El Teorema de Mazur-Ulam

Miguel Martín

http://www.ugr.es/local/mmartins

Universidad de Granada

V Escuela-Taller de Análisis Funcional

ICMAT, Madrid, Marzo 2015

Esquema de la presentación

1. Concepto de espacio normado
2. Isomorfismos isométricos
3. Problemas abiertos relacionados

Concepto de espacio normado

Sección 1

1. Concepto de espacio normado
   - Estructuras en un espacio normado
   - Aplicaciones que conservan las estructuras
   - Relaciones entre las estructuras

Espacio normado

Definición de espacio normado (Banach, 1922)

Un **espacio normado** es un conjunto X dotado de las siguientes operaciones:

- *Suma*: $X \times X \longrightarrow X$, $(x, y) \longmapsto x + y$
  (asociativa, conmutativa, con elemento neutro 0 y con elemento opuesto $-x$)
- *Producto por escalares*: $\mathbb{K} \times X \longrightarrow X$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$ $\qquad$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{K} = \mathbb{C}$)
  (asociativo, distributivo (2), con elemento neutro 1)
- *Norma*: $X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \longmapsto \|x\|$, verificando:
  - $\|x\| = 0 \implies x = 0$,
  - $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$,
  - $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Estructuras en un espacio normado. I

Un espacio normado X es...

Espacio vectorial (Peano, 1888)

- Suma y producto por escalares

Espacio topológico (Hausdorff, 1914)

- Los entornos de un punto $x_0 \in X$ contienen a alguno de la forma

$$\{x \in X \,:\, \|x - x_0\| < \delta\} \qquad \big(\delta \in \mathbb{R}^+\big)$$

Espacio vectorial topológico (Kolmogorov, 1934; von Neumann, 1935)

- Suma y producto por escalares son continuos
- Basta conocer los entornos de cero (las traslaciones son homeomorfismos)

Estructuras en un espacio normado. II

Un espacio normado X es...

Espacio métrico (Fréchet, 1906)

- Su estructura viene dada por la *distancia* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(x,y) = \|x-y\| \qquad \big(x,y \in X\big)$$

  - $d(x,y) = 0 \iff x = y$
  - $d(x,y) = d(y,x)$
  - $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Otros ejemplos de espacios métricos

- Cualquier subconjunto de un espacio normado (*distancia heredada*)
- El conjunto de los subconjuntos compactos de un espacio métrico con la *distancia de Hausdorff*
- Conjuntos de espacios normados con la *distancia de Banach–Mazur*
- El espacio $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ de las funciones enteras (con la *convergencia uniforme sobre compactos*)

Aplicaciones que conservan las estructuras

Espacio vectorial

- $T : X \longrightarrow Y$ *biyección lineal* $\implies$ T^{-1} es lineal.
- X e Y equivalentes como espacios vectoriales sii tienen bases de Hamel biyectivas

Espacio topológico

$T : X \longrightarrow Y$ biyectiva y bicontinua $\implies$ T es *homeomorfismo*.

Espacio vectorial topológico

- $T : X \longrightarrow Y$ lineal, biyectiva y bicontinua (o biacotada) $\implies$ T es *isomorfismo* (de EVT).
- Si X e Y son **completos**, T lineal, biyectiva y continua $\implies$ T es *isomorfismo*

Espacio métrico

$T : X \longrightarrow Y$ biyectiva con $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$ $\implies$ T *isometría sobreyectiva*.

Aplicaciones que conservan las estructuras

Espacio vectorial

- $T : X \longrightarrow Y$ *biyección lineal* $\implies$ T^{-1} es lineal.
- X e Y equivalentes como espacios vectoriales sii tienen bases de Hamel biyectivas

Espacio topológico

$T : X \longrightarrow Y$ biyectiva y bicontinua $\implies$ T es *homeomorfismo*.

Todas las estructuras

La identificación **total** entre dos espacios normados es el *isomorfismo isométrico*:

$T : X \longrightarrow Y$ lineal, biyectiva y que conserva la norma ($\|T(x)\| = \|x\| \ \forall x \in X$)

$\implies$ T y T^{-1} lineales, continuas e isometrías

Espacio métrico

$T : X \longrightarrow Y$ biyectiva con $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ para todo $x, y \in X$
$\implies$ T *isometría sobreyectiva*.

Relaciones entre las estructuras. I

¿Cómo es la relación entre las distintas estructuras?

¿Lineal implica topológica?

- En dimensión finita, toda aplicación lineal es continua.
- En dimensión finita, X e Y isomorfos sii tienen la misma dimensión.
- En dimensión infinita, no hay buena relación:

Aplicaciones lineales discontinuas

- Si $\dim(X) = \infty$, existe $f : X \longrightarrow \mathbb{K}$ lineal y discontinua.
- Si $\dim(X) = \infty$, existe $T : X \longrightarrow X$ lineal, biyectiva y bi-discontinua.
- Por otro lado, siempre existe $T : X \longrightarrow Y$ lineal, continua (y no nula).

Observación: en todos estos resultados se necesita el *Axioma de elección*.

Relaciones entre las estructuras. II

¿Topológica implica lineal?

- En dimensión finita, X e Y son homeomorfos sii tienen la misma dimensión.
- En dimensión infinita, no hay buena relación:

Si una taza es un donut, todo espacio de Banach es un espacio de Hilbert

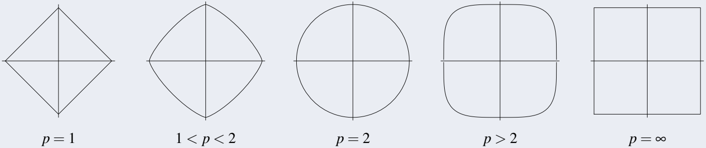
- **(Kadets, 1967):** todos los espacios de Banach separables (de dimensión infinita) son homeomorfos.
- **(Torunczyk, 1978):** cualesquiera dos espacios de Banach (de dimensión infinita) con el mismo carácter de densidad son homeomorfos.
- Por tanto, cualquier espacio de Banach es homeomorfo a un espacio de Hilbert.

Relaciones entre las estructuras. III

¿Topológica y lineal implica métrica?

- Ni siquiera en dimensión finita la cosa va bien:

Todos los espacios de dimensión dos son isomorfos, pero hay distintas normas con distintas propiedades, que producen *espacios distintos*



¿Y al revés?

$T : X \longrightarrow Y$ isometría sobreyectiva con $T(0)=0$ (salvo una traslación):

- se conserva la topología y también se conserva la norma
- **Teorema de Mazur-Ulam:** T es $\mathbb{R}$-lineal
- Por tanto, T es un isomorfismo isométrico real (identificación total como espacios reales)

Isomorfismos isométricos

Sección 2

2. Isomorfismos isométricos
   - La discretización de las señales con energía finita
   - Distintas normas, distintas isometrías
   - El teorema de Banach-Stone
   - El Teorema de Mazur-Ulam
   - El caso complejo del Teorema de Mazur-Ulam

La discretización de las señales con energía finita

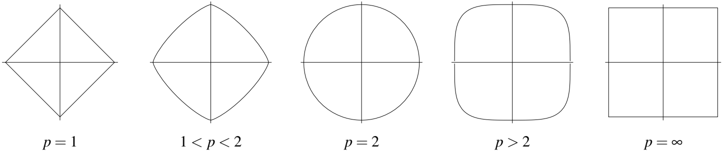
Probablemente, el ejemplo más antiguo de isomorfismo isométrico entre dos espacios de Banach (de dimensión infinita) es el siguiente:

Teorema (Riesz-Fischer – Parseval-Fatou)

Los espacios $L_2(\mathbb{T})$ y $\ell_2^{\mathbb{Z}}$ son isométricamente isomorfos.

- De hecho, la identificación es de la forma $f \equiv \sum\limits_{n\in\mathbb{Z}} c_n(f)\,\mathrm{e}^{int}$
  (desarrollo en serie de Fourier)
- Permite "discretizar" las señales con energía finita y ver los operadores entre ellas como matrices infinitas
- Es el principio de la cuantización, explica los armónicos, da rigor a las series de Fourier...

Distintas normas, distintas isometrías



¿Cómo son las isometrías de estos espacios?

- Salvo una traslación, son lineales, luego son matrices 2×2
- Son siempre rotaciones $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ o reflexiones $\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$
- Si $p=2$, todos los valores de θ son válidos, obteniendo el grupo ortogonal
- Si $p \neq 2$, sólo unos pocos valores de θ son válidos $\theta=0$, $\theta=\pi/2$, $\theta=\pi$ y $\theta=3\pi/2$: 4 rotaciones y 4 reflexiones (grupo diédrico D_4)
- $(p \neq 2)$ También pueden verse como matrices de permutación generalizadas: matrices con exactamente una entrada no nula con valor 1 o -1 en cada fila y cada columna

El Teorema de Banach-Stone

Teorema (Banach-Stone)

K_1 y K_2 espacios topológicos de Hausdorff compactos. Si $T : C(K_1) \longrightarrow C(K_2)$ es un isomorfismo isométrico, entonces existen $h \in C(K_2)$ con $|h(t)| = 1$ $\forall t \in K_2$ y $\varphi : K_2 \longrightarrow K_1$ homeomorfismo tales que

$$[T(f)](t) = h(t)\, f(\varphi(t)) \qquad \big(t \in K_2,\ f \in C(K_1)\big).$$

En particular, K_1 y K_2 son homeomorfos.

Ideas de la demostración:

- T isomorfismo isométrico $\implies$ T lleva puntos extremos de la bola unidad en puntos extremos de la bola unidad
- T isomorfismo isométrico $\implies$ T^* es isomorfismo isométrico
- Los puntos extremos de $B_{C(K)}$ son las funciones que toman valores con módulo 1
  - Por tanto, $h = T(\mathbf{1})$ toma valores con módulo 1.
- Los puntos extremos de $B_{C(K)^*}$ son rotaciones de evaluaciones, es decir, de la forma $f \longmapsto \omega\, f(t)$ con $|\omega| = 1$ y $t \in K$
  - Por tanto, T^* da una biyección entre K_1 y K_2, que se demuestra que es continua (topología w^*)

El Teorema de Banach-Stone

Teorema (Banach-Stone)

K_1 y K_2 espacios topológicos de Hausdorff compactos. Si $T : C(K_1) \longrightarrow C(K_2)$ es un isomorfismo isométrico, entonces existen $h \in C(K_2)$ con $|h(t)| = 1\ \forall t \in K_2$ y $\varphi : K_2 \longrightarrow K_1$ homeomorfismo tales que

$$[T(f)](t) = h(t)\, f(\varphi(t)) \qquad \big(t \in K_2,\ f \in C(K_1)\big).$$

En particular, K_1 y K_2 son homeomorfos.

Compárese este resultado con el siguiente...

Teorema (Mylutin)

Si K_1 y K_2 son espacios topológicos compactos de Hausdorff separables y no numerables, entonces $C(K_1)$ y $C(K_2)$ son isomorfos.

- En particular, $C[0,1]$ es isomorfo a $C\big([0,1] \times [0,1]\big)$

El Teorema de Mazur-Ulam

Teorema (Mazur-Ulam, 1932)

Toda isometría sobreyectiva entre espacios normados es una transformación afín

Transformación afín

$T : X \longrightarrow Y$ es *afín* si

$$T\big(\lambda x + (1-\lambda)y\big) = \lambda T(x) + (1-\lambda)T(y) \qquad \big(x, y \in X,\ \lambda \in [0,1]\big)$$

o, equivalentemente, $T - T(0)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

El Teorema de Mazur-Ulam

Teorema (Mazur-Ulam, 1932)

Toda isometría sobreyectiva entre espacios normados es una transformación afín

Observaciones

X e Y espacios normados reales, $T : X \longrightarrow Y$ isometría biyectiva.

- Es equivalente a ver que T es lineal (cambiando T por $T - T(0)$)
- Por ser continua, basta ver que T es aditiva: $T(x + y) = T(x) + T(y)$
- Estudiaremos una demostración de Bogdan Nica de 2012, totalmente elemental.
- No obstante, la demostración original es muy sencilla y produce otros resultados:

Teorema (Baker)

Si Y es estrictamente convexo, toda isometría de X en Y es afín.

Teorema (Mankiewicz)

Toda aplicación que lleve isométricamente un abierto conexo de X sobre un abierto de Y es la restricción de una isometría (afín) de X sobre Y.

El caso complejo del Teorema de Mazur-Ulam

Pregunta

X, Y espacios normados complejos, $T : X \longrightarrow Y$ isometría sobreyectiva ($\mathbb{R}$-lineal).
¿Son X e Y $\mathbb{C}$-isométricamente isomorfos o, al menos, $\mathbb{C}$-isomorfos?

Respuestas negativas

X espacio normado complejo, definimos $\overline{X}$ como X con el producto escalar $(\lambda, x) \longmapsto \overline{\lambda}\, x$ para $x \in X$ y $\lambda \in \mathbb{C}$. X y $\overline{X}$ son indistinguibles como espacios reales, pero pueden ser distintos como espacios complejos:

- **Bourgain 1986:** X y $\overline{X}$ pueden no ser $\mathbb{C}$-isomorfos.
- **Kalton 1995:** Otro ejemplo explícito (una suma torcida de espacios de Hilbert).
- **Ferenczi 2007:** Existe un espacio X con únicamente dos posibles estructuras complejas (isométricas como espacios reales) que son totalmente incomparables (ningún subespacio de dimensión infinita de una estructura es $\mathbb{C}$-isomorfo a ningún subespacio de la otra).

Problemas abiertos relacionados

Sección 3

3. Problemas abiertos relacionados
   - El problema de Tingley
   - Espacios Lipschitz-equivalentes

El problema de Tingley

Problema (Tingley, 1986)

X, Y espacios normados, $S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$, $S_Y = \{y \in Y \,:\, \|y\| = 1\}$.

$T : S_X \longrightarrow S_Y$ isometría biyectiva

¿es T la restricción de una isometría (lineal) de X sobre Y?

Observaciones

- Está abierto incluso en dimensión 2.
- Es equivalente a preguntar si la extensión homogénea de T dada por
$$\widetilde{T}(x) = \|x\|\, T\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \quad \text{si } x \neq 0, \quad \widetilde{T}(0) = 0$$
es una isometría (lineal) de X sobre Y.
- Tingley probó que, en dimensión finita, se tiene
$$T(-x) = -T(x) \qquad \big(x \in S_X\big)$$
(T lleva puntos antipodales en puntos antipodales).

El problema de Tingley. II

Problema (Tingley, 1986)

X, Y espacios normados, $T : S_X \longrightarrow S_Y$ isometría biyectiva

¿es T la restricción de una isometría (lineal) de X sobre Y?

Algunos resultados positivos

- Para $1 \leqslant p < \infty$, $X = L_p(\mu)$ y $Y = L_p(\nu)$ ✓
- $X = C(K)$, $X = L_1(\mu)$, X subespacio de codimensión finita de $C[0,1]$ ✓
- Si B_X es un poliedro (dimensión finita) ✓

Algunas propiedades

- Si $\|T(x) - \lambda T(y)\| \geqslant \|x - \lambda y\|$ para todo $x, y \in S_X$ y todo $\lambda > 0$, entonces T se extiende a una isometría lineal de X en Y.
- Si $\dim(X) = \dim(Y) = 2$, T lleva biyectivamente puntos extremos en puntos extremos.

El problema de Tingley. III

Bibliografía

Ding GuangGui
On isometric extension problem between two unit spheres
Science in China Series A: Mathematics (2009)

Vladimir Kadets and Miguel Martín
Extension of isometries between unit spheres of finite-dimensional polyhedral Banach spaces
J. Math. Anal. Appl. (2012)

Dongni Tan, Xujian Huang, and Rui Liu
Generalized-lush spaces and the Mazur-Ulam property
Studia Math. (2013)

Royotaro Tanaka
A further property of spherical isometries
Bull. Aust. Math. Soc. (2014)

Espacios Lipschitz-equivalentes

Definición

(X, d_1), (Y, d_2) espacios métricos son *Lipschitz-equivalentes* si existe $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva y existen $m, M > 0$ tales que

$$m\, d_1(x, y) \leqslant d_2(f(x), f(y)) \leqslant M\, d_1(x, y) \qquad \big(x, y \in X\big)$$

Problema

X e Y Banach. Si X e Y son Lipschitz-equivalentes, ¿son linealmente isomorfos?

Algunos resultados parciales

- **Enflo 1970:** Si X es Lipschitz-equivalente a un espacio de Hilbert, entonces X es isomorfo a un espacio de Hilbert.
- **Aharoni-Lindenstrauss 1978:** Existe un espacio de Banach X que es Lipschitz-equivalente a $c_0(\Gamma)$ (Γ no numerable) y que no es isomorfo a $c_0(\Gamma)$.
- **Heinrich-Mankiewicz 1982:** Si X es Lipschitz-equivalente a ℓ_p $(1 < p < \infty)$, entonces X es linealmente isomorfo a ℓ_p.
- **Godefroy-Kalton-Lancien 2000:** Si X es Lipschitz-equivalente a c_0, entonces X es linealmente isomorfo a c_0.

Espacios Lipschitz-equivalentes. II

Problema

X e Y Banach. Si X e Y son Lipschitz-equivalentes, ¿son linealmente isomorfos?

El problema está abierto en el caso separable.

Un caso particular

Si X es Lipschitz-equivalente a ℓ_1, ¿es X linealmente isomorfo a ℓ_1?

Porqué es interesante...

Si X es Lipschitz-equivalente a ℓ_1 y es un espacio dual, entonces X es linealmente isomorfo a ℓ_1.

Otro problema

Si c_0 es Lipschitz-equivalente a un subconjunto de X, ¿se embebe c_0 linealmente en X?

Espacios Lipschitz-equivalentes. III

El estudio de los embebimientos Lipschitz ha producido resultados sobre isometrías:

Teorema (Godefroy-Kalton)

X Banach separable. Si hay una isometría de X en Y, entonces Y contiene un subespacio isométricamente isomorfo a X.

Observaciones

- El resultado se basa en otro anterior de Figiel, junto con elevaciones de aplicaciones Lipschitz.
- Es falso en caso no separable:

Ejemplo (Godefroy-Kalton)

Cualquier espacio de Hilbert no separable H se embebe isométricamente en $\mathcal{F}(H)$, pero este espacio no contiene subespacios reflexivos no separables.

Espacios Lipschitz-equivalentes. IV

Bibliografía

Yoav Benuamini and Joran Lindenstrauss
Geometric nonlinear functional analysis, vol. 1.
AMS Colloquium Publications (2000)

Gilles Godefroy and Nigel Kalton
Lipschitz-free Banach spaces
Studia Math. (2003)

Nigel Kalton
The Nonlinear geometry of Banach spaces
Rev. Math. Complutense (2008)

Gilles Godefroy
Linearization of isometric embedding between Banach spaces: an elementary approach
Oper. Matrices (2012)