El Teorema de Mazur-Ulam

Pablo Berná (UV)
Marc Caelles (UB)
Raquel González (ULL)
Daniel Morales (UNEX)
Lidia Orellana (UZ)
José Antonio Salmerón (UM)

Profesores: Miguel Martín y Javier Merí

V Escuela-Taller de Análisis Funcional

ICMAT, Madrid, Marzo 2015

Esquema de la presentación

Introducción

Sección 1

Espacio normado

Definición de espacio normado (Banach, 1922)

Un **espacio normado** (real) es un conjunto X dotado de las siguientes operaciones:

- *Suma*: $X \times X \longrightarrow X$, $(x, y) \longmapsto x + y$
  (asociativa, conmutativa, con elemento neutro y con elemento opuesto)
- *Producto por escalares*: $\mathbb{R} \times X \longrightarrow X$, $(\lambda, x) \longmapsto \lambda x$
  (asociativo, distributivo (2), con elemento neutro)
- *Norma*: $X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$, $x \longmapsto \|x\|$, verificando:
  - $\|x\| = 0 \implies x = 0$,
  - $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$,
  - $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$

Un espacio normado X es...

Un espacio vectorial (Peano, 1888)

- Suma y producto por escalares

Un espacio topológico (Hausdorff, 1914)

- Los entornos de un punto $x_0 \in X$ contienen a alguno de la forma

$$\{x \in X \ : \ \|x - x_0\| < \delta\} \qquad \big(\delta \in \mathbb{R}^+\big)$$

Un espacio métrico (Fréchet, 1906)

- Su estructura viene dada por la *distancia* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(x,y) = \|x - y\| \qquad \big(x, y \in X\big)$$

  - $d(x,y) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x = y$
  - $d(x,y) = d(y,x)$
  - $d(x,y) \leqslant d(x,z) + d(z,y)$

Teorema de Mazur-Ulam

Teorema de Mazur-Ulam (1932)

Toda isometría sobreyectiva entre espacios normados es afín.

Aplicación afín

Sean X e Y espacios normados reales. Se dice que $T : X \longrightarrow Y$ es **afín** si

$$T(\lambda x + (1 - \lambda)y) = \lambda T(x) + (1 - \lambda)T(y)$$

para cada $x, y \in X$, $\lambda \in [0, 1]$.

- Equivalentemente, T es afín si $T - T(0)$ es $\mathbb{R}$-lineal.

Isometría

Sean X e Y espacios normados reales. $f : X \longrightarrow Y$ es una **isometría** si

$$\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\| \;\; \forall\, x, y \in X.$$

El Teorema de Mazur-Ulam. II

Teorema de Mazur-Ulam (1932)

Toda isometría sobreyectiva entre espacios normados es afín.

Isomorfismo isométrico

La identificación **total** entre dos espacios normados es el *isomorfismo isométrico*: $T : X \longrightarrow Y$ lineal, biyectiva y que conserva la norma ($\|T(x)\| = \|x\| \ \forall x \in X$)

$\Longrightarrow$ T y T^{-1} lineales, continuas e isometrías

Corolario

Toda isometría sobreyectiva entre espacios normados reales es, salvo una traslación, un isomorfismo isométrico.

Aplicaciones afines continuas

Lema

Sea $T : X \longrightarrow Y$ aplicación continua entre dos espacios normados reales.

1. Si T es aditiva $(T(x+y) = T(x) + T(y)\ \forall x, y \in X) \Longrightarrow T$ es $\mathbb{R}$-lineal.
2. Si T conserva puntos medios $(T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T(y)\ \forall x, y \in X)$ $\Longrightarrow T$ es afín.

Demostremos que si T es aditiva, entonces es $\mathbb{R}$-lineal.

1. $T(0) = 0$.
2. $T(nx) = nT(x),\ \forall\, n \in \mathbb{N}$.
3. $T(x - x) = T(x) + T(-x) = 0 \implies T(-x) = -T(x)$.
4. $mT(x) = T(mx) = T(\frac{mnx}{n}) = nT(\frac{mx}{n}) \implies \frac{m}{n}T(x) = T(\frac{mx}{n})$.
5. Por continuidad, $T(\lambda x) = \lambda T(x),\ \forall\, \lambda \in \mathbb{R}$.

Aplicaciones afines continuas

Lema

Sea $T : X \longrightarrow Y$ aplicación continua entre dos espacios normados reales.

1. Si T es aditiva $(T(x+y) = T(x) + T(y)\ \forall x, y \in X) \Longrightarrow T$ es $\mathbb{R}$-lineal.
2. Si T conserva puntos medios $(T\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{1}{2}T(x) + \frac{1}{2}T(y)\ \forall x, y \in X)$ $\Longrightarrow T$ es afín.

Si T conserva puntos medios, veamos que $G(x) := T(x) - T(0)$ es $\mathbb{R}$-lineal. Para ello, veamos que $G(x)$ es aditiva.

1. $$G\left(\frac{x+y}{2}\right) = T\left(\frac{x+y}{2}\right) - T(0) = \frac{T(x)+T(y)}{2} - T(0)$$
   $$= \frac{G(x)+G(y)+2T(0)}{2} - T(0) = \frac{G(x)+G(y)}{2}.$$
2. $$G(x) = G\left(\frac{2x+0}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(G(2x) - G(0)\big) \implies G(2x) = 2G(x).$$
3. Entonces,
   $$G(x+y) = G\left(\frac{2x+2y}{2}\right) = \frac{1}{2}\big(G(2x) + G(2y)\big) = G(x) + G(y).$$

Demostración por Bogdan Nica (2012)

Sección 2

Demostración del Teorema de Mazur-Ulam (Nica, 2012)

1. X espacio normado, $x_1, x_2 \in X$. Para cualquier isometría g que sale de X definimos
$$\operatorname{def}(g) = \left\| g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - \frac{g(x_1)+g(x_2)}{2} \right\|.$$
2. $\operatorname{def}(g) \leqslant \frac{1}{2}\left\|g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_1)\right\| + \frac{1}{2}\left\|g\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - g(x_2)\right\| = \dfrac{\|x_1-x_2\|}{2}$.
3. Sea $f : X \longrightarrow Y$ una isometría sobreyectiva. Por el lema previo, es suficiente probar que $\operatorname{def}(f) = 0$.
4. Consideremos ahora $f' = f^{-1}\rho f : X \longrightarrow X$, donde
$$\rho(y) = f(x_1) + f(x_2) - y \qquad (y \in Y)$$
es la simetría respecto a $\dfrac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$.
5. Luego f' es isometría por ser composición de isometrías y verifica que $f'(x_1) = x_2$ y $f'(x_2) = x_1$.
6. Además,
$$\begin{aligned}\operatorname{def}(f') &= \left\| f^{-1}\left(f(x_1)+f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right) - \frac{x_1+x_2}{2}\right\| \\ &= \left\| f(x_1)+f(x_2) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) - f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\right\| = 2\operatorname{def}(f)\end{aligned}$$
7. Por tanto, $\operatorname{def}(f) = 0$.

Caracterización métrica del punto medio

Sección 3

Caracterización métrica del punto medio (Mazur-Ulam)

Z espacio normado, $x, y \in Z$. Definimos

$$H_1(x,y) = \left\{u \,:\, \|x-u\| = \|y-u\| = \tfrac{1}{2}\|x-y\|\right\}$$
$$H_{n+1}(x,y) = \left\{u \in H_n(x,y) \,:\, H_n(x,y) \subset B\left(u, \tfrac{1}{2}\mathrm{diam}(H_n)\right)\right\}.$$

Entonces $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n(x,y) = \left\{\frac{1}{2}(x+y)\right\}$.

- Si $u \in H_n \implies \widetilde{u} \in H_n$.
  - Si $u \in H_1 \implies \widetilde{u} \in H_1$.
  - Hipótesis de Inducción: si $u \in H_{n-1} \Rightarrow \widetilde{u} \in H_{n-1}$.
  - Si $u \in H_n \iff \|u-w\| \leqslant \frac{1}{2}\mathrm{diam}(H_{n-1}),\ \forall\, w \in H_{n-1}$.
- $\frac{x+y}{2} \in H_n$.
  - $\frac{x+y}{2} \in H_1$.
  - $\frac{x+y}{2} \in H_n$.
- H_n es una sucesión decreciente cuyos diámetros tienden a cero.
- $\bigcap_{n=1}^{\infty} H_n(x,y) = \left\{\frac{1}{2}(x+y)\right\}$.

Versión local del Teorema de Mazur-Ulam

Sección 4

Versión local del Teorema de Mazur-Ulam

Teorema

E espacio normado, $\Omega \subset E$ abierto conexo, $f : \Omega \longrightarrow f(\Omega)$ isometría local, abierta. Entonces f es la restricción de una aplicación afín.

- Dado $x_0 \in \Omega$, existe $r > 0$ tal que $f : B(x_0, 2r) \longrightarrow B(f(x_0), 2r)$ es isometría biyectiva.
- $f|_{B(x_0,r)}$ es afín.
- Ω es arcoconexo.
- Dados $x, y \in \Omega$, existe $\gamma : [0,1] \longrightarrow \Omega$ con $\lambda(0) = x$, $\gamma(1) = y$. Como $\gamma[0,1]$ es compacto, podemos tomar un recubrimiento finito de bolas centradas en puntos de $\gamma[0,1]$ en las que f es afín.
- Como dos aplicaciones afines que coinciden en un abierto son restricciones de la misma aplicación afín, hemos terminado.

Teorema de Baker

Sección 5

La sobreyectividad es necesaria

Ejemplo

Sea $f : (\mathbb{R}, |\cdot|) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\infty)$, $f(t) = (t, \operatorname{sen}(t))$.

1. f es una función isométrica.
2. f no sobreyectiva.
3. $f(0) = 0$.
4. f no lineal $\Rightarrow$ f no afín.

En lugar de la sobreyectividad, ¿qué otras condiciones podemos dar para asegurar que la isometría sea afín?

Estrictamente convexo

Un espacio Z es **estrictamente convexo** si dados $x, y \in Z$ y $\|x+y\| = \|x\|+\|y\|$, entonces $x = \lambda y$, $\lambda \geqslant 0$.

Versión local del Teorema de Baker

Versión local del Teorema de Baker

Sea X espacio normado e Y un espacio normado estrictamente convexo. Toda isometría local $f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$, siendo Ω abierto y conexo, es afín.

Para su demostración, necesitamos el siguiente lema.

Lema de Baker

Sea Z un espacio normado estrictamente convexo y sean $x, y \in Z$, entonces

$$H_1(x,y) := \left\{ z \in Z \ : \ \|x - z\| = \|y - z\| = \frac{1}{2}\|x - y\| \right\},$$

es unipuntual. Más concretamente, $H_1(x,y) = \{\frac{x+y}{2}\}$.

Demostración del Lema de Baker

Lema de Baker

Sea Z un espacio normado estrictamente convexo y sean $x, y \in Z$, entonces

$$H_1(x,y) := \left\{ z \in Z \ : \ \|x - z\| = \|y - z\| = \tfrac{1}{2}\|x - y\| \right\},$$

es unipuntual. Más concretamente, $H_1(x,y) = \{\frac{x+y}{2}\}$.

- $\frac{1}{2}(x+y) \in H_1(x,y)$.
- Sean $u, v \in H_1(x,y)$, entonces

$$\begin{aligned} \left\| x - \frac{1}{2}(u+v) \right\| &= \left\| \frac{1}{2}(x-u) + \frac{1}{2}(x-v) \right\| \\ &\leqslant \left\| \frac{1}{2}(x-u) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(x-v) \right\| = \frac{1}{2}\|x-y\| \end{aligned}$$

  Análogamente para y, se cumple que $\left\| y - \frac{1}{2}(u+v) \right\| \leqslant \frac{1}{2}\|x-y\|$.
  Si algunas de las desigualdades anteriores fuera estricta,

$$\|x-y\| \leqslant \left\| x - \frac{1}{2}(u+v) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(u+v) - y \right\| < \|x-y\|,$$

Demostración del Lema de Baker

Lema de Baker

Sea Z un espacio normado estrictamente convexo y sean $x, y \in Z$, entonces

$$H_1(x,y) := \left\{ z \in Z \ : \ \|x-z\| = \|y-z\| = \tfrac{1}{2}\|x-y\| \right\},$$

es unipuntual. Más concretamente, $H_1(x,y) = \{\frac{x+y}{2}\}$.

- $\frac{1}{2}(x+y) \in H_1(x,y)$.
- Sean $u, v \in H_1(x,y)$, entonces

$$\left\| x - \frac{1}{2}(u+v) \right\| = \left\| \frac{1}{2}(x-u) + \frac{1}{2}(x-v) \right\|$$
$$= \left\| \frac{1}{2}(x-u) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(x-v) \right\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$$

  Análogamente para y, se cumple que $\left\| y - \frac{1}{2}(u+v) \right\| = \frac{1}{2}\|x-y\|$.
  Si algunas de las desigualdades anteriores fuera estricta,

$$\|x-y\| \leqslant \left\| x - \frac{1}{2}(u+v) \right\| + \left\| \frac{1}{2}(u+v) - y \right\| < \|x-y\|.$$

- Z estrictamente convexo $\Rightarrow (x-u) = \lambda(x-v)$ con $\lambda \geqslant 0$.
  Además, $\|x-u\| = \|x-v\|$, por tanto, $u = v$.

Demostración de la versión local del Teorema de Baker

Versión local del Teorema de Baker

Sea X espacio normado e Y un espacio normado estrictamente convexo. Toda isometría local $f : \Omega \subset X \longrightarrow Y$, siendo Ω abierto y conexo, es afín.

- Para todo $x_0 \in \Omega$ $\exists$ $r > 0$ tal que $f|_{B(x_0,2r)}$ es isometría.
- Sean $x, y \in B(x_0, r)$, entonces $H_1(x, y) \subset B(x_0, 2r)$.
- $f(H_1(x, y)) \subset H_1(f(x), f(y))$.
- $\frac{x+y}{2} \in H_1(x, y)$ y, por el lema anterior, $H_1(f(x), f(y)) = \left\{\frac{f(x)+f(y)}{2}\right\}$. Por tanto, $f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
- Obtenemos que $f|_{B(x_0,r)}$ es afín.

Corolario (Teorema de Baker)

Sean Y un espacio normado estrictamente convexo y X un espacio normado. Toda isometría $f : X \longrightarrow Y$ es afín.

Observación

Supongamos que $(Y, ||\cdot||)$ no es un espacio estrictamente convexo.

- Existen $y_1, y_2 \in S_Y$ distintos verificando $\|y_1 + y_2\| = \|y_1\| + \|y_2\|$.
- Tomamos $X = \mathbb{R}$ y definimos $f : \mathbb{R} \to Y$ por

$$f(t) = \begin{cases} ty_1 & \text{si } t \geqslant 0, \\ ty_2 & \text{si } t < 0. \end{cases}$$

- f es isometría: sean $s, t \in \mathbb{R}$ (con $t > 0$ y $s < 0$),

$$\|f(t) - f(s)\| = \|ty_1 - sy_2\| = t\|y_1\| - s\|y_2\| = t - s = |t - s|.$$

- Como $f(0) = 0$ y f no es lineal, f no es afín.

Para terminar...

Sección 6

Posibles extensiones del Teorema de Mazur-Ulam

Problema (Tingley, 1986)

X, Y espacios normados, $S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\}$, $S_Y = \{y \in Y \,:\, \|y\| = 1\}$.

$f : S_X \longrightarrow S_Y$ isometría biyectiva

¿es f la restricción de una isometría (lineal) de X sobre Y?

Este problema está abierto incluso en dimensión dos

Problema

X e Y Banach. Decimos que X e Y son Lipschitz-equivalentes si existe $f : X \longrightarrow Y$ biyectiva y existen $m, M > 0$ tales que

$$m\, d_1(x,y) \leqslant d_2(f(x), f(y)) \leqslant M\, d_1(x,y) \qquad \big(x, y \in X\big)$$

¿se tiene en este caso que X e Y son linealmente isomorfos?

Este problema está abierto en caso separable

Bibliografía

Yoav Benyamini and Joran Lindenstrauss
Geometric nonlinear functional analysis, vol. 1.
AMS Colloquium Publications (2000)

Richard Fleming and James Jamison
Isometries on Banach spaces: Vector-valued function spaces and operator spaces
Chapman & Hall/CRC, Monographs & Surveys in Pure & Applied Math. (2003)

Bogdan Nica
The Mazur–Ulam theorem
Expositiones Mathematicae (2012)

Stanisław Mazur y Stanisław Ulam