

# ¡Hasta el infinito y más allá!

Miguel Martín (Universidad de Granada)

<http://www.ugr.es/local/mmartins>

The collage contains several elements:

- Buzz Lightyear:** A 3D rendering of the character Buzz Lightyear from the Toy Story franchise.
- Network Diagram:** A graph with several circular nodes connected by lines, each node containing a different colored arrow.
- Table:** A table with two columns: 'Natural' and 'Real'. The 'Natural' column lists integers from 0 to 11, followed by dots. The 'Real' column lists decimal numbers corresponding to each natural number, with some digits highlighted in red. Below the table, two more real numbers are listed: 0.293233992132... and 0.746894310875....
- Arrow:** A large, colorful, 3D arrow pointing upwards and to the right.
- Hare and Tortoise:** A cartoon illustration of a hare and a tortoise, representing the fable of the hare and the tortoise.
- Building:** A 3D rendering of a building with a sign that says 'Walmart'.

Natural	Real
0	0.236436775676...
1	0.098473294543...
2	0.193214042202...
3	0.843279242093...
4	0.012934812343...
5	0.639423412934...
6	0.017773923845...
7	0.238920090909...
8	0.123984732999...
9	0.646329878122...
10	0.000123943437...
11	0.981298312892...
...	...
	0.293233992132...
	0.746894310875...

# Organización de la conferencia

- 1 Preliminares
- 2 Los procesos infinitos y sus paradojas
- 3 ¿Cuántos infinitos hay?
- 4 ¿Cómo se miden áreas?
- 5 Para saber más

# Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Miembro del Instituto de Matemáticas de la Universidad de Granada (IEMath-GR)
- Responsable del proyecto de investigación “Técnicas geométrica y algebraicas en el estudio de los operadores en espacios de Banach”
- Campo de trabajo:  
*Análisis Funcional en **dimensión infinita***
- Y, ¿qué es eso de la *dimensión infinita*?
- Pero antes, *¿qué es el infinito?*

## ¿Qué es el infinito?

*... intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.*

*Galileo Galilei (1564–1642)*

*¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.*

*David Hilbert (1862–1943)*

*Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].*

*Julio Rey Pastor (1888–1962)*

*El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho, establece una frontera que separa las matemáticas de la lógica (...). El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.*

*Antonio J. Durán (1962–)*

## ¿Qué es el infinito?

*Hay que considerar la matemática como un proceso tentativo de acercamiento a la realidad que no se puede soñar en realizar de un golpe ni completamente. No tratamos de verdades insondables ni infalibles. (...) La causa profunda de esta incomplección de la matemática es la presencia en ella de procesos infinitos. Una presencia a la que la matemática no puede ni debe renunciar. Lo nuestro es lo infinito, sí, pero acompañado por la conciencia de la falibilidad en nuestros procesos de acercamiento a él y del empeño de corrección de nuestros errores cuando éstos surjan.*

*Miguel de Guzmán (1936–2004)*

# Definiciones de infinito I



**Actualización del  
Diccionario de la  
Lengua Española en CD-ROM  
para las últimas versiones de  
los sistemas operativos.**

## PRESENTACIÓN

### AVANCE DE LA 23.<sup>a</sup> EDICIÓN

¿Quién hace el Diccionario?  
¿Cómo se actualiza?  
¿Cómo se muestran las  
enmiendas y adiciones?  
¿Cómo se revisan los  
americanismos del Diccionario?  
¿Con qué medios informáticos se  
revisa el Diccionario?  
Cifras de actualización

### LA 22.<sup>a</sup> EDICIÓN (2001)

El Diccionario en cifras  
¿Qué novedades presenta la  
22.<sup>a</sup> edición?  
Advertencias para el uso de este  
Diccionario

## infinito, ta.

(Del lat. *infinītus*).

1. *adj.* Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. *adj.* Muy numeroso o enorme.
3. *m.* Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. *m.* En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. *m. Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. *m. Mat.* Signo ( $\infty$ ) con que se expresa ese valor.
7. *adv. m.* Excesivamente, muchísimo.

□ V.

[línea infinita](#)

[proceso en infinito](#)

# Definiciones de infinito II

Wolfram **MathWorld** the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathematica Technology

SEARCH MATHWORLD

Algebra  
Applied Mathematics  
Calculus and Analysis  
Discrete Mathematics  
Foundations of Mathematics  
Geometry  
History and Terminology  
Number Theory  
Probability and Statistics  
Recreational Mathematics  
Topology

Alphabetical Index  
Interactive Entries  
Random Entry  
New in MathWorld

MathWorld Classroom

About MathWorld  
Contribute to MathWorld  
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries  
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and  
nurtured by Eric Weisstein

## En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.

Infinity, most often denoted as  $\infty$ , is an **unbounded quantity** that is **greater than every real number**. The symbol  $\infty$  had been used as an alternative to M (1000) in **Roman numerals** until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

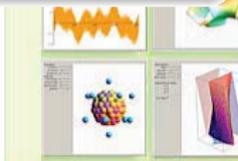
Infinity is a **very tricky concept to work with**, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of **infinite sets**.

Informally,  $1/\infty = 0$ , a statement that can be made rigorous using the **limit** concept,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$



[Browse Topics »](#) [View Latest »](#)

Wolfram **Mathematica**

LEARN MORE

**Other Wolfram Web Resources »**

# Definiciones de infinito III



WIKIPEDIA  
La enciclopedia libre

- Portada
- Portal de la comunidad
- Actualidad
- Cambios recientes
- Páginas nuevas
- Página aleatoria
- Ayuda
- Donaciones
- Notificar un error

- Imprimir/exportar
  - Crear un libro
  - Descargar como PDF
  - Versión para imprimir

No has iniciado sesión [Discusión](#) [Contribuciones](#) [Crear una cuenta](#) [Acceder](#)

Artículo **Discusión**

Leer [Editar](#) [Ver historial](#)

 Ir

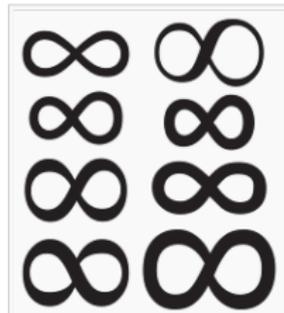
## Infinito

*Para el canal de televisión por cable, véase [Infinito \(canal de televisión\)](#).*

*Para el grupo español del mismo nombre, véase [Infinito \(banda\)](#).*

El concepto de **infinito** (símbolo:  $\infty$ ) aparece en varias ramas de la [matemática](#), la [filosofía](#)<sup>1</sup> y la [astronomía](#),<sup>2</sup> en referencia a una cantidad sin límite o sin final, contrapuesto al concepto de [finitud](#).<sup>3</sup>

En matemáticas el infinito aparece de diversas formas: en [geometría](#), el [punto al infinito](#) en [geometría proyectiva](#) y el [punto de fuga](#) en [geometría descriptiva](#); en análisis matemático, los [límites infinitos](#); y en [teoría de conjuntos](#) como [números transfinitos](#). Todos estos conceptos **son diferentes** y **no corresponden** todos ellos **a la misma noción de infinitud**.



El símbolo de infinito ∞ (Unicode U+221E), también llamado *lemniscata*,

## Sobre el símbolo $\infty$

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin

- Fue **John Wallis** (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el **lazo del amor**
- Pudo tomar el símbolo del **número romano *M*** (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la **letra griega *omega***



# Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

*Una **multitud infinita** es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.*

- Richard Dedekind (1831–1916):

*Un sistema  $S$  se llama **infinito** cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que  $S$  es **finito**.*

- Georg Cantor (1845–1918):

*Primer estudio sistemático del **infinito**, aritmética del infinito, números transfinitos. . . **No todos los infinitos son iguales.***

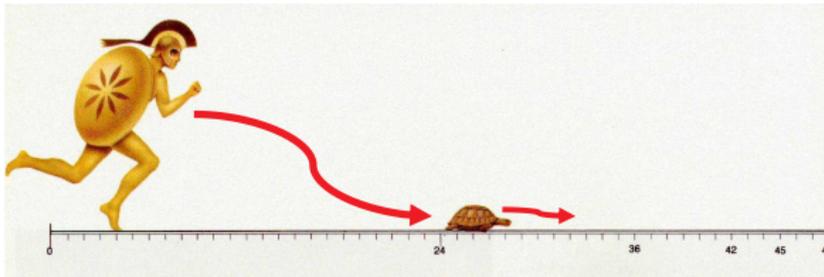
# Los procesos infinitos y sus paradojas

- 2 Los procesos infinitos y sus paradojas
  - Aquiles y la tortuga
  - Sobre la invención del ajedrez
  - Manejando el infinito (1)

# La paradoja de Aquiles y la tortuga

*Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.*

*Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)*



## Aquiles y la tortuga II

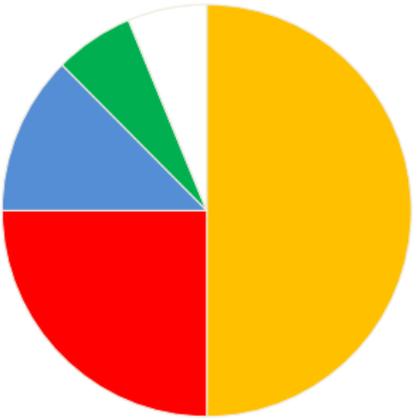
- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (**cierto**),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (**¡falso!**)
- **Aristóteles** tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que **una “suma infinita” de cantidades positivas puede ser finita.**

# Sumando cuñas de queso I

**Teorema**

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

**Gráficamente:**



**Demostración:**

Tomamos un queso



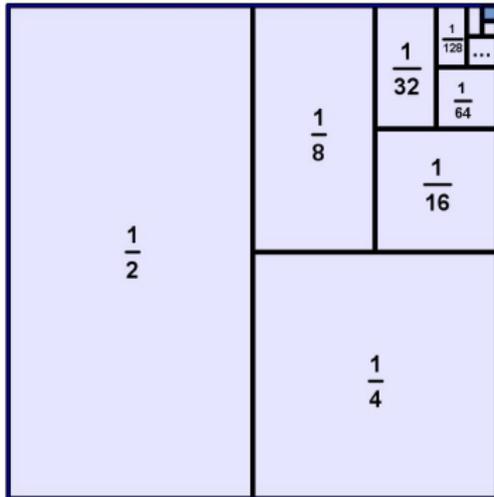
y lo vamos partiendo...

# Sumando cuñas de queso I

## Teorema

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots$$

Otra demostración:



# Sumando cuñas de queso II

## Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

### Demostración:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

## Una última cita sobre Aquiles y la Tortuga

*Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera? – dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una **serie infinita** de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.*

*Lewis Carroll, Lo que la Tortuga le dijo a Aquiles, 1894*

## La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado **ladava** (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.

Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado **Sessa** con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el **chaturanga**, antecesor del ajedrez.

El rey, encantado con el juego, quiso agradecer a Sessa con palacios, joyas, regalos... que el joven brahmán siempre rechazaba cortésmente.



## La leyenda del origen del ajedrez II

*Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:*

*En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.*

*El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.*

*Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.*



## El cálculo de la cantidad de arroz

*Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:*

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

*¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!*

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos  $X$ ):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62})$$

$$X - 1 = 2(X - 2^{63})$$

$$\text{Por tanto, } X = 2^{64} - 1 \simeq 18 * 10^{18}.$$

## El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
  - Hizo el siguiente cálculo ( $X$  es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots)$$

$$X - 1 = 2X$$

- Por tanto, ¡ $X = -1!$  y el rey pidió a Sessa que le entregara un grano de arroz :-)

## Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para **domar** al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un **límite**.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la **inducción matemática**, que consiste en llegar al infinito *pasito a pasito*, como en un **efecto dominó**.



# La inducción matemática

- Formalmente, el **principio de inducción** es un **axioma** que establece que

*cualquier subconjunto de números naturales que contenga al 1 y al sucesor de cualquier elemento coincide, de hecho, con el conjunto de todos los números naturales.*

- Es equivalente al **principio de buena ordenación de los números naturales**:

*cualquier subconjunto de números naturales tiene mínimo.*

- Parece ser que hay “razonamientos por inducción” en la antigua Grecia, en las matemáticas india y árabe de la Edad Media. . . pero la primera formulación explícita del principio de inducción parece deberse a **Blaise Pascal**.



# La inducción matemática II

- Se demuestran por inducción cosas tan diversas como
  - la suma de los  $n$  primeros impares es  $n^2$ ,
  - hay infinitos números primos (usando números de Fermat),
  - el binomio de Newton,
  - el último teorema de Fermat. . .
- También hay paradojas que proceden de la inducción:

*Si una persona pobre recibe  $n$  euros, seguirá siendo pobre.*

  - Consideremos la afirmación:  $S_n =$  una persona pobre sigue siendo pobre tras recibir  $n$  euros.
  - Claramente,  $S_1$  es cierta e, igualmente, si  $S_n$  es cierta es claro que  $S_{n+1}$  es cierta.
- La inducción también se utiliza en otras Ciencias como la Física para deducir resultados generales de una serie limitada de observaciones.

## ¿Cuántos infinitos hay?

- 3 ¿Cuántos infinitos hay?
  - El principio del palomar
  - El hotel de Hilbert
  - Cantor y el continuo
  - Manejando el infinito (2)

## El principio del palomar

- El *Principio del Palomar* dice:

*Si  $n$  palomas se distribuyen en  $m$  nidos y  $n > m$ , entonces al menos habrá un nido con más de una paloma.*

- Se pueden demostrar cosas variopintas
- Es equivalente a decir que si el palomar está lleno y llega una nueva paloma, entonces dos palomas tendrán que compartir nido.
- ¿Habrá un principio del palomar infinito?



# El hotel de Hilbert

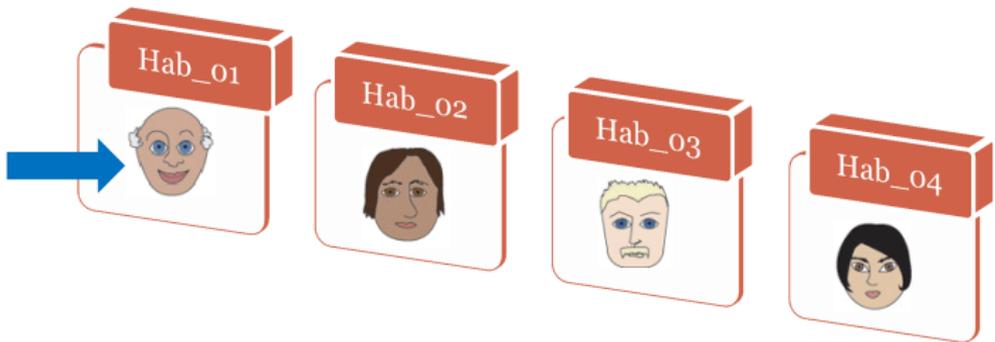
- Esta es una historia inventada por **David Hilbert** (1862–1943) para explicar que **muchos infinitos son iguales**.
- Imaginemos un hotel con **infinitas habitaciones**.
- Su lema es

*“Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti”.*



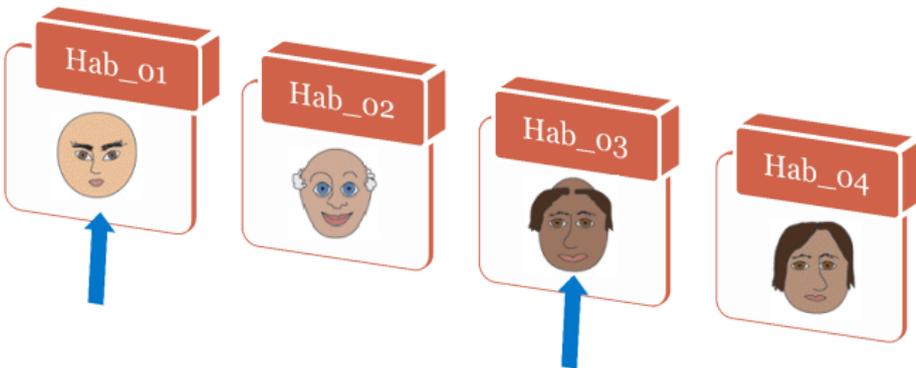
# Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
  - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
  - lo que deja una habitación libre,
  - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a **cualquier cantidad finita** de nuevos huéspedes.



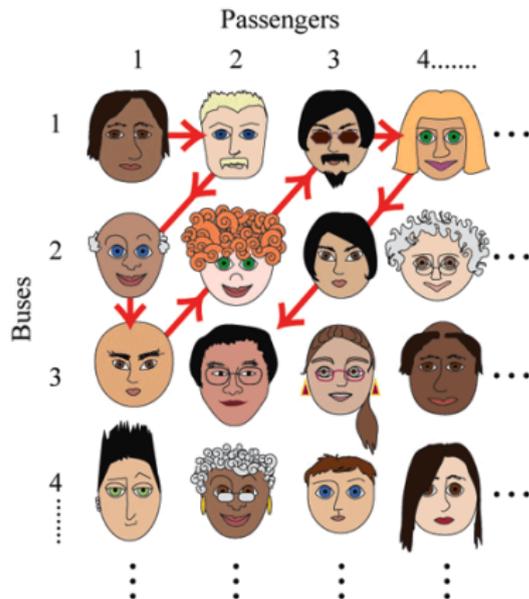
## Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones **pares**,
  - movemos al huésped de la habitación  $n$  a la habitación  $2n$ ,
  - quedan vacías las habitaciones **impares**, que **son infinitas**,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con **cualquier cantidad finita de autobuses**.



# ¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
  - Dejamos libres las **infinitas** habitaciones impares,
  - sólo queda **ordenar** los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
  - esto es mala idea. . .
  - mejor lo hacemos así.



# ¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$  **números naturales**;
  - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$  **números enteros**;
  - $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$  **números racionales**;
  - $\mathbb{R}$  **números reales**.
- 
- El Hotel de Hilbert prueba que  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{Q}$  son **infinitos equivalentes**, se pueden **enumerar**, poner en una lista infinita.
  - ¿Pasará lo mismo con  $\mathbb{R}$ ?



## El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar  $\mathbb{R}$** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$1 \longrightarrow 0, \boxed{1}2567894 \dots$$

$$2 \longrightarrow 0, 8\boxed{3}809823 \dots$$

$$3 \longrightarrow 0, 99\boxed{9}90023 \dots$$

$$4 \longrightarrow 0, 000\boxed{1}2785 \dots$$

...

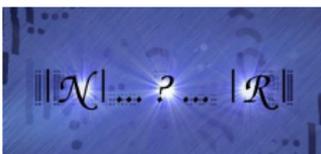
- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0, 3870 \dots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, **ninguna lista** recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego,  **$\mathbb{R}$  no es equivalente a  $\mathbb{N}$** .

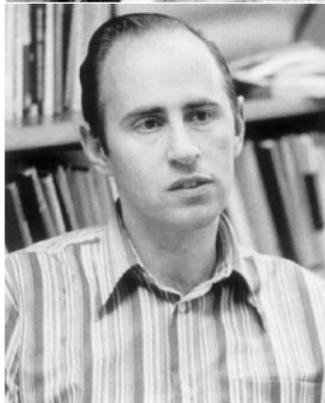
## La hipótesis del continuo

- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: **ni el infinito es único ni estaba domado**.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de  $\mathbb{N}$  y el cardinal de  $\mathbb{R}$ ) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como **la hipótesis del continuo**.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.
- Un problema de apariencia tan sencilla trajo de cabeza a los matemáticos de los siglos XIX y XX.
- Es el **Problema 1.a** de los **problemas del milenio** de **Hilbert**.
- La solución de este problema ha necesitado un cambio radical en la forma de entender las matemáticas.



## La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a **Kurt Gödel** y **Paul Cohen**.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es **consistente** con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;
- Cohen probó en 1963 que la negación de la hipótesis del continuo es también **consistente** con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos.
- Por tanto, es un ejemplo de **indecible**, que el propio Gödel había demostrado que tenían que existir en 1931.
- La demostración de Cohen necesita una técnica lógica inventada por el mismo llamada **“forcing”**.



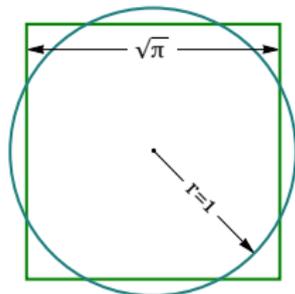
## ¿Cómo se miden áreas?

### 4 ¿Cómo se miden áreas?

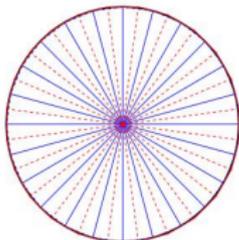
- Los griegos
- Newton y la cuadratura del círculo
- La medida en el siglo XX
- La paradoja de Banach-Tarski

## Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado **exhaución** para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.



3.15966



3.13263

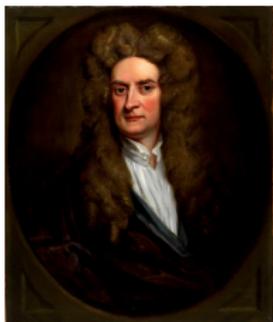
## Newton y la cuadratura del círculo

- **Isaac Newton** (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región **naranja** escribiendo la función  $y = \sqrt{x - x^2}$  como una suma **infinita** (**binomio de Newton**).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left( \frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} - \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} - \dots \right)$$

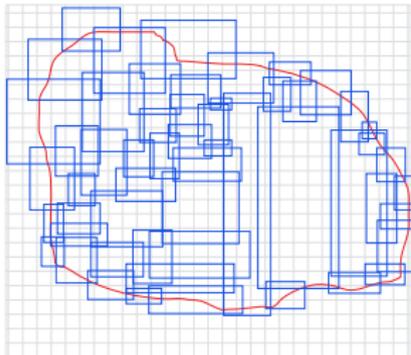
y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de  $\pi$ .

- En 1882, **Ferdinand Lindemann** (1852–1939) prueba la **imposibilidad de la cuadratura del círculo** en el sentido de la Grecia clásica.



## ¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.
- Es un proceso **doblemente infinito**:
  - cada recubrimiento tiene **infinitos** rectángulos,
  - hay **infinitos** recubrimientos, por lo que
  - tomar la mejor medición requiere un **proceso infinito**

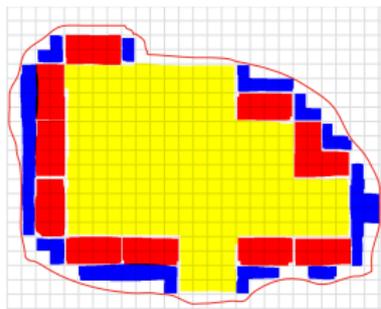


## ¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su área contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en **medir con un papel milimetrado** cada vez más preciso:
  - marcamos los **cuadrados de lado 1** contenidos en la figura: **13**;
  - marcamos los **cuadrados de lado 1/2** contenidos en el resto: **21**;
  - marcamos los **cuadrados de lado 1/4** contenidos en el resto: **54**;
  - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \simeq 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37u^2.$$

- Podemos seguir el proceso hasta el infinito... obteniendo, **en los casos razonables**, una suma infinita que es el área de la figura.



# La Teoría de la Medida de Lebesgue

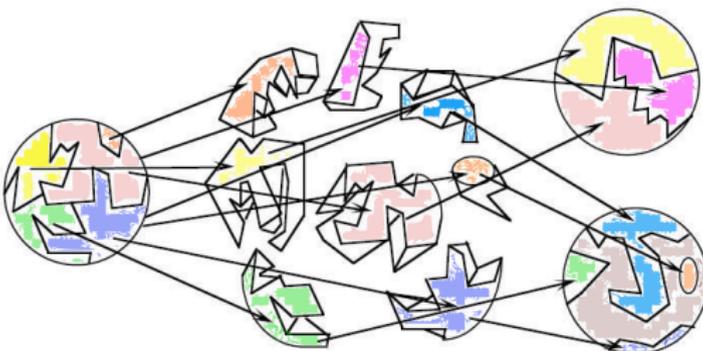
- Las ideas de **Lebesgue** revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar **recubrimientos infinitos** y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el **Análisis Matemático** de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la **Física Cuántica** no se entienden sin este lenguaje.
- Aunque la **Teoría de la Medida de Lebesgue** es completa, **no permite medir todos los conjuntos**.  
Esto **no** podría resolverlo ninguna otra forma de medir.

# La paradoja de Banach-Tarski

## Banach-Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo **dos esferas de idéntico tamaño**, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.
- Es **imposible** que **el volumen de todas las piezas pueda ser medido**.



## Para saber más...



Página web–blog sobre Matemáticas en general

**Gaussianos**

<http://gaussianos.com/>



Página web sobre historia de las Matemáticas

**The MacTutor History of Mathematics archive**

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>



Página web personal de

**Javier Pérez González** (Universidad de Granada)

<http://www.ugr.es/local/fjperez>



Página web personal de

**Carlos Ivorra** (Universidad de Valencia)

<http://www.uv.es/ivorra/>



**Hans Enzensberger**

**El diablo de los números**

Ediciones Siruela, 1998