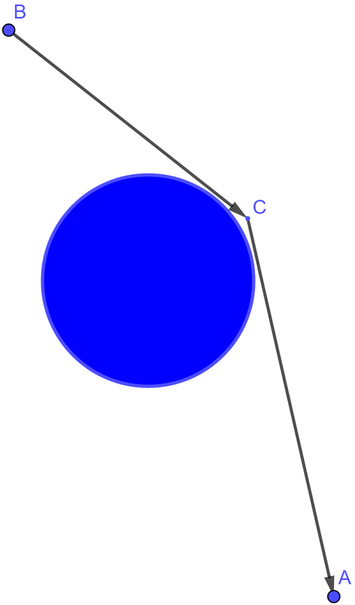
  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está, **si no hay obstáculos**.



¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está,
  si no hay obstáculos.
- ¿Qué pasa en una ciudad?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

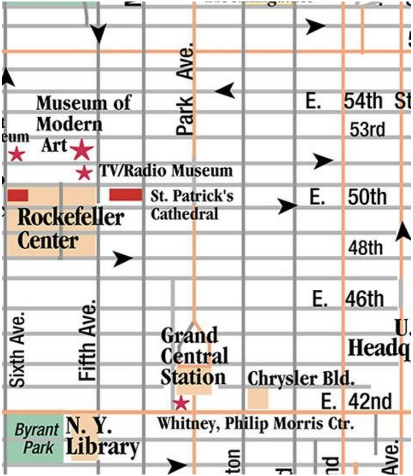
- Eso, claro está, **si no hay obstáculos**.
- ¿Qué pasa en una ciudad?

¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está,
  si no hay obstáculos.
- ¿Qué pasa en una ciudad?
- . . . pues que no siempre podemos ir en línea recta,

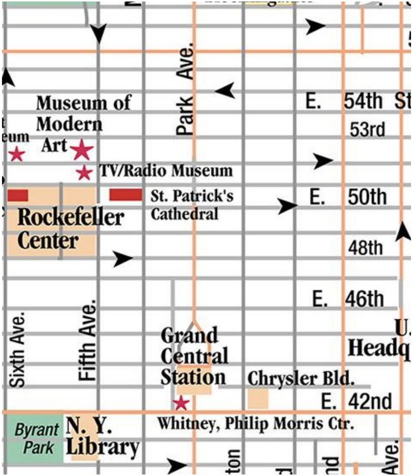


¿Por qué necesitamos otras formas de medir distancias?

- Estamos acostumbrados a medir distancias con la medida Euclídea:

  la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta y, además, *sólo hay un camino con distancia mínima*.

- Eso, claro está, **si no hay obstáculos**.
- ¿Qué pasa en una ciudad?
- . . . pues que no siempre podemos ir en línea recta,
- luego tenemos que medir de otra forma.



Dos distancias en el plano

Dos distancias en el plano

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

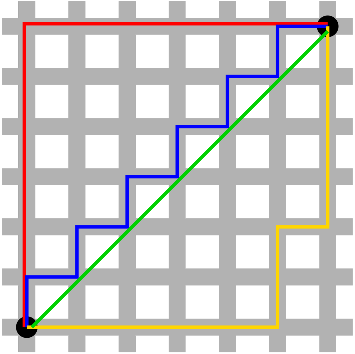
  distancia Manhattan o *distancia taxi*

Dos distancias en el plano

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.

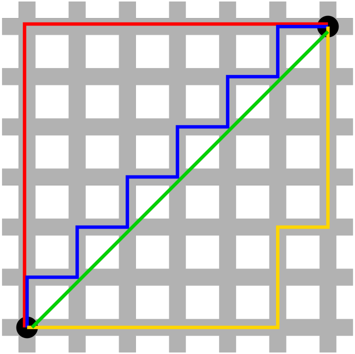


Dos distancias en el plano

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Hay **muchos** caminos que realizan la distancia.



Dos distancias en el plano

- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Hay **muchos** caminos que realizan la distancia.
- Otra forma de medir es la

  distancia Chebyshev o *paso de rey (ajedrez)*.

Dos distancias en el plano

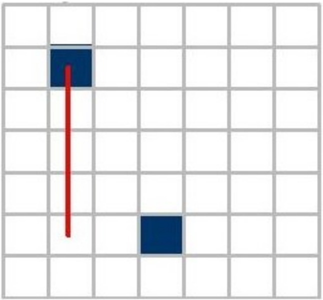
- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Hay **muchos** caminos que realizan la distancia.
- Otra forma de medir es la

  distancia Chebyshev o *paso de rey (ajedrez)*.

- Consiste en tomar el número más grande entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.



Dos distancias en el plano

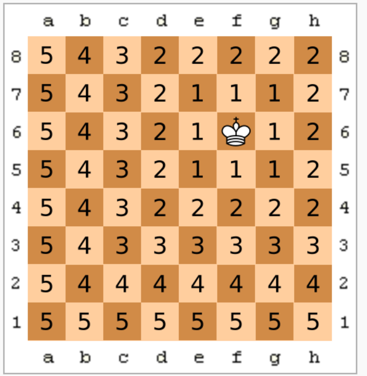
- En una ciudad cuadriculada, se miden los caminos usando la llamada

  distancia Manhattan o *distancia taxi*

- consiste en sumar lo que se anda en horizontal más lo que se anda en vertical.
- Hay **muchos** caminos que realizan la distancia.
- Otra forma de medir es la

  distancia Chebyshev o *paso de rey (ajedrez)*.

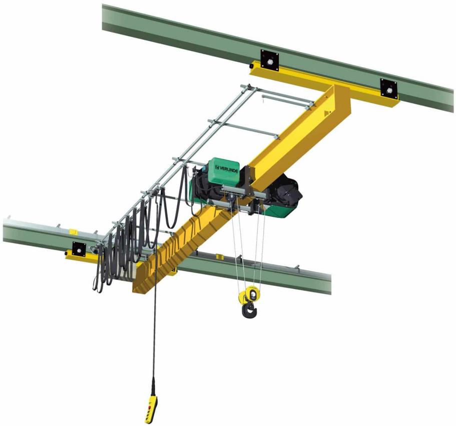
- Consiste en tomar el número más grande entre el movimiento horizontal y el movimiento vertical.
- En un tablero de ajedrez, mide los movimientos necesarios para que el rey vaya de una casilla a otra.



Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

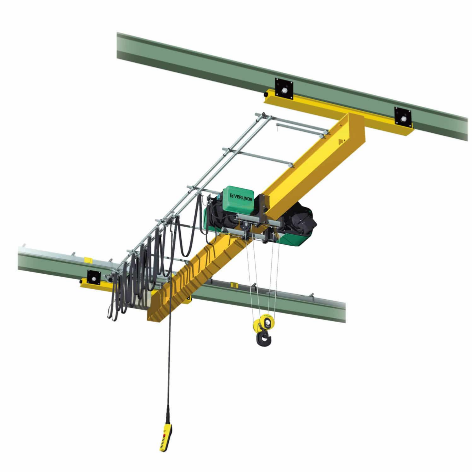
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida...



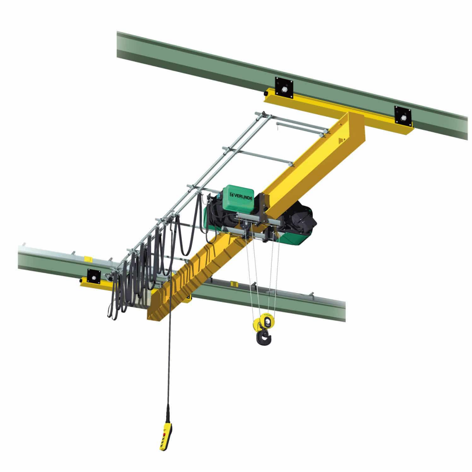
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, que pueden darse a la vez.



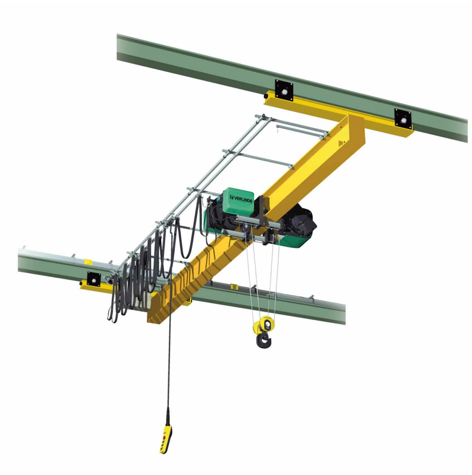
Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

- Consideremos una grúa suspendida...
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, que pueden darse a la vez.
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la distancia del paso del rey.



Una grúa suspendida: optimizando el tiempo o la energía

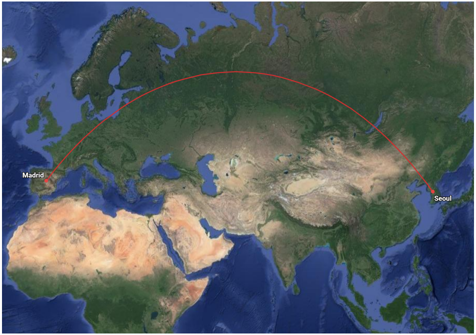
- Consideremos una grúa suspendida. . .
- tiene dos posibles movimientos en el plano del techo, que pueden darse a la vez.
- Si medimos el tiempo que se tarda en llegar de un punto a otro, aparece la distancia del paso del rey.
- Si medimos el gasto de energía (el movimiento de los dos motores), aparece la distancia Manhattan.



Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

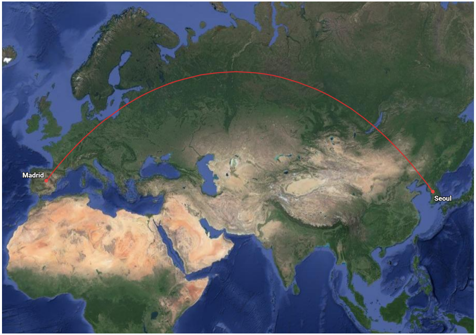
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

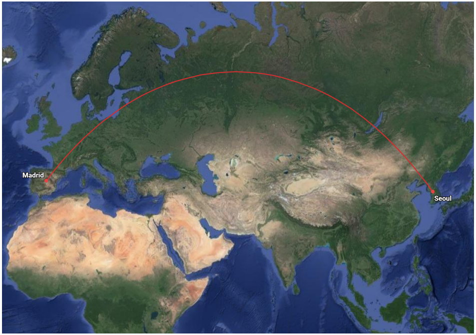
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

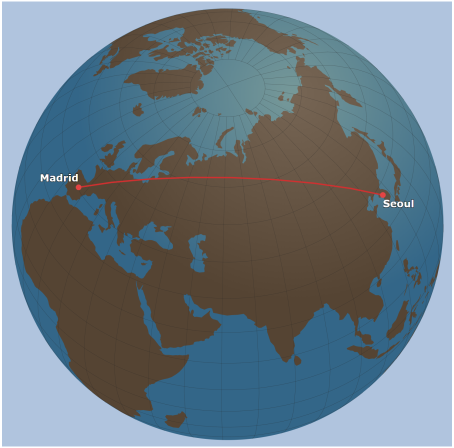
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

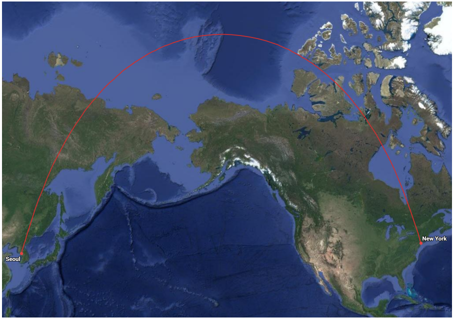
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano



https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.

https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.
- las curvas que hacen mínima la distancia en la esfera son los círculos máximos, que se llaman geodésicas.

https://www.greatcirclemap.com/

Trayectorias de aviones: geodésicas en la esfera

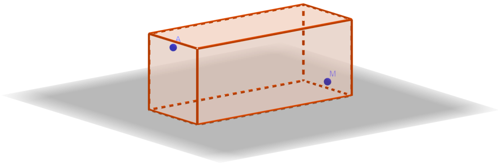
- Veamos la ruta que sigue un avión de Madrid a Seúl (Corea del Sur):
- no sigue la línea recta del plano (que sería casi un paralelo)
- ¿Por qué será esto?
- Si lo miramos en la esfera en lugar de mirarlo en el plano, obtenemos la respuesta.
- Otro ejemplo más extremo: de Seúl a Nueva York: plano y esfera.
- las curvas que hacen mínima la distancia en la esfera son los círculos máximos, que se llaman geodésicas.
- Casi siempre son únicas.

https://www.greatcirclemap.com/

Un último problema

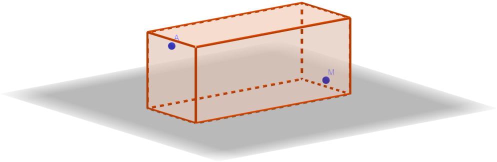
Un último problema

- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.



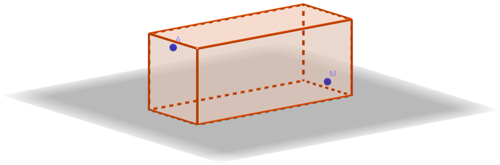
Un último problema

- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?



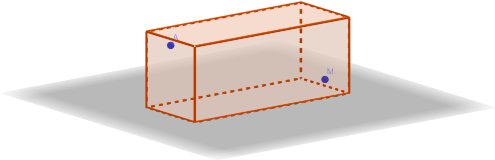
Un último problema

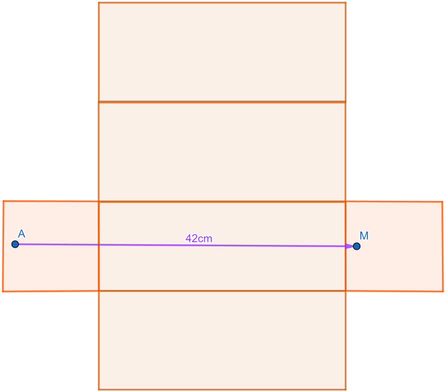
- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco. . .



Un último problema

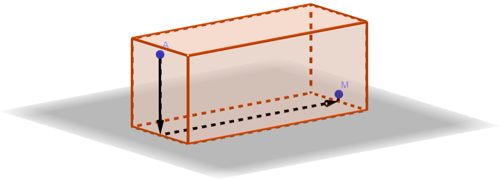
- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco. . .
- Opción natural:

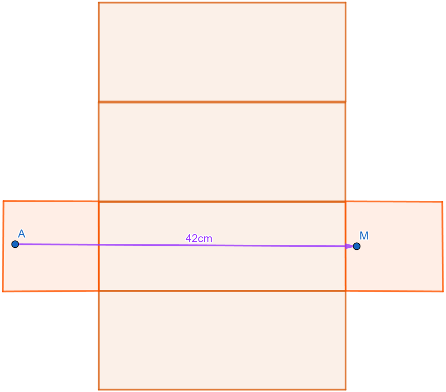




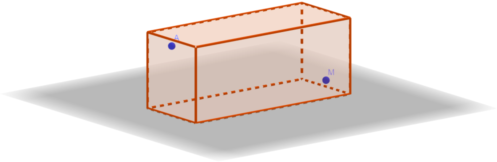
Un último problema

- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco. . .
- Opción natural:





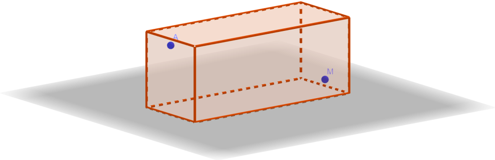
Un último problema

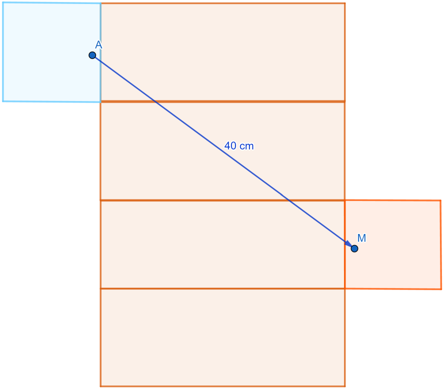


- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco. . .
- Opción natural:

Un último problema

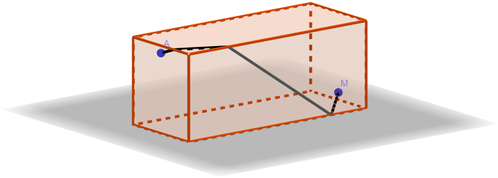
- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco. . .
- Opción natural:
- Otra opción mejor. . .

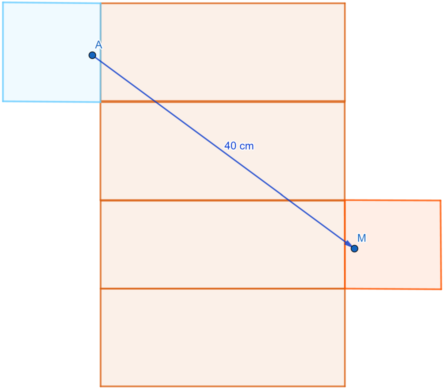




Un último problema

- Una araña intenta cazar a una mosca, ambas en una caja de $30 \times 12 \times 12$, y sólo puede andar por las paredes de la caja. La mosca está a 1cm del borde inferior y la araña a 1cm del borde superior, ambas en el medio de las respectivas caras laterales.
- ¿Cuál es el camino más rápido para cazar a la mosca?
- Pensemos un poco...
- Opción natural:
- Otra opción mejor...





Para saber más

Para saber más...

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Gaussianos
http://gaussianos.com/

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Tocamates *matemáticas y creatividad*
http://www.tocamates.com/

Edwin A. Abbott
Planilandia: una novela en muchas dimensiones
1884 (se puede encontrar una edición de Editorial Laertes, 2008)

Hans Enzensberger
El diablo de los números
Ediciones Siruela, 1998

Jordi Sierra i Fabra
El asesinato del profesor de matemáticas
Anaya, 2002

Jordi Sierra i Fabra
La venganza del profesor de matemáticas
Anaya, 2017