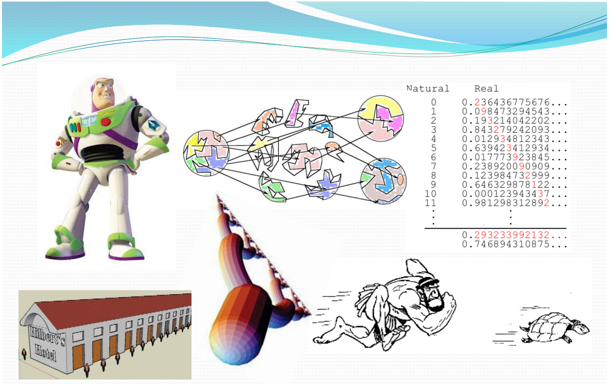
¡Hasta el infinito y más allá!

Miguel Martín (Universidad de Granada)

http://www.ugr.es/local/mmartins



XIX Semana de la Ciencia 2019, Facultad de Ciencias, Universidad de Granada

Organización de la conferencia

Presentación

Presentación

- Miguel Martín Suárez

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en dimensión infinita

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Catedrático del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Campo de trabajo:
  Análisis Funcional en dimensión infinita
- Y, *¿qué es eso de la dimensión infinita?*
- Pero antes, *¿qué es el infinito?*

¿Qué es el infinito?

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert (1862–1943)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert (1862–1943)

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor (1888–1962)

¿Qué es el infinito?

. . . intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei (1564–1642)

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert (1862–1943)

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor (1888–1962)

El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho, establece una frontera que separa las matemáticas de la lógica (. . .) El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.

Antonio J. Durán (1962–)

Definiciones de infinito I

enclave | RAE

Descubra la nueva plataforma de recursos lingüísticos de la RAE

infinito, ta

Del lat. *infinītus.*

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. adj. Muy numeroso o enorme.
3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. m. *Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. m. *Mat.* Signo (∞) con que se expresa el infinito.
7. adv. Infinita o excesivamente.

línea infinita

proceso en infinito

Definiciones de infinito II

WolframMathWorld the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathematica Technology

SEARCH MATHWORLD Go

Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathematics
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*
Contribute to *MathWorld*
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

Foundations of Mathematics > Set Theory > Cardinal Numbers >
History and Terminology > *Mathematica* Commands >

Infinity

EXPLORE THIS TOPIC IN
The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

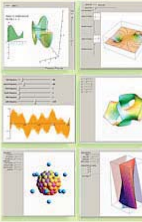
$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side

WOLFRAM
DEMONSTRATIONS PROJ
6000+ Free Interactive Demonstr

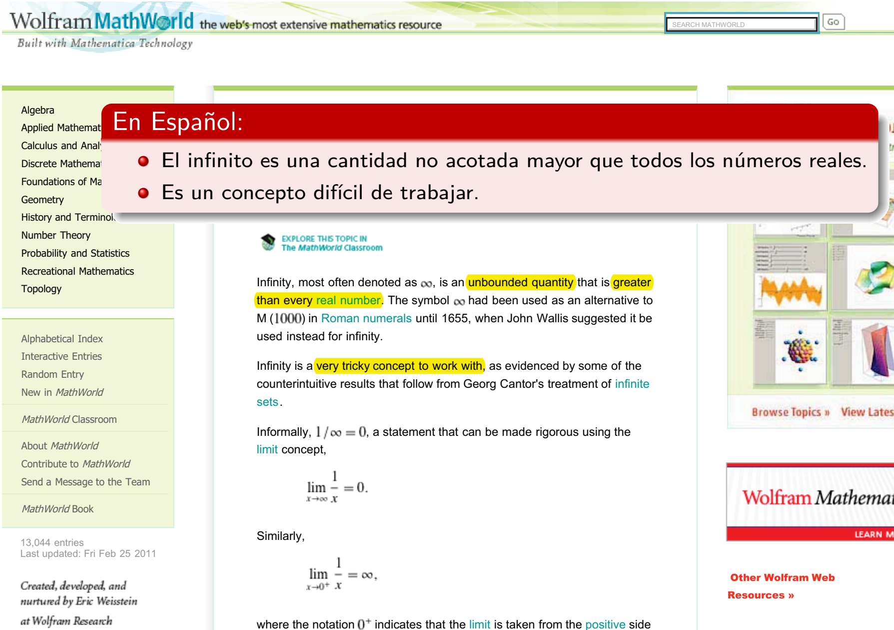


Browse Topics » View Lates

Wolfram Mathemat
LEARN M

Other Wolfram Web Resources »

Definiciones de infinito II



Wolfram MathWorld the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathematica Technology

Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathematics
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*
Contribute to *MathWorld*
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side

Browse Topics » View Lates

Wolfram Mathemat

LEARN M

Other Wolfram Web Resources »

En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.

Definiciones de infinito III

WIKIPEDIA
La enciclopedia libre

No has iniciado sesión Discusión Contribuciones Crear una cuenta Acceder

Artículo Discusión Leer Editar Ver historial Buscar Ir

Portada
Portal de la comunidad
Actualidad
Cambios recientes
Páginas nuevas
Página aleatoria
Ayuda
Donaciones
Notificar un error

Imprimir/exportar
Crear un libro
Descargar como PDF
Versión para imprimir

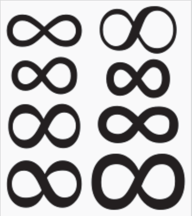
Infinito

Para el canal de televisión por cable, véase Infinito (canal de televisión).

Para el grupo español del mismo nombre, véase Infinito (banda).

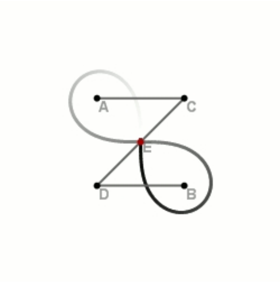
El concepto de **infinito** (símbolo: ∞) aparece en varias ramas de la matemática, la filosofía[1] y la astronomía,[2] en referencia a una cantidad sin límite o sin final, contrapuesto al concepto de finitud.[3]

En matemáticas el infinito aparece de diversas formas: en geometría, el punto al infinito en geometría proyectiva y el punto de fuga en geometría descriptiva; en análisis matemático, los límites infinitos; y en teoría de conjuntos como números transfinitos. Todos estos conceptos son diferentes y no corresponden todos ellos a la misma noción de infinitud.



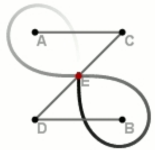
El símbolo de infinito ∞ (Unicode U+221E), también llamado lemniscata,

Sobre el símbolo ∞



Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto

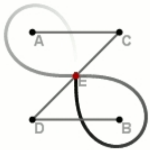


Sobre el símbolo ∞

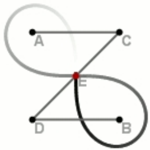
- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin



Sobre el símbolo ∞



- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

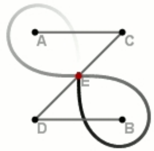
  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor

Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido,

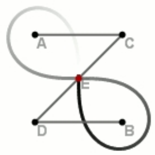


Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin
- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la letra griega *omega*



ω

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

- Georg Cantor (1845–1918):

  Primer estudio sistemático del infinito, aritmética del infinito, números transfinitos. . . No todos los infinitos son iguales.

Pero. . . ¿existe el infinito?

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
  - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
  - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.
  - los números pares, los números impares, las potencias de $2 \ldots$ son todos conjuntos infinitos.

Pero. . . ¿existe el infinito?

- Hay controversia científica sobre si el Universo es finito o infinito, hay diversas teorías e hipótesis sobre esto.
- Pero, en cualquier caso, nuestra aritmética lleva inmediatamente a la existencia de conjuntos infinitos:
  - los números naturales son infinitos: sumemos uno al más grande que conozcamos y obtenemos otro mayor.
  - los números pares, los números impares, las potencias de 2. . . son todos conjuntos infinitos.
- Hay otro conjunto importante cuya infinitud no es tan obvia: el conjunto de los números primos.

Los números primos son infinitos

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  $$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29 \ldots$$

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29. . .

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \dots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
  - Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \dots p_n$,

Los números primos son infinitos

- Recordemos que un número natural es primo si es mayor que 1 y no tiene más divisores exactos que 1 y él mismo:

  2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29...

- Observemos que si un número no es primo, entonces tiene un divisor exacto que es primo.
- Euclides de Alejandría (330 a.C.–275 a.C.) demostró que el conjunto de números primos es infinito:
  - tomemos un conjunto finito $p_1, p_2, \ldots, p_n$ de números primos
  - y consideremos el número $M = p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_n + 1$;
  - Entonces, M no es divisible por ninguno de los primos $p_1, p_2, \ldots p_n$,
  - pero M tiene que tener un divisor exacto que sea primo, con lo que obtenemos un nuevo número primo.

Los procesos infinitos y sus paradojas

La paradoja de Aquiles y la tortuga

La paradoja de Aquiles y la tortuga

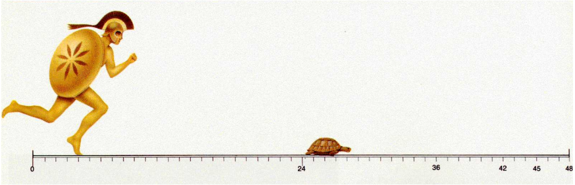
Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

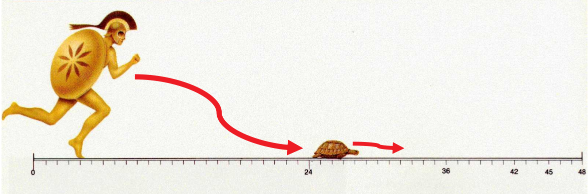
Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



Aquiles y la tortuga II

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que
el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que
el "infinito" no puede ser alcanzado:
    - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (¡falso!)

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que
  el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que

  una "suma infinita" de cantidades positivas puede ser finita.

Sumando cuñas de queso I

Sumando cuñas de queso I

Teorema

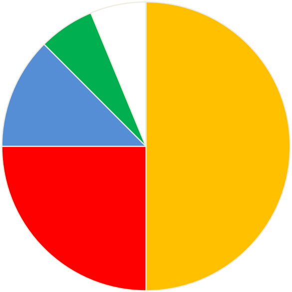
$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:

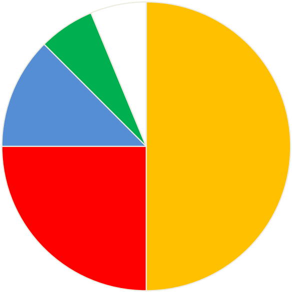


Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



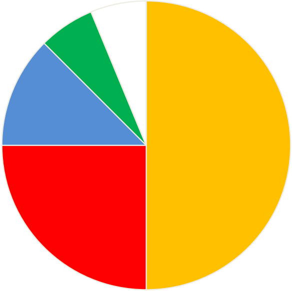
Demostración:

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



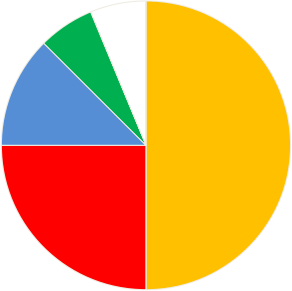
Demostración:
Tomamos un queso

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Gráficamente:



Demostración:
Tomamos un queso

y lo vamos partiendo. . .

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

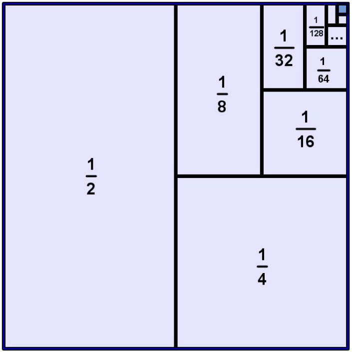
Otra demostración:

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \cdots$$

Otra demostración:



Sumando cuñas de queso II

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\ =&\ \frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \\ =&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \\ >&\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots \end{aligned}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

Una última cita sobre Aquiles y la Tortuga

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera? – dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita de distancias?
Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.

Lewis Carroll, Lo que la Tortuga le dijo a Aquiles, 1894

Manejando el infinito

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la inducción matemática,

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la inducción matemática, que consiste en llegar al infinito *pasito a pasito*, como en un efecto dominó.

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la inducción matemática, que consiste en llegar al infinito *pasito a pasito*, como en un efecto dominó.

Se demuestran por inducción cosas tan diversas como

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la inducción matemática, que consiste en llegar al infinito *pasito a pasito*, como en un efecto dominó.

Se demuestran por inducción cosas tan diversas como

- la suma de los primeros n números vale $\dfrac{n(n+1)}{2}$,
- la suma de los n primeros impares es n^2,
- el binomio de Newton,
- el último teorema de Fermat: para $n \geqslant 3$, no existen x, y, z naturales tales que $x^n + y^n = z^n$.

¿Cuántos infinitos hay?

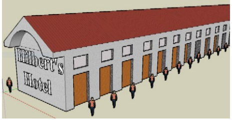
El hotel de Hilbert

El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.

El hotel de Hilbert

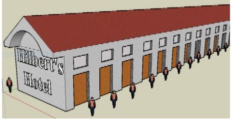
- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.



El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.
- Su lema es

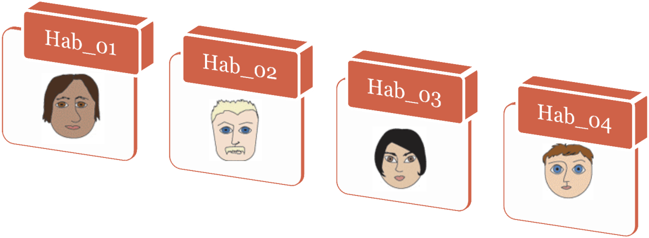
  "Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti".



Infinito más uno igual a infinito

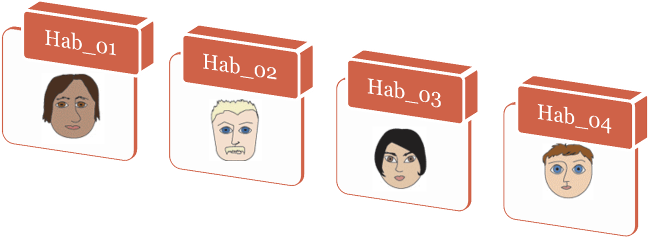
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.



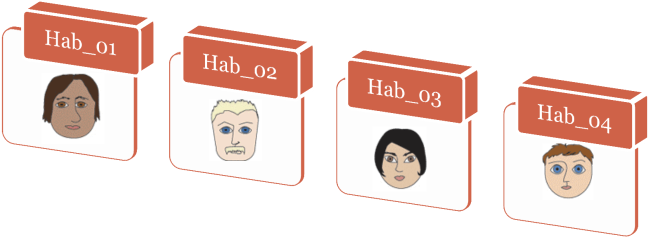
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?



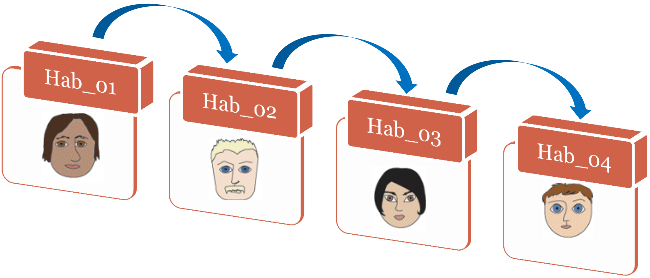
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:



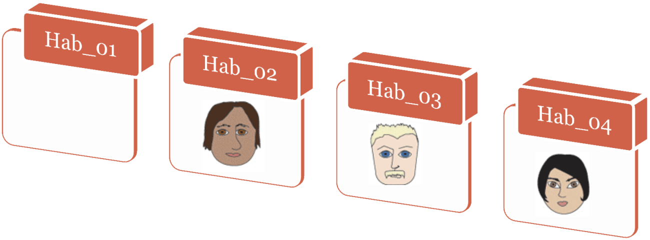
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,



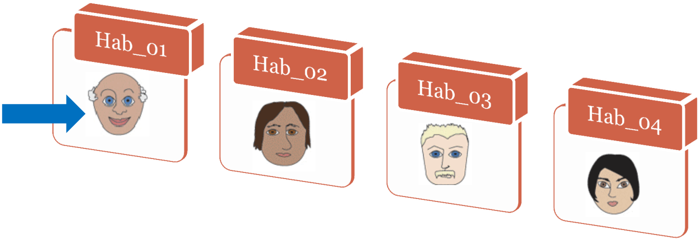
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,



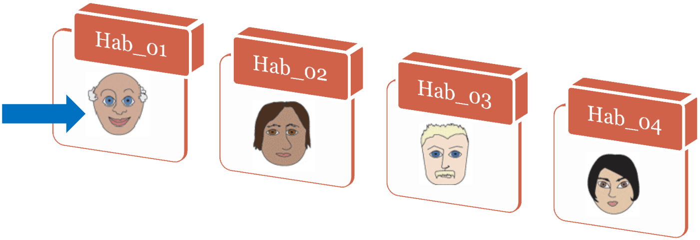
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.



Infinito más uno igual a infinito

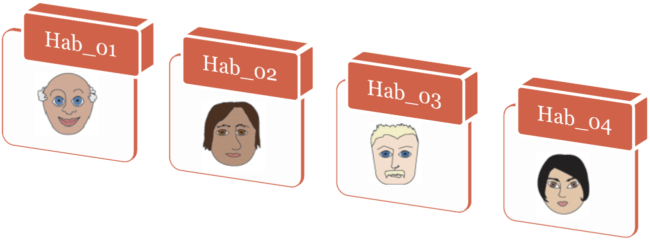
- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a cualquier cantidad finita de nuevos huéspedes.



Infinito más infinito igual a infinito

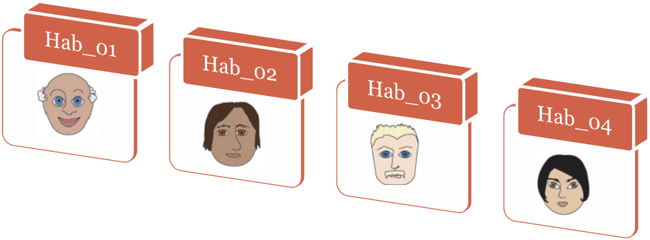
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.



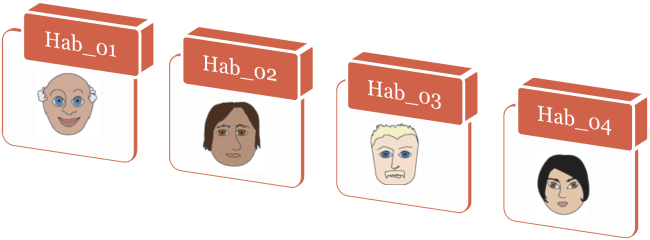
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



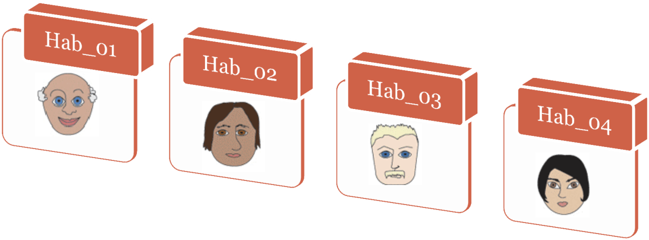
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:



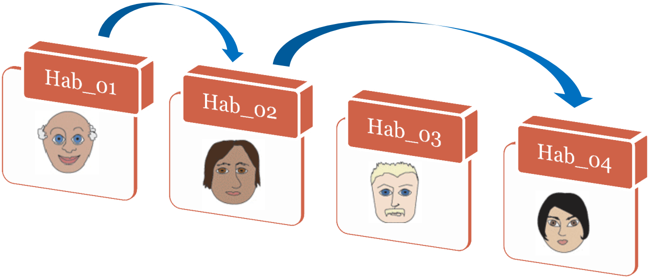
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,



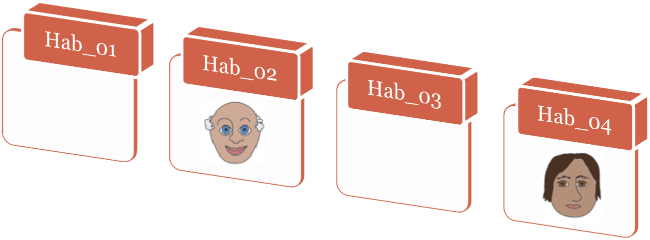
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,



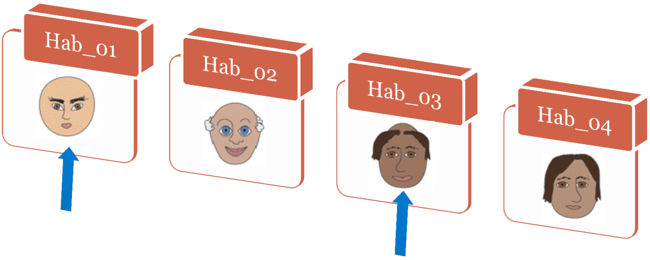
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,



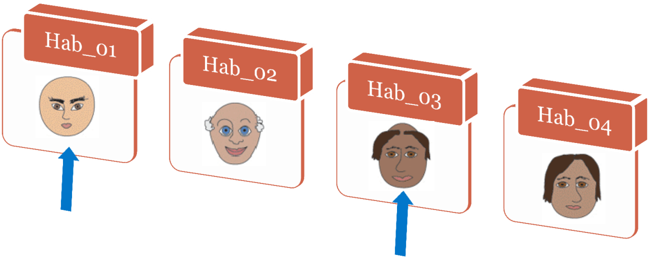
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.



Infinito más infinito igual a infinito

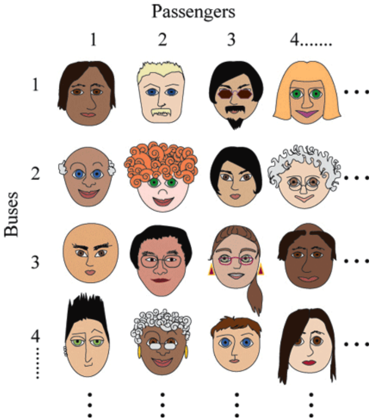
- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con cualquier cantidad finita de autobuses.



¡Más difícil todavía!

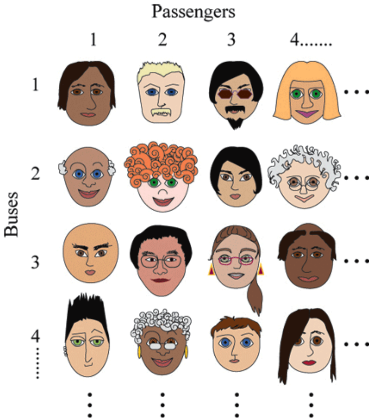
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.



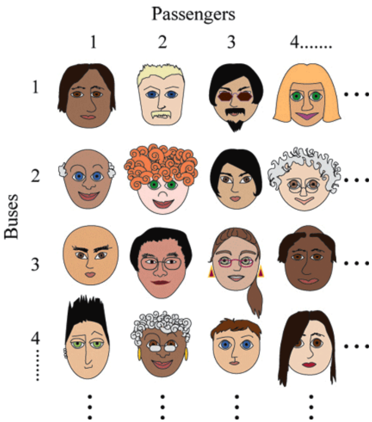
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?



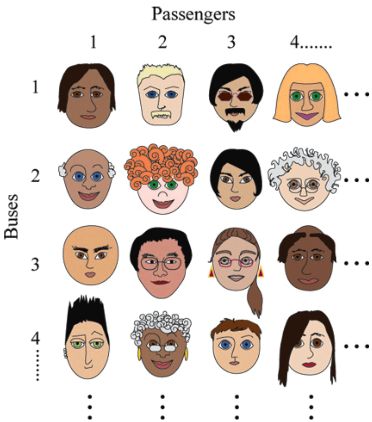
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:



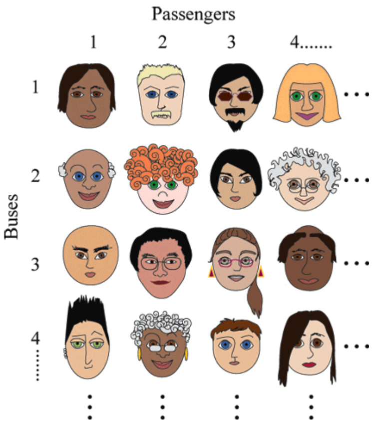
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,



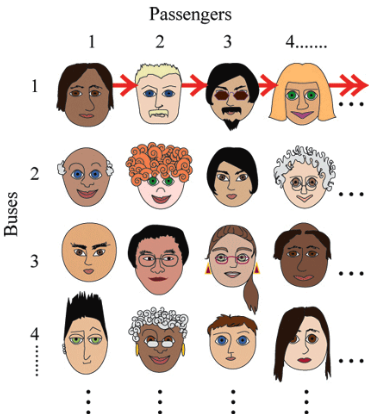
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,



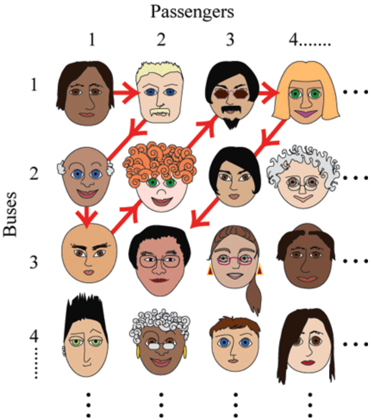
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .



¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
  - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .
  - mejor lo hacemos así.



¿Son todos los infinitos iguales?

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \;:\; p \in \mathbb{Z},\; q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \; : \; p \in \mathbb{Z}, \; q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

  - $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ números naturales;
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ números enteros;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
  - $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.
- ¿Pasará lo mismo con $\mathbb{R}$?

El ejemplo de Cantor

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longrightarrow & 0,12567894\ldots \\ 2 & \longrightarrow & 0,83809823\ldots \\ 3 & \longrightarrow & 0,99990023\ldots \\ 4 & \longrightarrow & 0,00012785\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\ 2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\ 3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\ 4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{lcl} 1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\ 2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\ 3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\ 4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$\begin{array}{ccl} 1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\ 2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\ 3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\ 4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\ \ldots & & \end{array}$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, ninguna lista recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego, $\mathbb{R}$ **no** es equivalente a $\mathbb{N}$.

La hipótesis del continuo

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

la hipótesis del continuo.

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

  la hipótesis del continuo.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

  la hipótesis del continuo.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.
- Un problema de apariencia tan sencilla trajo de cabeza a los matemáticos de los siglos XIX y XX.

La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

  la hipótesis del continuo.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.
- Un problema de apariencia tan sencilla trajo de cabeza a los matemáticos de los siglos XIX y XX.
- Es el Problema 1.a de los problemas del milenio de Hilbert.

La hipótesis del continuo

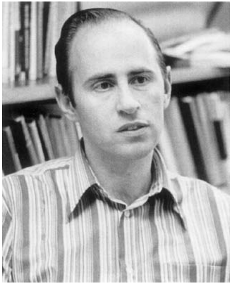
- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

  la hipótesis del continuo.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.
- Un problema de apariencia tan sencilla trajo de cabeza a los matemáticos de los siglos XIX y XX.
- Es el Problema 1.a de los problemas del milenio de Hilbert.
- La solución de este problema ha necesitado un cambio radical en la forma de entender las matemáticas.

La hipótesis del continuo II

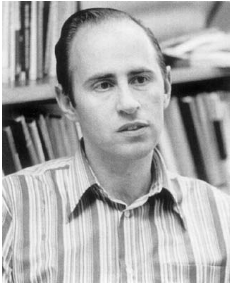
La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.



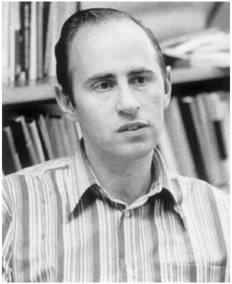
La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;



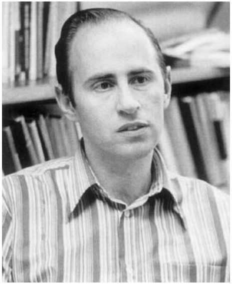
La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;
- Cohen probó en 1963 que la negación de la hipótesis del continuo es también consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos.



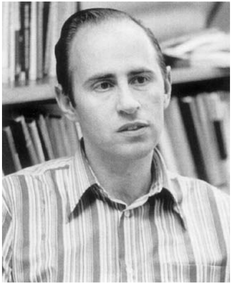
La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;
- Cohen probó en 1963 que la negación de la hipótesis del continuo es también consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos.
- Por tanto, es un ejemplo de indecible, que el propio Gödel había demostrado que tenían que existir en 1931.



La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;
- Cohen probó en 1963 que la negación de la hipótesis del continuo es también consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos.
- Por tanto, es un ejemplo de indecible, que el propio Gödel había demostrado que tenían que existir en 1931.
- La demostración de Cohen necesita una técnica lógica inventada por él mismo llamada "forcing".



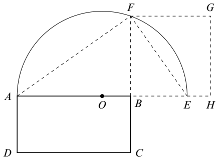
¿Cómo se miden áreas?

4 ¿Cómo se miden áreas?
- Los griegos
- Newton y la cuadratura del círculo
- La medida en el siglo XX
- Paradojas del siglo XX

Las cuadraturas en la matemática griega

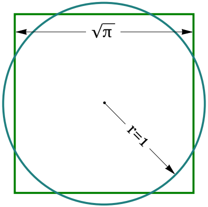
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.



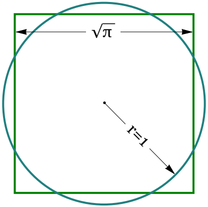
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.



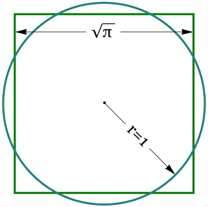
Las cuadraturas en la matemática griega

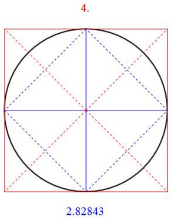
- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.



Las cuadraturas en la matemática griega

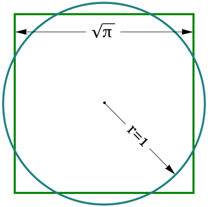
- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado exhaución para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.

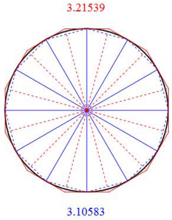




Las cuadraturas en la matemática griega

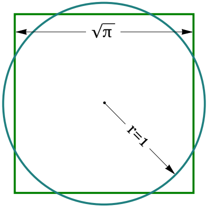
- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado exhaución para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.

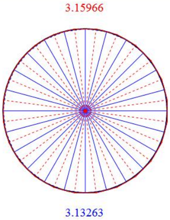




Las cuadraturas en la matemática griega

- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado exhaución para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.





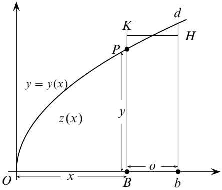
Newton y la cuadratura del círculo

Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).

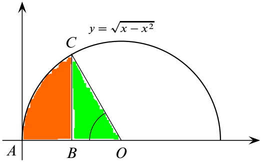
Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.



Newton y la cuadratura del círculo

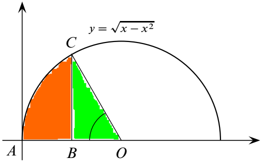
- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región naranja escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma **infinita** (binomio de Newton).



Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región naranja escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma **infinita** (binomio de Newton).

$$\left(x - x^2\right)^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{8}x^{\frac{5}{2}} - \frac{1}{16}x^{\frac{7}{2}} - \cdots$$

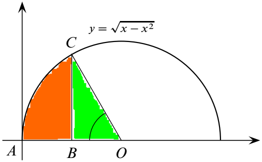


Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región naranja escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma **infinita** (binomio de Newton).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots\right)$$

  y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de π.



Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región naranja escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma **infinita** (binomio de Newton).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \cdots\right)$$

  y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de π.
- En 1882, Ferdinand Lindemann (1852–1939) probó la transcendencia de π y con ello la imposibilidad de la cuadratura del círculo en el sentido de la Grecia clásica.

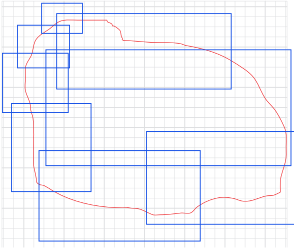
¿Cómo se mide en la actualidad?

¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).

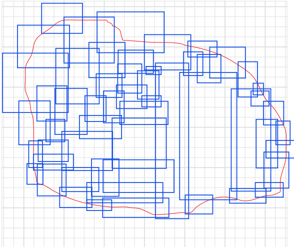
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;



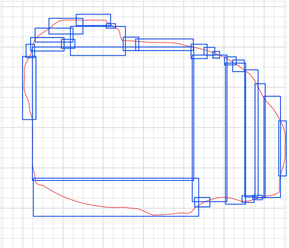
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;



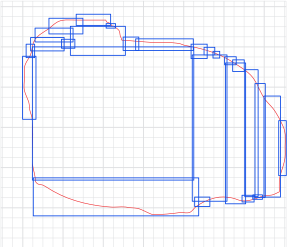
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;



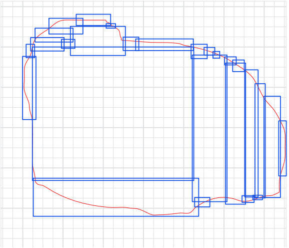
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);



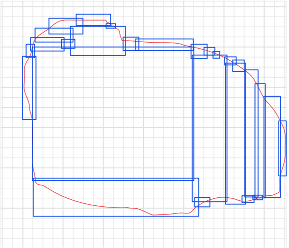
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.



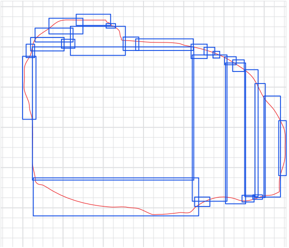
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.
- Es un proceso doblemente infinito:



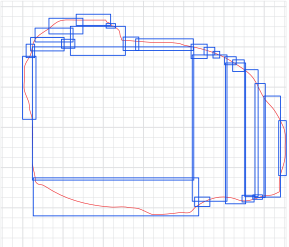
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.
- Es un proceso doblemente infinito:
  - cada recubrimiento tiene infinitos rectángulos,



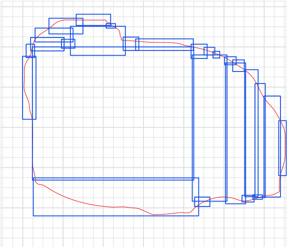
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.
- Es un proceso doblemente infinito:
  - cada recubrimiento tiene infinitos rectángulos,
  - hay infinitos recubrimientos, por lo que



¿Cómo se mide en la actualidad?

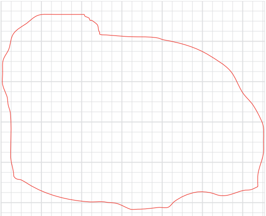
- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.
- Es un proceso doblemente infinito:
  - cada recubrimiento tiene infinitos rectángulos,
  - hay infinitos recubrimientos, por lo que
  - tomar la mejor medición requiere un proceso infinito



¿Podemos medir aproximando por dentro?

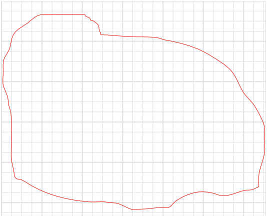
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.



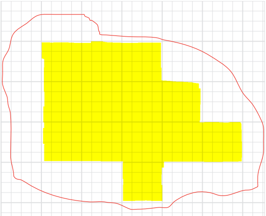
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:



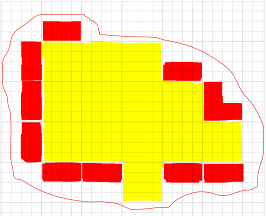
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los "conjuntos razonables", podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:
  - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;



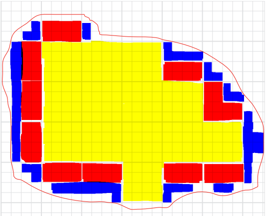
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los "conjuntos razonables", podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:
    - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: $\mathbf{13}$;
    - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: $\mathbf{21}$;



¿Podemos medir aproximando por dentro?

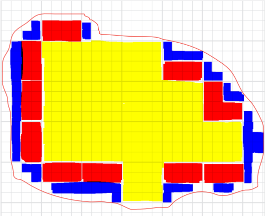
- Para los "conjuntos razonables", podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:
    - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
    - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
    - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;



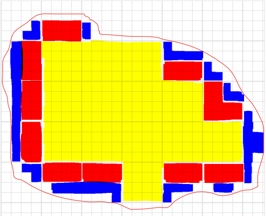
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:
  - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;
  - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \simeq 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37\mathrm{u}^2.$$



¿Podemos medir aproximando por dentro?



- Para los "conjuntos razonables", podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en medir con un papel milimetrado cada vez más preciso:
  - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;
  - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \simeq 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37\text{u}^2.$$

  - Podemos seguir el proceso hasta el infinito. . . obteniendo, en los casos razonables, una suma infinita que es el área de la figura.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar recubrimientos infinitos y es la clave para obtener una teoría sólida.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar recubrimientos infinitos y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el Análisis Matemático de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar recubrimientos infinitos y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el Análisis Matemático de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la Física Cuántica no se entienden sin este lenguaje.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

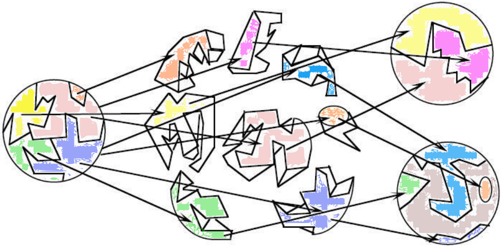
- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar recubrimientos infinitos y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el Análisis Matemático de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la Física Cuántica no se entienden sin este lenguaje.
- Aunque la Teoría de la Medida de Lebesgue es completa,
  no permite medir todos los conjuntos.
  Esto **no** podría resolverlo ninguna otra forma de medir:

La paradoja de Banach-Tarski

La paradoja de Banach-Tarski

Banach–Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

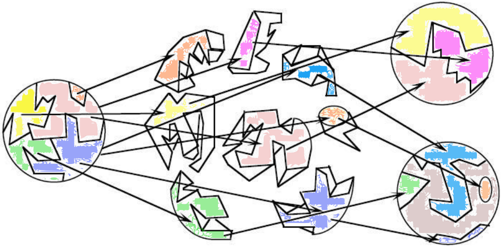


La paradoja de Banach-Tarski

Banach–Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.

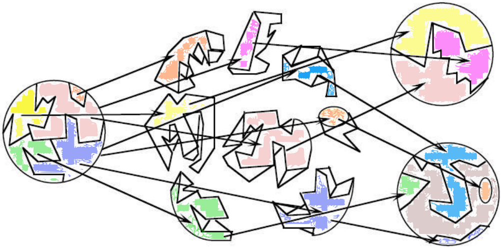


La paradoja de Banach-Tarski

Banach–Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.

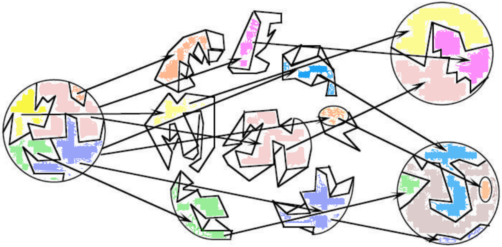


La paradoja de Banach-Tarski

Banach–Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.
- Es imposible que el volumen de todas las piezas pueda ser medido.



Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

- A finales del siglo XIX, el parlamento inglés encargó a un joven cartógrafo medir la longitud de la costa de Inglaterra.

Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

- A finales del siglo XIX, el parlamento inglés encargó a un joven cartógrafo medir la longitud de la costa de Inglaterra.
- El joven, usando una cinta de 50 metros, tardó 10 años en calcular que la longitud es de 2000 km.

Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

- A finales del siglo XIX, el parlamento inglés encargó a un joven cartógrafo medir la longitud de la costa de Inglaterra.
- El joven, usando una cinta de 50 metros, tardó 10 años en calcular que la longitud es de 2000 km.
- Requerido a realizar una medición más exacta, el ya no tan joven cartógrafo, tardó otros 10 años en medir la costa con una cinta de 10 metros, obteniendo ¡2800 km!

Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

- A finales del siglo XIX, el parlamento inglés encargó a un joven cartógrafo medir la longitud de la costa de Inglaterra.
- El joven, usando una cinta de 50 metros, tardó 10 años en calcular que la longitud es de 2000 km.
- Requerido a realizar una medición más exacta, el ya no tan joven cartógrafo, tardó otros 10 años en medir la costa con una cinta de 10 metros, obteniendo ¡2800 km!
- El ya experimentado cartógrafo, fue requerido a medir de nuevo la costa con una cinta de 1 metro obteniendo, en otros 10 años, 3600 km.

Una última paradoja: midiendo la longitud de la costa de Inglaterra

- A finales del siglo XIX, el parlamento inglés encargó a un joven cartógrafo medir la longitud de la costa de Inglaterra.
- El joven, usando una cinta de 50 metros, tardó 10 años en calcular que la longitud es de 2000 km.
- Requerido a realizar una medición más exacta, el ya no tan joven cartógrafo, tardó otros 10 años en medir la costa con una cinta de 10 metros, obteniendo ¡2800 km!
- El ya experimentado cartógrafo, fue requerido a medir de nuevo la costa con una cinta de 1 metro obteniendo, en otros 10 años, 3600 km.
- ¡El pobre cartógrafo estaba condenado para toda la eternidad a medir la costa de su país utilizando cada vez unidades más pequeñas de medida y sin encontrar 2 medidas parecidas!

Ejemplo de estructura fractal

Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.

Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).

Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:

Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
    - estructura autosemejante

Ejemplo de estructura fractal

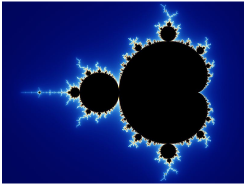
- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.

Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.
- En el caso de la costa de Inglaterra, la dimensión se estima que vale $1{,}25$.

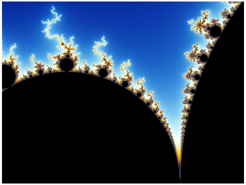
Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.
- En el caso de la costa de Inglaterra, la dimensión se estima que vale $1{,}25$.
- El conjunto de Mandelbrot es un ejemplo de fractal:



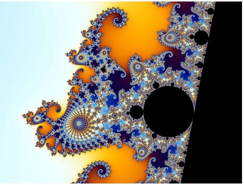
Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.
- En el caso de la costa de Inglaterra, la dimensión se estima que vale $1{,}25$.
- El conjunto de Mandelbrot es un ejemplo de fractal:



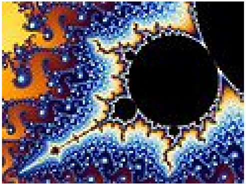
Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.
- En el caso de la costa de Inglaterra, la dimensión se estima que vale $1{,}25$.
- El conjunto de Mandelbrot es un ejemplo de fractal:

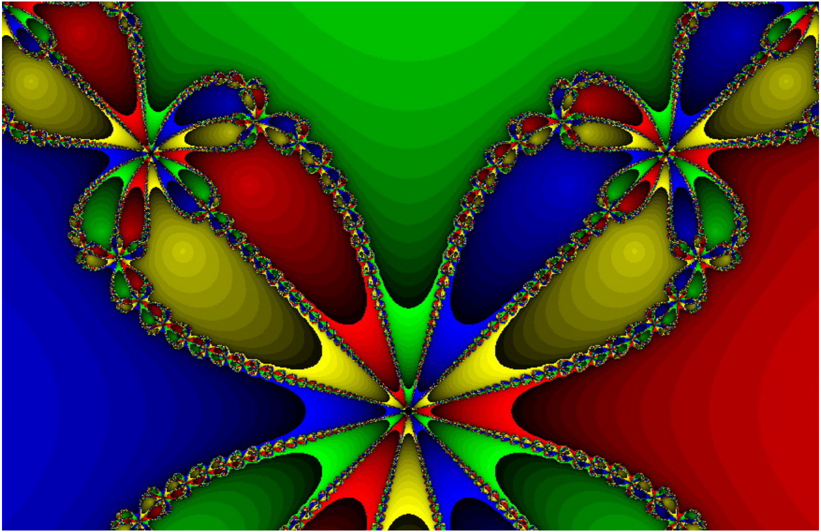


Ejemplo de estructura fractal

- Parecería que la costa de Inglaterra tiene longitud infinita, pero eso no tiene sentido si fuese una curva razonable.
- La modelización matemática de este fenómeno se debe a Benoît Mandelbrot (1924 – 2010).
- Esta costa se modeliza mediante un Fractal:
  - estructura autosemejante
  - cuya dimensión no es un número entero.
- En el caso de la costa de Inglaterra, la dimensión se estima que vale $1{,}25$.
- El conjunto de Mandelbrot es un ejemplo de fractal:

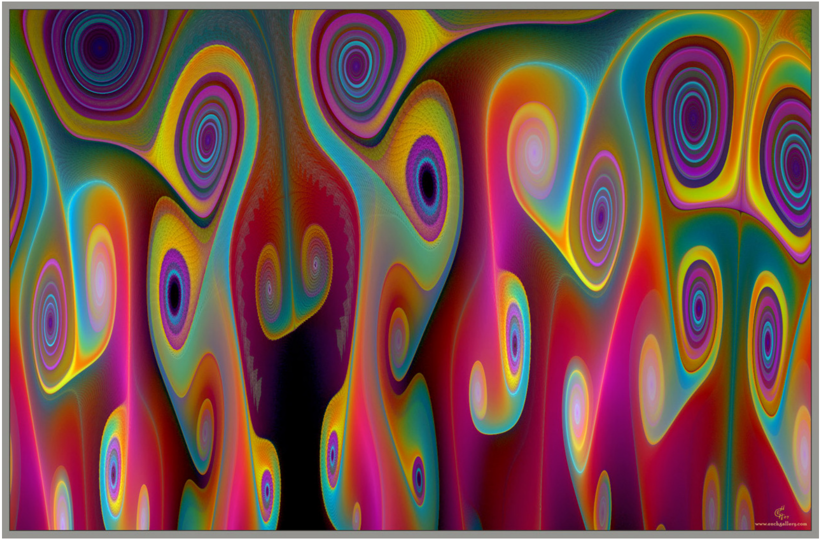


Algunos ejemplos de fractales



Algunos ejemplos de fractales

Algunos ejemplos de fractales



Algunos ejemplos de fractales

Para saber más. . .

- Página web–blog sobre Matemáticas en general
  Gaussianos
  http://gaussianos.com/
- Página web sobre historia de las Matemáticas
  The MacTutor History of Mathematics archive
  http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/
- Página web personal de
  Javier Pérez González (Universidad de Granada)
  http://www.ugr.es/local/fjperez
- Página web personal de
  Carlos Ivorra (Universidad de Valencia)
  http://www.uv.es/ivorra/
- Hans Enzensberger
  El diablo de los números
  Ediciones Siruela, 1998