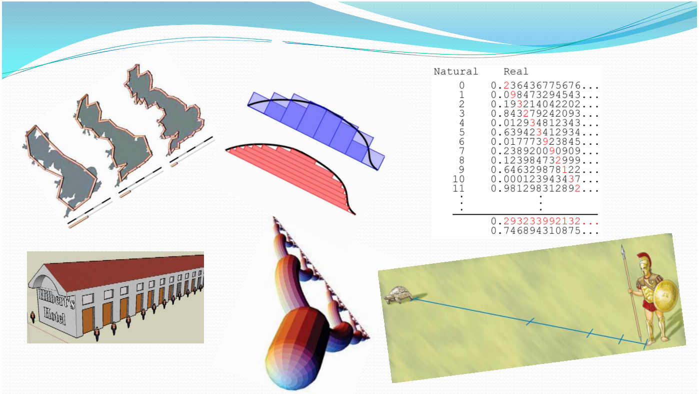
A vueltas con el infinito

Miguel Martín (Universidad de Granada)

http://www.ugr.es/local/mmartins



UAM, Madrid, 9 de Febrero de 2012

Organización de la conferencia

¿Qué es el infinito?

...intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras.

Galileo Galilei *(1564–1642)*

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert *(1862–1943)*

Para mí, el infinito comienza a partir de mil pesetas [6€].

Julio Rey Pastor *(1888–1962)*

El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho establece una frontera que, en cierta forma, separa las matemáticas de la lógica, o, al menos, de lo que clásicamente se ha entendido por lógica. El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.

Antonio J. Durán *(1962–)*

Definiciones de infinito I

Actualización del *Diccionario de la Lengua Española* en CD-ROM para las últimas versiones de los sistemas operativos.

PRESENTACIÓN

AVANCE DE LA 23.ª EDICIÓN

¿Quién hace el Diccionario?
¿Cómo se actualiza?
¿Cómo se muestran las enmiendas y adiciones?
¿Cómo se revisan los americanismos del Diccionario?
¿Con qué medios informáticos se revisa el Diccionario?
Cifras de actualización

LA 22.ª EDICIÓN (2001)

El Diccionario en cifras
¿Qué novedades presenta la 22.ª edición?
Advertencias para el uso de este Diccionario

infinito, ta.

(Del lat. *infinītus*).

1. adj. Que no tiene ni puede tener fin ni término.

2. adj. Muy numeroso o enorme.

3. m. Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*

4. m. En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.

5. m. *Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.

6. m. *Mat.* Signo (∞) con que se expresa ese valor.

7. adv. m. Excesivamente, muchísimo.

□ V.

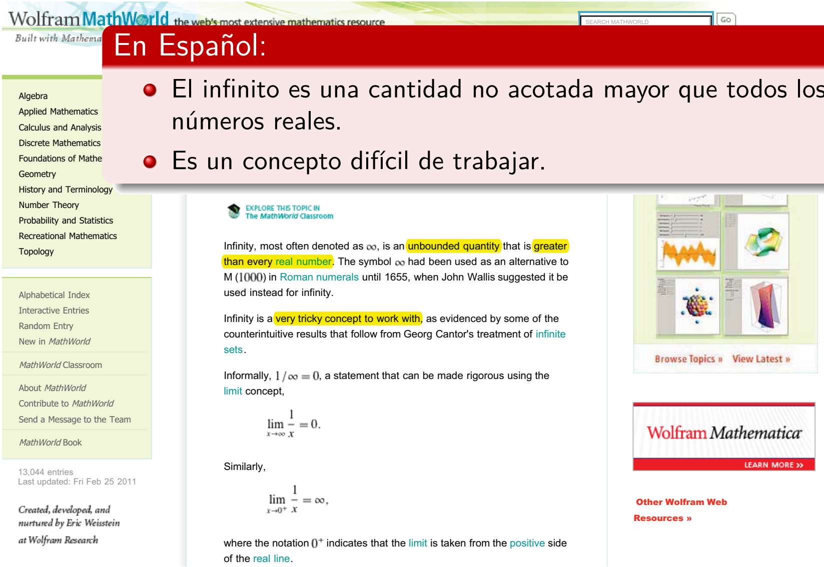
línea infinita

proceso en infinito

Definiciones de infinito II

En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.



Wolfram MathWorld the web's most extensive mathematics resource

Built with Mathema

Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathe
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in *MathWorld*

MathWorld Classroom

About *MathWorld*
Contribute to *MathWorld*
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and nurtured by Eric Weisstein at Wolfram Research

EXPLORE THIS TOPIC IN The *MathWorld* Classroom

Infinity, most often denoted as ∞, is an unbounded quantity that is greater than every real number. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in Roman numerals until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a very tricky concept to work with, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of infinite sets.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the limit concept,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the limit is taken from the positive side of the real line.

Browse Topics » View Latest »

Wolfram *Mathematica* LEARN MORE »

Other Wolfram Web Resources »

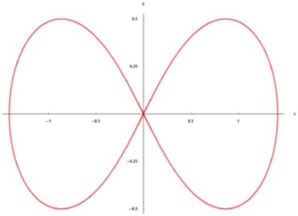
Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

  que no tiene principio ni fin

- Fue John Wallis (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el lazo del amor
- Pudo tomar el símbolo del número romano M (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la letra griega *omega*



Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

  Una multitud infinita es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.

- Richard Dedekind (1831–1916):

  Un sistema S se llama infinito cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es finito.

- Georg Cantor (1845–1918):

  Primer estudio sistemático del infinito, aritmética del infinito, números transfinitos... No todos los infinitos son iguales.

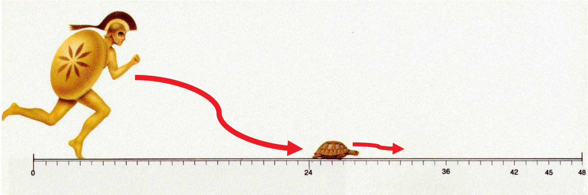
Los procesos infinitos y sus paradojas

2. Los procesos infinitos y sus paradojas
   - Aquiles y la tortuga
   - Sobre la invención del ajedrez
   - Manejando el infinito (1)

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más... De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de Parménides, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna*.
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que el "infinito" no puede ser alcanzado:
  - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (cierto),
  - se necesita una cantidad infinita de movimientos (cierto),
  - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (¡falso!)
- Aristóteles tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que

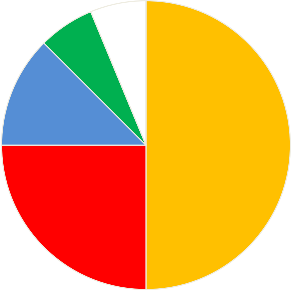
  una "suma infinita" de cantidades positivas puede ser finita.

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$

Gráficamente:



Demostración:

Tomamos un queso

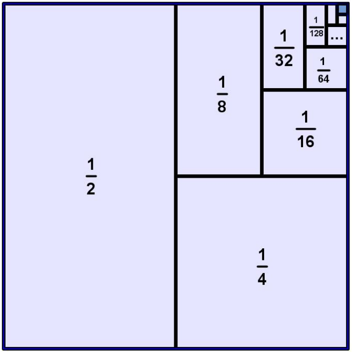
y lo vamos partiendo. . .

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{32}+\frac{1}{64}+\cdots=1$$

Otra demostración:



Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&>\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}\right)+\cdots\\
&=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots
\end{aligned}$$

Una última cita sobre Aquiles y la Tortuga

Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera? – dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una serie infinita de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.

Lewis Carroll, Lo que la Tortuga le dijo a Aquiles, 1894

La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado Iadava (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.
Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado Sessa con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el chaturanga, antecesor del ajedrez.
El rey, encantado con el juego, quiso agradecer a Sessa con palacios, joyas, regalos. . . que el joven brahmán siempre rechazaba cortésmente.

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.
El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.
Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \quad \textit{granos de arroz}$$

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63}$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{63} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \cdots + 2^{62})$$
$$X - 1 = 2(X - 2^{63})$$

Por tanto, $X = 2^{64} - 1 \simeq 18 * 10^{18}$.

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
  - Propuso a Sessa considerar un tablero infinito
  - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$\begin{aligned} X &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \cdots \\ X - 1 &= 2\big(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots\big) \\ X - 1 &= 2X \end{aligned}$$

  - Por tanto, ¡$X = -1$! y el rey pidió a Sessa que le entregara un grano de arroz :-)

Manejando el infinito

- La historia de las Matemáticas puede explicarse en gran parte por el intento de encontrar herramientas para domar al infinito.
- Casi en cualquier razonamiento matemático aparece, escondido o no, el concepto de infinito.
- Esto es especialmente claro en el Análisis Matemático moderno, donde casi cualquier razonamiento es, en el fondo, calcular un límite.

La herramienta más sencilla para domar al infinito es, probablemente, la inducción matemática, que consiste en llegar al infinito *pasito a pasito*, como en un efecto dominó.

La inducción matemática

- Formalmente, el principio de inducción es un axioma que establece que

  cualquier subconjunto de números naturales que contenga al 1 y al sucesor de cualquier elemento coincide, de hecho, con el conjunto de todos los números naturales.

- Es equivalente al principio de buena ordenación de los números naturales:

  cualquier subconjunto de números naturales tiene mínimo.

- Parece ser que hay "razonamientos por inducción" en la antigua Grecia, en las matemáticas india y árabe de la Edad Media. . . pero la primera formulación explícita del principio de inducción parece deberse a Blaise Pascal.

La inducción matemática II

- Se demuestran por inducción cosas tan diversas como
  - la suma de los n primeros impares es n^2,
  - hay infinitos números primos (usando números de Fermat),
  - el binomio de Newton,
  - el último teorema de Fermat...
- También hay paradojas que proceden de la inducción:

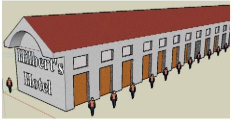
  Si una persona pobre recibe n euros, seguirá siendo pobre.
  - Consideremos la afirmación: $S_n =$ una persona pobre sigue siendo pobre tras recibir n euros.
  - Claramente, S_1 es cierta e, igualmente, si S_n es cierta es claro que S_{n+1} es cierta.
- La inducción también se utiliza en otras Ciencias como la Física para deducir resultados generales de una serie limitada de observaciones.

¿Cuántos infinitos hay?

El hotel de Hilbert

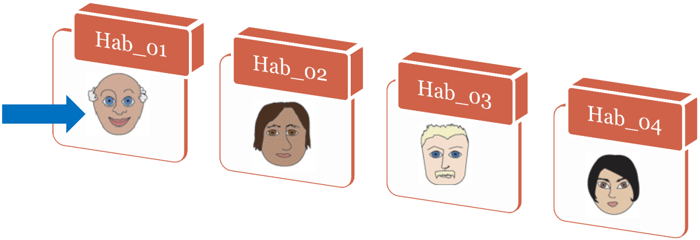
- Esta es una historia inventada por David Hilbert (1862–1943) para explicar que muchos infinitos son iguales.
- Imaginemos un hotel con infinitas habitaciones.
- Su lema es

  "Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti".



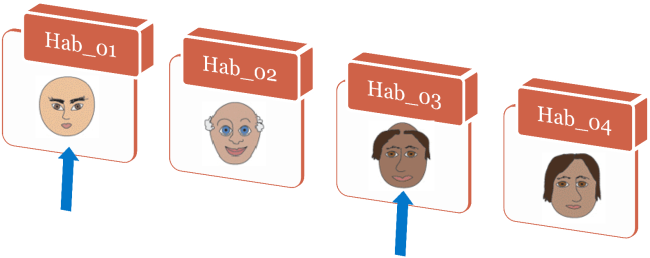
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel está completo pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
    - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
    - lo que deja una habitación libre,
    - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a cualquier cantidad finita de nuevos huéspedes.



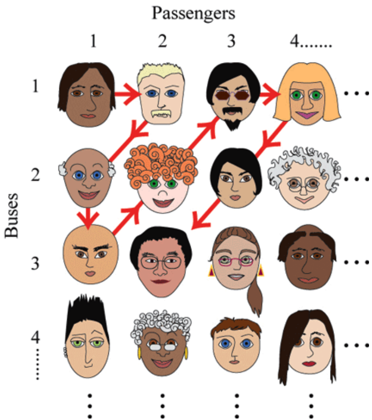
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue completo pero llega un autobús con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
  - hay infinitas habitaciones pares,
  - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
  - quedan vacías las habitaciones impares, que son infinitas,
  - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con cualquier cantidad finita de autobuses.



¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue completo y llegan infinitos autobuses, cada uno con infinitos nuevos huéspedes.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
    - Dejamos libres las infinitas habitaciones impares,
    - sólo queda ordenar los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
    - esto es mala idea...
    - mejor lo hacemos así.



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que "muchos" infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, Georg Cantor (1845–1918) probó que no todos los infinitos son iguales y sistematizó un álgebra de los conjuntos infinitos.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \ldots\}$ números naturales;
- $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$ números enteros;
- $\mathbb{Q} = \{p/q \ : \ p \in \mathbb{Z}, \ q \in \mathbb{N}\}$ números racionales;
- $\mathbb{R}$ números reales.

- El Hotel de Hilbert prueba que $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{Q}$ son infinitos equivalentes, se pueden enumerar, poner en una lista infinita.
- ¿Pasará lo mismo con $\mathbb{R}$?

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que no es posible enumerar $\mathbb{R}$:
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$
\begin{array}{ccl}
1 & \longrightarrow & 0,\boxed{1}2567894\ldots \\
2 & \longrightarrow & 0,8\boxed{3}809823\ldots \\
3 & \longrightarrow & 0,99\boxed{9}90023\ldots \\
4 & \longrightarrow & 0,000\boxed{1}2785\ldots \\
\ldots & &
\end{array}
$$

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

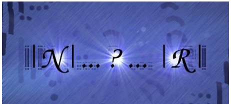
$$0,3870\ldots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, ninguna lista recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego, $\mathbb{R}$ **no** es equivalente a $\mathbb{N}$.

La hipótesis del continuo

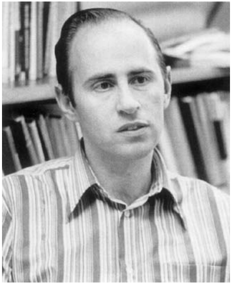
- Después del trabajo de Cantor, los matemáticos han vuelto a pasarlo mal: ni el infinito es único ni estaba domado.
- Uno de los primeros problemas que se pueden plantear es si entre los dos infinitos que conocemos (el cardinal de $\mathbb{N}$ y el cardinal de $\mathbb{R}$) hay algún otro.
- Cantor conjeturó que no, y esta afirmación se conoce como

  la hipótesis del continuo.
- Cantor intentó, en vano, probarla durante muchos años.
- Un problema de apariencia tan sencilla trajo de cabeza a los matemáticos de los siglos XIX y XX.
- Es el Problema 1.a de los problemas del milenio de Hilbert.
- La solución de este problema ha necesitado un cambio radical en la forma de entender las matemáticas.



La hipótesis del continuo II

- La curiosa solución al problema del continuo se debe a Kurt Gödel y Paul Cohen.
- Gödel probó en 1940 que la hipótesis del continuo es consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos;
- Cohen probó en 1963 que la negación de la hipótesis del continuo es también consistente con la axiomática elemental de la teoría de conjuntos.
- Por tanto, es un ejemplo de indecible, que el propio Gödel había demostrado que tenían que existir en 1931.
- La demostración de Cohen necesita una técnica lógica inventada por el mismo llamada "forcing".

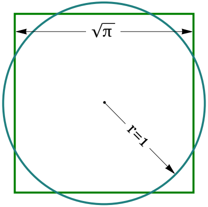


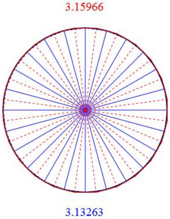
¿Cómo se miden áreas?

4. ¿Cómo se miden áreas?
   - Los griegos
   - Newton y la cuadratura del círculo
   - La medida en el siglo XX
   - Una paradojas del siglo XX

Las cuadraturas en la matemática griega

- Los problemas de cuadratura en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la cuadratura del círculo.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado exhaución para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.





Newton y la cuadratura del círculo

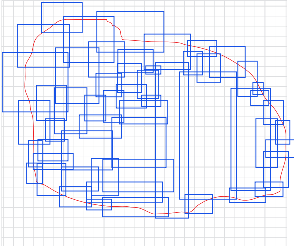
- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona cálculo de áreas con cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región ABC escribiendo la función y como una suma infinita (binomio de Newton).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24\left(\frac{2}{3\cdot 2^3} - \frac{1}{5\cdot 2^5} - \frac{1}{28\cdot 2^7} - \frac{1}{72\cdot 2^9} - \cdots\right)$$

  y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de π.
- En 1882, Ferdinand Lindemann (1852–1939) prueba la imposibilidad de la cuadratura del círculo en el sentido de la Grecia clásica.

¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a Henri Lebesgue (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad infinita de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (suma infinita);
- nos quedamos con la mejor de las mediciones.
- Es un proceso doblemente infinito:
  - cada recubrimiento tiene infinitos rectángulos,
  - hay infinitos recubrimientos, por lo que
  - tomar la mejor medición requiere un proceso infinito

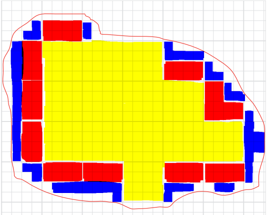


¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los "conjuntos razonables", podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en "medir con un papel milimetrado" cada vez más preciso:
  - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
  - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;
  - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \;\simeq\; 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37\text{u}^2.$$

  - Podemos seguir el proceso hasta el infinito. . . obteniendo, en los casos razonables, el área de la figura.



La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de Lebesgue revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar recubrimientos infinitos y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el Análisis Matemático de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la Física Cuántica no se entienden sin este lenguaje.

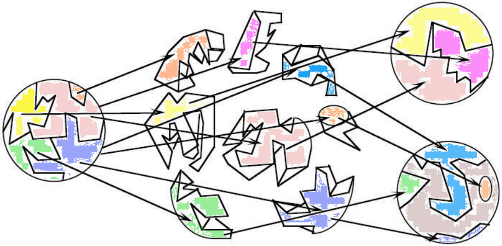
- Aunque la Teoría de la Medida de Lebesgue es completa, no permite medir todos los conjuntos. Esto **no** podría resolverlo ninguna otra forma de medir.

La paradoja de Banach-Tarski

Banach–Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.
- Es imposible que el volumen de todas las piezas pueda ser medido.



Para saber más. . .

Página web–blog sobre Matemáticas en general
Gaussianos
http://gaussianos.com/

Página web sobre historia de las Matemáticas
The MacTutor History of Mathematics archive
http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/

Página web personal de
Javier Pérez González (Universidad de Granada)
http://www.ugr.es/local/fjperez

Página web personal de
Carlos Ivorra (Universidad de Valencia)
http://www.uv.es/ivorra/

Hans Enzensberger
El diablo de los números
Ediciones Siruela, 1998