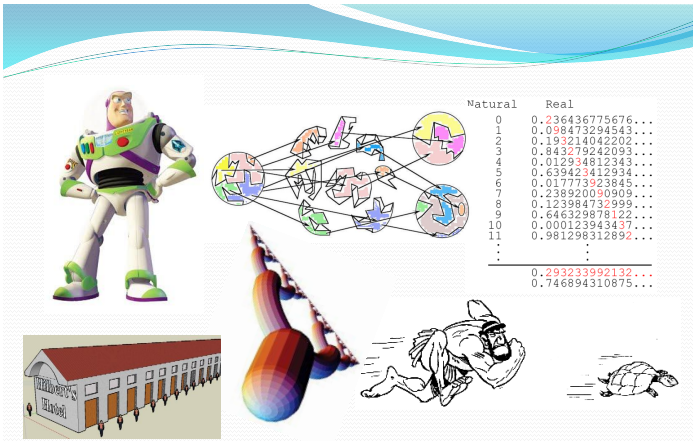


¡Hasta el infinito y más allá!

Miguel Martín

<http://www.ugr.es/local/mmartin>



The collage features several elements: a 3D rendering of Buzz Lightyear; a network diagram with nodes and connections; a table with two columns labeled 'Natural' and 'Real'; a colorful rocket; a cartoon hare running; a cartoon tortoise; and a perspective drawing of a building with a sign that says 'Hotel'.

Natural	Real
0	0.236436775676...
1	0.098473294543...
2	0.193214042202...
3	0.843279242093...
4	0.012934812343...
5	0.639423412934...
6	0.017773923845...
7	0.238920090909...
8	0.123984732999...
9	0.646329878122...
10	0.000123943437...
11	0.981298312892...
...	...
	0.293233992132...
	0.746894310875...

Organización de la conferencia

- 1 Preliminares
- 2 Los procesos infinitos y sus paradojas
- 3 ¿Cuántos infinitos hay?
- 4 ¿Cómo se miden áreas?
- 5 Para saber más

Preliminares

●○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas

○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?

○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?

○○○○○○○

Para saber más

○

Presentación

Presentación

- Miguel Martín Suárez

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Responsable del grupo de investigación
“Geometría de los espacios de Banach”

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Responsable del grupo de investigación
“Geometría de los espacios de Banach”
- Campo de trabajo:
*Análisis Funcional en **dimensión infinita***

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Responsable del grupo de investigación
“Geometría de los espacios de Banach”
- Campo de trabajo:
*Análisis Funcional en **dimensión infinita***
- Y, ¿qué es eso de la *dimensión infinita*?

Presentación

- Miguel Martín Suárez
- Licenciado en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Doctor en Matemáticas por la Universidad de Granada
- Profesor del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Granada
- Responsable del grupo de investigación “Geometría de los espacios de Banach”
- Campo de trabajo:
*Análisis Funcional en **dimensión infinita***
- Y, ¿qué es eso de la *dimensión infinita*?
- Pero antes, ¿*qué es el infinito*?

Preliminares

○●○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas

○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?

○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?

○○○○○○○

Para saber más

○

¿Qué es el infinito?

¿Qué es el infinito?

... intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras

Galileo Galilei (1564–1642)

¿Qué es el infinito?

... intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras

Galileo Galilei (1564–1642)

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert (1862–1943)

¿Qué es el infinito?

... intentamos, con nuestras mentes finitas, discutir sobre el infinito, asignándole propiedades que damos a lo finito y limitado; pero pienso que esto es incorrecto, dado que no podemos hablar de cantidades infinitas como si fuesen mayores, menores o iguales a otras

Galileo Galilei (1564–1642)

¡El infinito! Ninguna cuestión ha conmovido tan profundamente el espíritu del hombre.

David Hilbert (1862–1943)

El infinito tiene poco respeto por la lógica. De hecho establece una frontera que, en cierta forma, separa las matemáticas de la lógica, o, al menos, de lo que clásicamente se ha entendido por lógica. El infinito es como un nido de víboras, y al intelecto humano le ha llevado varios milenios y muchas picaduras poder meter mano ahí.

Antonio J. Durán (1962–)

Definiciones de infinito I



**Actualización del
Diccionario de la
Lengua Española en CD-ROM
para las últimas versiones de
los sistemas operativos.**

PRESENTACIÓN

AVANCE DE LA 23.^a EDICIÓN

¿Quién hace el Diccionario?
¿Cómo se actualiza?
¿Cómo se muestran las
enmiendas y adiciones?
¿Cómo se revisan los
americanismos del Diccionario?
¿Con qué medios informáticos se
revisa el Diccionario?
Cifras de actualización

LA 22.^a EDICIÓN (2001)

El Diccionario en cifras
¿Qué novedades presenta la
22.^a edición?
Advertencias para el uso de este
Diccionario

infinito, ta.

(Del lat. *infinītus*).

1. *adj.* Que no tiene ni puede tener fin ni término.
2. *adj.* Muy numeroso o enorme.
3. *m.* Lugar impreciso en su lejanía y vaguedad. *La calle se perdía en el infinito.*
4. *m.* En una cámara fotográfica, última graduación de un objetivo para enfocar lo que está distante.
5. *m. Mat.* Valor mayor que cualquier cantidad asignable.
6. *m. Mat.* Signo (∞) con que se expresa ese valor.
7. *adv. m.* Excesivamente, muchísimo.

□ V.

[línea infinita](#)

[proceso en infinito](#)

Definiciones de infinito II

Algebra

Applied Mathematics

Calculus and Analysis

Discrete Mathematics

Foundations of Mathematics

Geometry

History and Terminology

Number Theory

Probability and Statistics

Recreational Mathematics

Topology

Alphabetical Index

Interactive Entries

Random Entry

New in MathWorld

MathWorld Classroom

About MathWorld

Contribute to MathWorld

Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries

Last updated: Fri Feb 25 2011

Created, developed, and
nurtured by Eric Weisstein
at Wolfram ResearchFoundations of Mathematics > Set Theory > Cardinal Numbers >
History and Terminology > *Mathematica* Commands >

Infinity



Infinity, most often denoted as ∞ , is an **unbounded quantity** that is **greater than every real number**. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in **Roman numerals** until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a **very tricky concept to work with**, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of **infinite sets**.

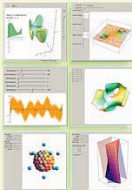
Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the **limit** concept,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the **limit** is taken from the **positive** side of the **real line**.

WOLFRAM
DEMONSTRATIONS PROJECT
6000+ Free Interactive Demonstrations[Browse Topics »](#) [View Latest »](#)

Wolfram Mathematica

LEARN MORE >>

[Other Wolfram Web
Resources »](#)

Definiciones de infinito II

Wolfram MathWorld the web's most extensive mathematics resource
Built with Mathematica

En Español:

- El infinito es una cantidad no acotada mayor que todos los números reales.
- Es un concepto difícil de trabajar.

Algebra
Applied Mathematics
Calculus and Analysis
Discrete Mathematics
Foundations of Mathe
Geometry
History and Terminology
Number Theory
Probability and Statistics
Recreational Mathematics
Topology

Alphabetical Index
Interactive Entries
Random Entry
New in MathWorld

MathWorld Classroom

About MathWorld
Contribute to MathWorld
Send a Message to the Team

MathWorld Book

13,044 entries
Last updated: Fri Feb 25 2011

*Created, developed, and
nurtured by Eric Weisstein
at Wolfram Research*

EXPLORE THIS TOPIC IN
The MathWorld Classroom

Infinitely, most often denoted as ∞ , is an **unbounded quantity** that is **greater than every real number**. The symbol ∞ had been used as an alternative to M (1000) in **Roman numerals** until 1655, when John Wallis suggested it be used instead for infinity.

Infinity is a **very tricky concept to work with**, as evidenced by some of the counterintuitive results that follow from Georg Cantor's treatment of **infinite sets**.

Informally, $1/\infty = 0$, a statement that can be made rigorous using the **limit** concept,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0.$$

Similarly,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = \infty,$$

where the notation 0^+ indicates that the **limit** is taken from the **positive** side of the **real line**.



**Other Wolfram Web
Resources »**

Preliminares

○○○○●○

Los procesos infinitos y sus paradojas

○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?

○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?

○○○○○○○

Para saber más

○

Sobre el símbolo ∞

Sobre el símbolo ∞

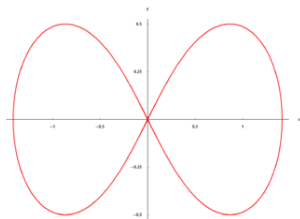
- Origen incierto

Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin



Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin

- Fue **John Wallis** (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el **lazo del amor**



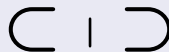
Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin

- Fue [John Wallis](#) (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el *lazo del amor*
- Pudo tomar el símbolo del *número romano* *M* (1000) que en etrusco tenía cierto parecido,



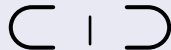
Sobre el símbolo ∞

- Origen incierto
- Tiene la forma de la *lemniscata*

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2$$

que no tiene principio ni fin

- Fue **John Wallis** (1616–1703) el primero en utilizarlo. Lo llamó el **lazo del amor**
- Pudo tomar el símbolo del **número romano *M*** (1000) que en etrusco tenía cierto parecido, o de la **letra griega *omega***

The Greek letter omega symbol (ω), which is a cursive, wavy character.

Preliminares

○○○○○○●

Los procesos infinitos y sus paradojas

○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?

○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?

○○○○○○

Para saber más

○

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

*Una **multitud infinita** es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.*



Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

*Una **multitud infinita** es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.*

- Richard Dedekind (1831–1916):

*Un sistema S se llama **infinito** cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es **finito**.*



Definición actual del infinito matemático (¡mejor no mirar!)

- Bernard Bolzano (1781–1848):

*Una **multitud infinita** es aquella de la cual cualquier multitud finita solamente puede ser parte y no el total.*

- Richard Dedekind (1831–1916):

*Un sistema S se llama **infinito** cuando es semejante a una parte propia de sí mismo; en caso contrario se dice que S es **finito**.*

- Georg Cantor (1845–1918):

*Primer estudio sistemático del **infinito**, aritmética del infinito, números transfinitos. . . **No todos los infinitos son iguales.***



Los procesos infinitos y sus paradojas

- 2 Los procesos infinitos y sus paradojas
 - Aquiles y la tortuga
 - Sobre la invención del ajedrez
 - Gauss suma 100 números

La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

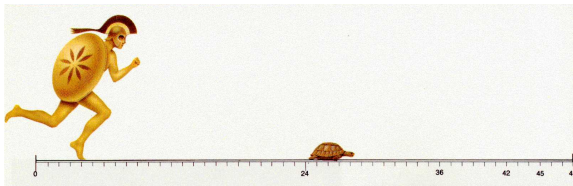
Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

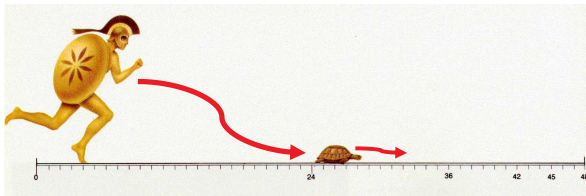
Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



La paradoja de Aquiles y la tortuga

Aquiles, el de los pies ligeros, nunca alcanzará a la tortuga que avanza lentamente unos cuantos metros por delante de él. Pues cuando Aquiles alcance el punto donde estaba la tortuga, ésta ya estará un poco más adelante; y cuando de nuevo Aquiles alcance ese lugar, la tortuga habrá avanzado un poco más. Sin desanimarse, sigue corriendo, pero al llegar de nuevo donde estaba la tortuga, esta ha avanzado un poco más. . . De este modo, la tortuga estará siempre por delante de Aquiles.

Zenón de Elea (490 ac – 425 ac)



Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

●ooooooooo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooo

Para saber más

o

Aquiles y la tortuga II

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
 - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
 - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),
 - se necesita una cantidad infinita de movimientos (**cierto**),

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
 - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),
 - se necesita una cantidad infinita de movimientos (**cierto**),
 - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (**¡falso!**)

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
 - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),
 - se necesita una cantidad infinita de movimientos (**cierto**),
 - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (**¡falso!**)
- **Aristóteles** tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.

Aquiles y la tortuga II

- Zenón, discípulo de **Parménides**, pretendía demostrar que *el ser es uno, eterno, continuo, indivisible e inmutable, cuyos cambios son meras apariencias que no responden a realidad alguna.*
- La paradoja de Zenón se basa en la idea de que **el “infinito” no puede ser alcanzado:**
 - Cada movimiento de Aquiles es una distancia positiva (**cierto**),
 - se necesita una cantidad infinita de movimientos (**cierto**),
 - La suma de todas esas distancias tiene necesariamente que ser infinita, no puede alcanzarse (**¡falso!**)
- **Aristóteles** tildó de *falacias* las paradojas de Zenón, pero no pudo refutarlas con la lógica.
- Hay que saber que **una “suma infinita” de cantidades positivas puede ser finita.**

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○●○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

Sumando cuñas de queso I

Sumando cuñas de queso I

Teorema

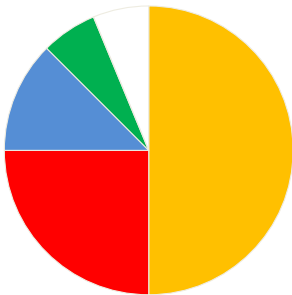
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Gráficamente:

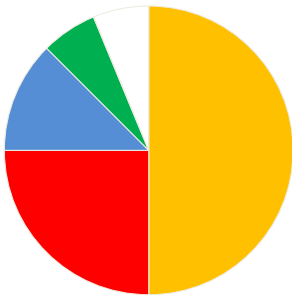


Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Gráficamente:



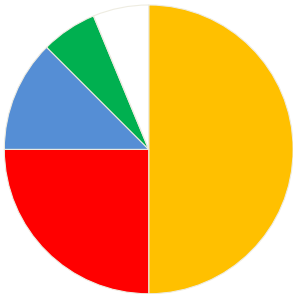
Demostración:

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Gráficamente:



Demostración:

Tomamos un queso

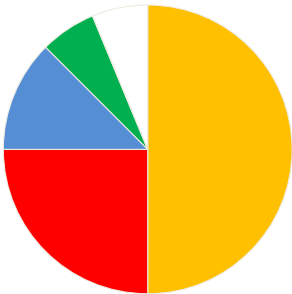


Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Gráficamente:



Demostración:

Tomamos un queso



y lo vamos partiendo...

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

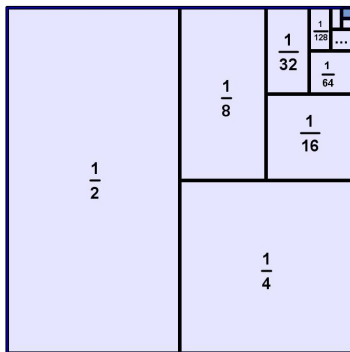
Otra demostración:

Sumando cuñas de queso I

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \dots = 1$$

Otra demostración:



Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

ooo●oooooooo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooooo

Para saber más

o

Sumando cuñas de queso II

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \end{aligned}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots \end{aligned}$$

Sumando cuñas de queso II

Teorema

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \text{ vale infinito.}$$

Demostración:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &> \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \dots \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots \end{aligned}$$

Una última cita sobre Aquiles y la Tortuga

*Aquiles alcanzó a la tortuga y se sentó confortablemente sobre su espalda. ¿De modo que has llegado al final de nuestra carrera? – dijo la tortuga –. ¿A pesar de que realmente consiste en una **serie infinita** de distancias? Yo creía que algún necio había demostrado que esto no podía hacerse.*

Lewis Carroll, Lo que la Tortuga le dijo a Aquiles, 1894

Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

oooo●oooo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooooo

Para saber más

o

La leyenda del origen del ajedrez

La leyenda del origen del ajedrez

*Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado **ladava** (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.*

La leyenda del origen del ajedrez

*Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado **ladava** (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.*

*Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado **Sessa** con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el **chaturanga**, antecesor del ajedrez.*



La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado *ladava* (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.

Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado *Sessa* con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el *chaturanga*, antecesor del ajedrez.



La leyenda del origen del ajedrez

Cuenta la leyenda, que un rey indio llamado **ladava** (s. VI ac), tras perder a su primogénito en una batalla, andaba triste y decaído y nada le hacía sonreír.

Un día llegó a palacio un pobre brahmán llamado **Sessa** con un juego que había inventado para traer la alegría a la vida del rey, el **chaturanga**, antecesor del ajedrez.

El rey, encantado con el juego, quiso agradecer a Sessa con palacios, joyas, regalos... que el joven brahmán siempre rechazaba cortésmente.



Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

oooooooo●oooo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooooo

Para saber más

o

La leyenda del origen del ajedrez II

La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

La leyenda del origen del ajedrez II

*Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:
En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro. . .*



La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.



La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.



La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.



La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.

El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.



La leyenda del origen del ajedrez II

Finalmente, Sessa pidió al rey que le pagara con arroz, de la siguiente forma:

En la primera casilla de un tablero de ajedrez ponemos un grano de arroz, en la segunda dos, en la tercera cuatro... y así vamos doblando la cantidad al avanzar de casilla.

El rey accedió encantado a tan humilde petición y ordenó que trajesen arroz para entregar allí mismo la cantidad que pedía el brahmán.

Pronto se descubrió que petición era menos humilde y más complicada de lo que se pensaba: al ir avanzando en las casillas, la cantidad de arroz era inmanejable.



Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

oooooooo●ooo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooooo

Para saber más

o

El cálculo de la cantidad de arroz

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18}$ *granos de arroz*

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18}$ *granos de arroz*

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18}$ *granos de arroz*

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62})$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62})$$

$$X - 1 = 2(X - 2^{63})$$

El cálculo de la cantidad de arroz

Los contables del reino fueron capaces de calcular la cantidad exacta de arroz que se necesitaba:

$$18446744073709551615 \simeq 18 * 10^{18} \text{ granos de arroz}$$

¡más que todo el arroz cosechado en la India durante los próximos 100 años!

Calculemos la cantidad de arroz para Sessa (que llamamos X):

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63}$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{63} = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^{62})$$

$$X - 1 = 2(X - 2^{63})$$

$$\text{Por tanto, } X = 2^{64} - 1 \simeq 18 * 10^{18}.$$

Preliminares

oooooooo

Los procesos infinitos y sus paradojas

oooooooo●oo

¿Cuántos infinitos hay?

oooooo

¿Cómo se miden áreas?

oooooooo

Para saber más

o

El final de la historia

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$
$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$\begin{aligned}X &= 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots \\X - 1 &= 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots \\X - 1 &= 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots)\end{aligned}$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots)$$

$$X - 1 = 2X$$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots)$$

$$X - 1 = 2X$$

- Por tanto, ¡ $X = -1!$

El final de la historia

A partir de aquí, hay varias versiones sobre el final de la historia:

- **UNO:** El rey mandó decapitar a Sessa.
- **DOS:** Sessa renuncia a su recompensa y el rey le nombra primer ministro.
- **TRES:** El rey, que quería cumplir su promesa, consultó a un matemático, que le dio la siguiente solución:
 - Propuso a Sessa considerar un tablero **infinito**
 - Hizo el siguiente cálculo (X es la cantidad de arroz para Sessa)

$$X = 1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + \dots$$

$$X - 1 = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \dots)$$

$$X - 1 = 2X$$

- Por tanto, ¡ $X = -1!$ y el rey pidió a Sessa que le entregara un grano de arroz :-)

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○●○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Cuenta una leyenda que cuando **Carl F. Gauss** (1777–1855) tenía **7 años**, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que **sumara todos los números del 1 al 100**.



Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Cuenta una leyenda que cuando **Carl F. Gauss** (1777–1855) tenía **7 años**, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que **sumara todos los números del 1 al 100**.
- El maestro pensaba que el niño tardaría varias horas en resolver el problema, pero a los cinco minutos Gauss le entregó la solución: **5050**.



Gauss y la suma de los primero 100 números naturales

- Cuenta una leyenda que cuando **Carl F. Gauss** (1777–1855) tenía **7 años**, uno de sus maestros, para castigarlo porque no atendía en clase, le pidió que **sumara todos los números del 1 al 100**.
- El maestro pensaba que el niño tardaría varias horas en resolver el problema, pero a los cinco minutos Gauss le entregó la solución: **5050**.
- Sorprendido por la rapidez, el maestro pidió a Gauss que le **explicara el procedimiento que había seguido**.



Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en **dos filas**:
 - los 50 primeros de forma creciente
 - y los 50 siguiente de forma decreciente.

1	2	3	...	48	49	50
100	99	98	...	53	52	51

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en **dos filas**:
 - los 50 primeros de forma creciente
 - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma **101**.

1	2	3	...	48	49	50
100	99	98	...	53	52	51
<hr/>						
101	101	101	...	101	101	101

Gauss y la suma de los primero 100 números naturales II

- Gauss lo explicó de la siguiente forma:
- Escribimos los números del 1 al 100 en **dos filas**:
 - los 50 primeros de forma creciente
 - y los 50 siguiente de forma decreciente.
- Observamos que cada columna suma **101**.
- Como hay 50 columnas, obtenemos

$$50 \times 101 = 5050$$

1	2	3	...	48	49	50
100	99	98	...	53	52	51
101	101	101	...	101	101	101

¿Cuántos infinitos hay?

- 3 ¿Cuántos infinitos hay?
 - El hotel de Hilbert
 - Cantor y el continuo

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
●○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

El hotel de Hilbert

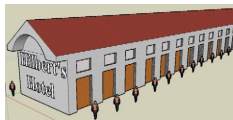
El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por [David Hilbert](#) (1862–1943) para explicar que **muchos infinitos son iguales**.



El hotel de Hilbert

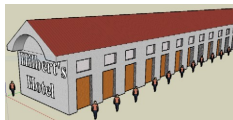
- Esta es una historia inventada por [David Hilbert](#) (1862–1943) para explicar que **muchos infinitos son iguales**.
- Imaginemos un hotel con **infinitas habitaciones**.



El hotel de Hilbert

- Esta es una historia inventada por **David Hilbert** (1862–1943) para explicar que **muchos infinitos son iguales**.
- Imaginemos un hotel con **infinitas habitaciones**.
- Su lema es

“Siempre estamos completos, pero siempre tenemos una habitación para ti”.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○●○○○○

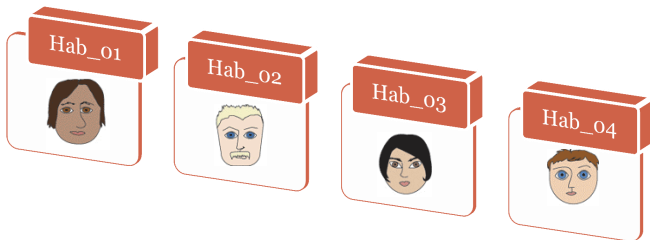
¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

Infinito más uno igual a infinito

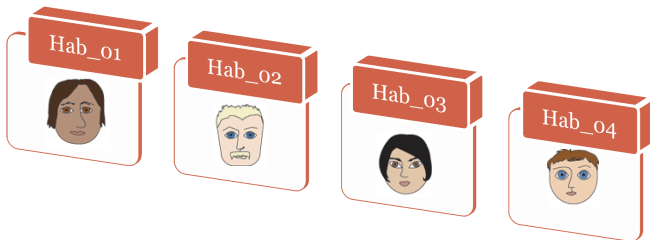
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.



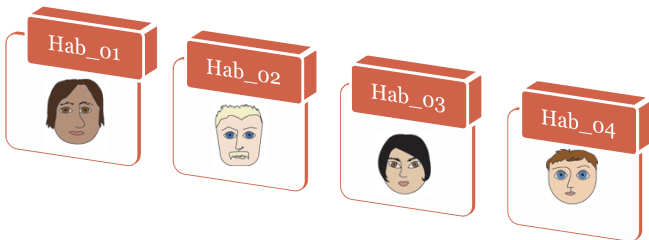
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?



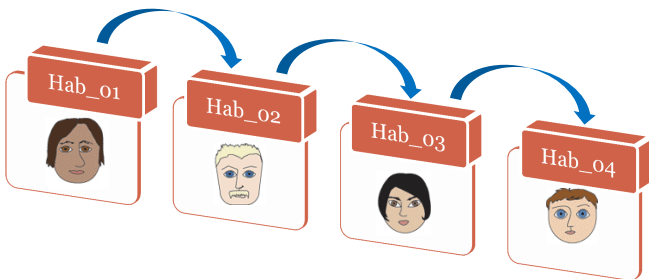
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:



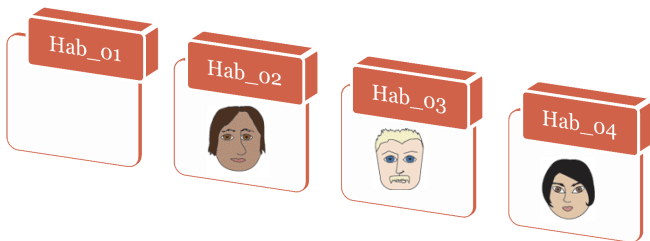
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
 - movemos cada huésped a la habitación siguiente,



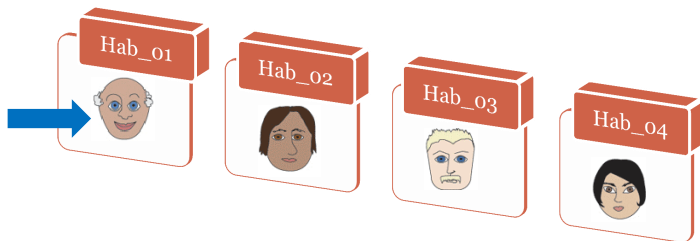
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
 - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
 - lo que deja una habitación libre,



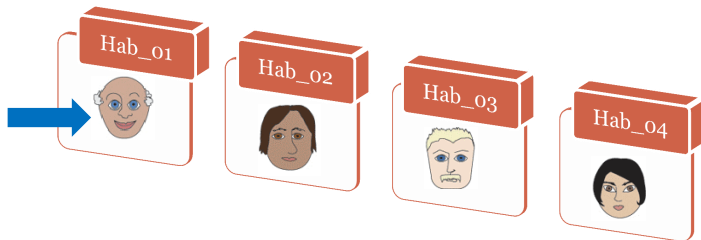
Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
 - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
 - lo que deja una habitación libre,
 - que será ocupada por el nuevo huésped.



Infinito más uno igual a infinito

- El hotel **está completo** pero queremos alojar a un nuevo huésped.
- ¿Se puede hacer?
- Claro que sí:
 - movemos cada huésped a la habitación siguiente,
 - lo que deja una habitación libre,
 - que será ocupada por el nuevo huésped.
- Repitiendo el proceso, podemos alojar a **cualquier cantidad finita** de nuevos huéspedes.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○●○○○

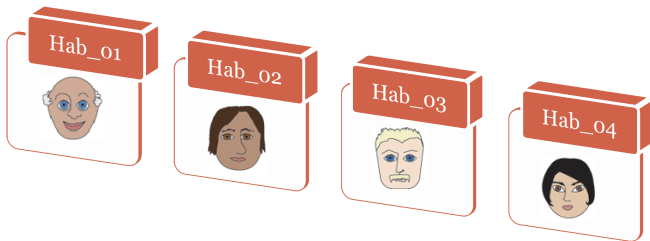
¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

Infinito más infinito igual a infinito

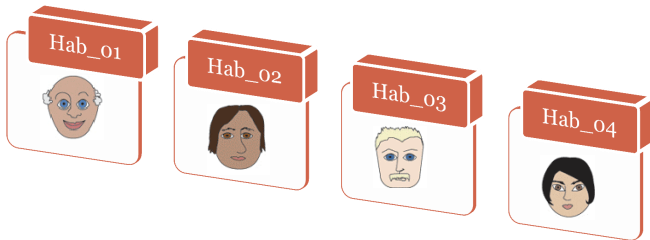
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.



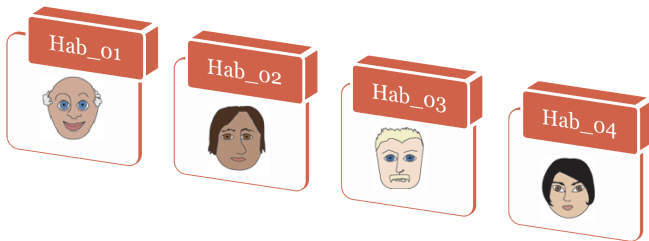
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?



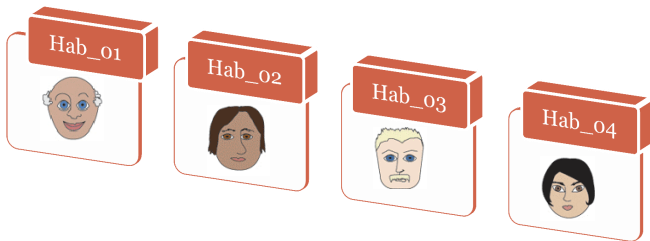
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:



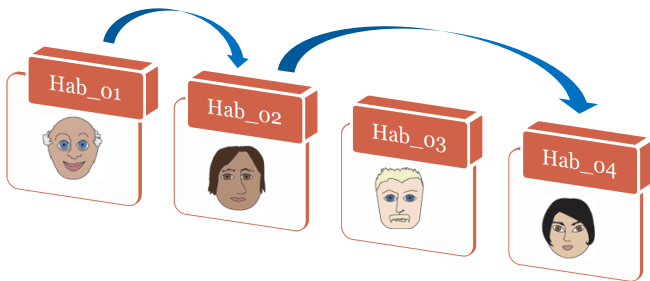
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
 - hay infinitas habitaciones **pares**,



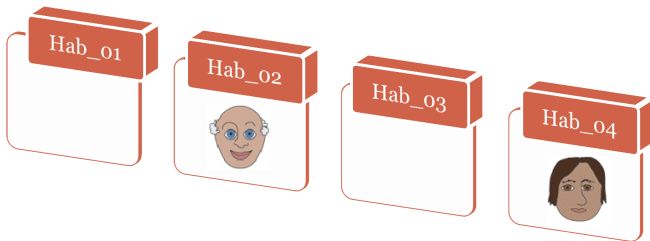
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
 - hay infinitas habitaciones **pares**,
 - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,



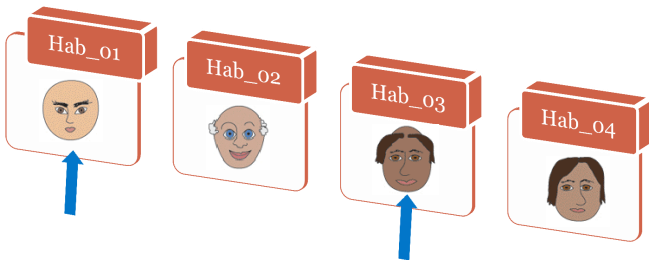
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
 - hay infinitas habitaciones **pares**,
 - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
 - quedan vacías las habitaciones **impares**, que **son infinitas**,



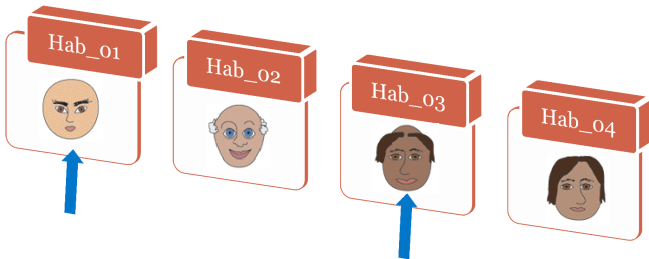
Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
 - hay infinitas habitaciones **pares**,
 - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
 - quedan vacías las habitaciones **impares**, que **son infinitas**,
 - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.



Infinito más infinito igual a infinito

- Imaginemos que el hotel sigue **completo** pero llega un autobús con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar? Claro que sí:
 - hay infinitas habitaciones **pares**,
 - movemos al huésped de la habitación n a la habitación $2n$,
 - quedan vacías las habitaciones **impares**, que **son infinitas**,
 - colocamos a los nuevos huéspedes en las habitaciones impares.
- Se puede hacer lo mismo con **cualquier cantidad finita de autobuses**.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○●○○

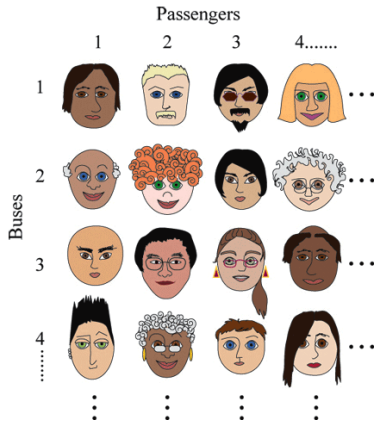
¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

¡Más difícil todavía!

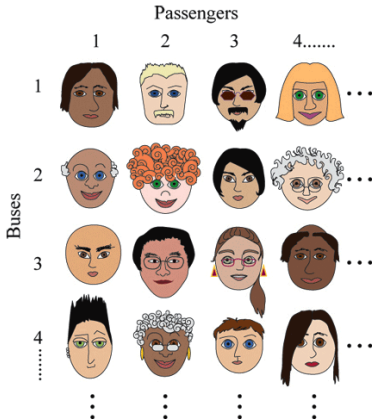
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.



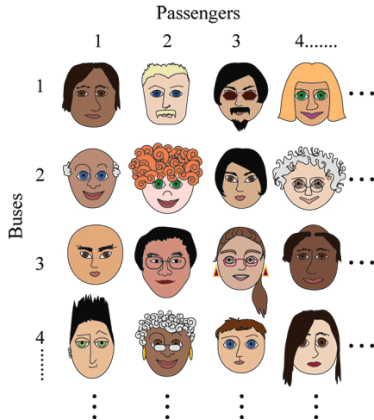
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?



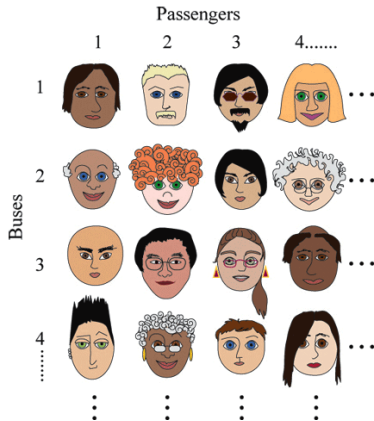
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:



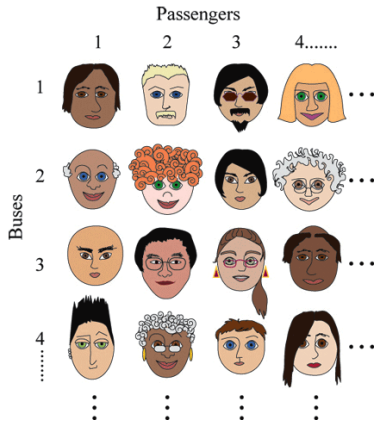
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
 - Dejamos libres las **infinitas habitaciones impares**,



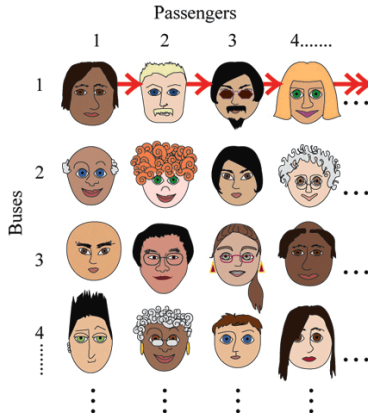
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
 - Dejamos libres las **infinitas** habitaciones impares,
 - sólo queda **ordenar** los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,



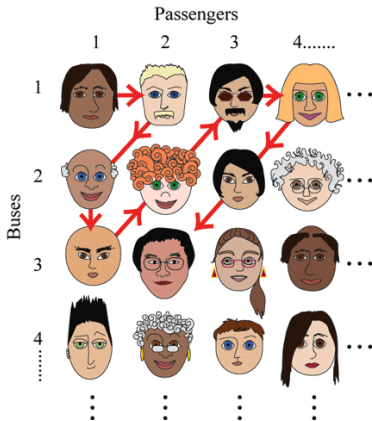
¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
 - Dejamos libres las **infinitas** habitaciones impares,
 - sólo queda **ordenar** los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
 - esto es mala idea...



¡Más difícil todavía!

- El hotel sigue **completo** y llegan **infinitos autobuses**, cada uno con **infinitos nuevos huéspedes**.
- ¿Se pueden alojar?
- Pues también:
 - Dejamos libres las **infinitas** habitaciones impares,
 - sólo queda **ordenar** los infinitos pasajeros de los infinitos autobuses,
 - esto es mala idea. . .
 - mejor lo hacemos así.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○●○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

¿Son todos los infinitos iguales?

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.

¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **números enteros**;



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **números enteros**;
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ **números racionales**;



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;
- $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **números enteros**;
- $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ **números racionales**;
- \mathbb{R} **números reales**.



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;
 - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **números enteros**;
 - $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ **números racionales**;
 - \mathbb{R} **números reales**.
- El Hotel de Hilbert prueba que \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} son **infinitos equivalentes**, se pueden **enumerar**, poner en una lista infinita.



¿Son todos los infinitos iguales?

- Hasta ahora hemos visto que “**muchos**” infinitos son sorprendentemente iguales.
- No obstante, **Georg Cantor (1845–1918)** probó que **no todos los infinitos son iguales** y sistematizó **un álgebra de los conjuntos infinitos**.
- Para presentar el ejemplo de Cantor, necesitamos poner nombre a los conjuntos de números:

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ **números naturales**;
 - $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ **números enteros**;
 - $\mathbb{Q} = \{p/q : p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}\}$ **números racionales**;
 - \mathbb{R} **números reales**.
-
- El Hotel de Hilbert prueba que \mathbb{N} , \mathbb{Z} y \mathbb{Q} son **infinitos equivalentes**, se pueden **enumerar**, poner en una lista infinita.
 - ¿Pasará lo mismo con \mathbb{R} ?



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○●

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○○

Para saber más
○

El ejemplo de Cantor

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$1 \longrightarrow 0,12567894\dots$$

$$2 \longrightarrow 0,83809823\dots$$

$$3 \longrightarrow 0,99990023\dots$$

$$4 \longrightarrow 0,00012785\dots$$

...

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$1 \longrightarrow 0, \boxed{1}2567894 \dots$$

$$2 \longrightarrow 0, 8\boxed{3}809823 \dots$$

$$3 \longrightarrow 0, 99\boxed{9}90023 \dots$$

$$4 \longrightarrow 0, 000\boxed{1}2785 \dots$$

...

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0, 3870 \dots$$

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$1 \longrightarrow 0, \boxed{1}2567894 \dots$$

$$2 \longrightarrow 0, 8\boxed{3}809823 \dots$$

$$3 \longrightarrow 0, 99\boxed{9}90023 \dots$$

$$4 \longrightarrow 0, 000\boxed{1}2785 \dots$$

...

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0, 3870 \dots$$

- ¡Este número no está en la lista!

El ejemplo de Cantor

- Cantor demostró que **no es posible enumerar \mathbb{R}** :
- Consideremos cualquier lista de números reales entre 0 y 1:

$$1 \longrightarrow 0, \boxed{1}2567894 \dots$$

$$2 \longrightarrow 0, 8\boxed{3}809823 \dots$$

$$3 \longrightarrow 0, 99\boxed{9}90023 \dots$$

$$4 \longrightarrow 0, 000\boxed{1}2785 \dots$$

...

- Consideremos un número en el que cambiamos las cifras encerradas en los cuadrados (eligiendo dígitos de 0 a 8):

$$0, 3870 \dots$$

- ¡Este número no está en la lista!
- Por tanto, **ninguna lista** recoge a todos los números reales entre 0 y 1. Luego, **\mathbb{R} no es equivalente a \mathbb{N}** .

¿Cómo se miden áreas?

4 ¿Cómo se miden áreas?

- Los griegos
- Newton y la cuadratura del círculo
- La medida en el siglo XX
- La paradoja de Banach-Tarski

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

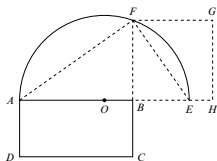
¿Cómo se miden áreas?
●○○○○○○○

Para saber más
○

Las cuadraturas en la matemática griega

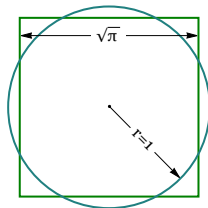
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.



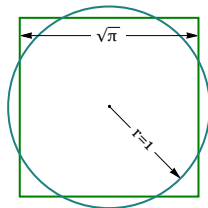
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.



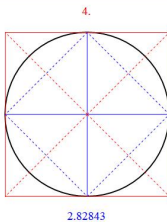
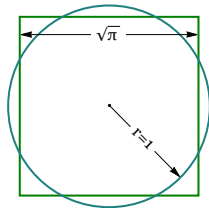
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.



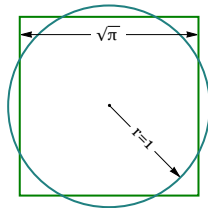
Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado **exhaución** para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.

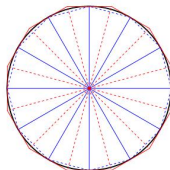


Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado **exhaución** para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.



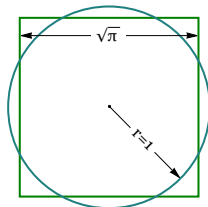
3.21539



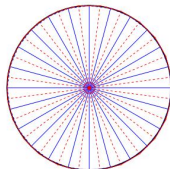
3.10583

Las cuadraturas en la matemática griega

- Los **problemas de cuadratura** en la matemática griega consisten en dada una figura geométrica, calcular un cuadrado con el mismo área usando una serie de procesos elementales.
- El problema de cuadratura más famoso es la **cuadratura del círculo**.
- Los griegos sabían cuadrar triángulos y por tanto cualquier polígono.
- A partir de aquí, idearon un proceso llamado **exhaución** para poder deducir la cuadratura de figuras que se aproximan por polígonos.



3.15966



3.13263

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
●○○○○○

Para saber más
○

Cuadratura de la parábola por Arquímedes

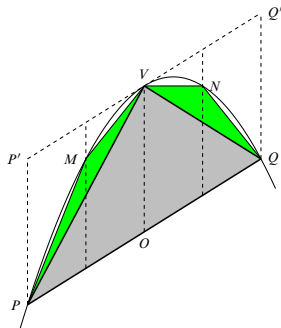
Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):



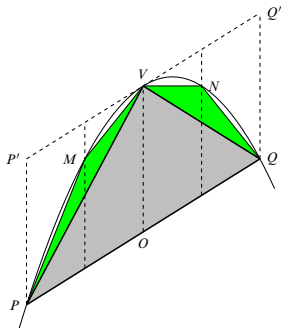
Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*



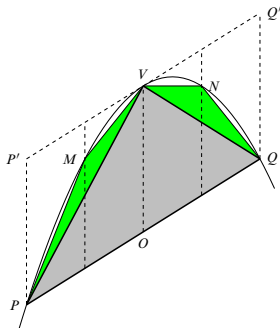
Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*
 - S área del triángulo inscrito;



Cuadratura de la parábola por Arquímedes

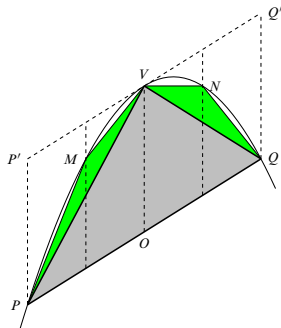
- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*
 - S área del triángulo inscrito;
 - $\text{área}(\triangle VNQ) + \text{área}(\triangle VMP)$
 $= \frac{1}{4} \text{área}(\triangle PVQ)$;



Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*
 - S área del triángulo inscrito;
 - $\text{área}(\triangle VNQ) + \text{área}(\triangle VMP)$
 $= \frac{1}{4} \text{área}(\triangle PVQ)$;
 - Repetimos el proceso y obtenemos

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4^2}S + \frac{1}{4^3}S + \dots$$

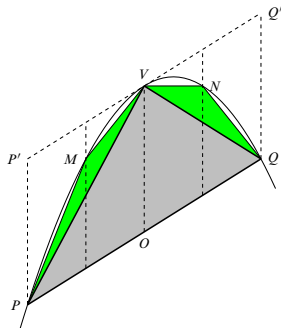


Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*
 - S área del triángulo inscrito;
 - $\text{área}(\triangle VNQ) + \text{área}(\triangle VMP)$
 $= \frac{1}{4} \text{área}(\triangle PVQ)$;
 - Repetimos el proceso y obtenemos

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4^2}S + \frac{1}{4^3}S + \dots$$

- Esta suma infinita vale $\frac{4}{3}S$ y se “prueba” que “llena” el segmento parabólico;

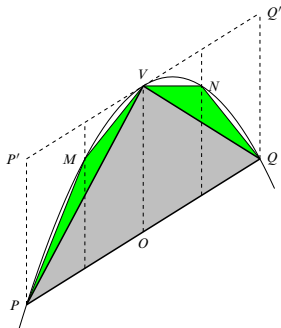


Cuadratura de la parábola por Arquímedes

- Un notable ejemplo es la **cuadratura de la parábola** por **Arquímedes de Siracusa** (287 ac – 212 ac):
- *El área del segmento parabólico es igual a cuatro tercios del área del triángulo inscrito.*
 - S área del triángulo inscrito;
 - $\text{área}(\triangle VNQ) + \text{área}(\triangle VMP)$
 $= \frac{1}{4} \text{área}(\triangle PVQ)$;
 - Repetimos el proceso y obtenemos

$$S + \frac{1}{4}S + \frac{1}{4^2}S + \frac{1}{4^3}S + \dots$$

- Esta suma infinita vale $\frac{4}{3}S$ y se “prueba” que “llena” el segmento parabólico;
- Esa prueba es **oscura y tediosa** por no poder manejar el concepto de infinito.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○●○○○○

Para saber más
○

Newton y la cuadratura del círculo

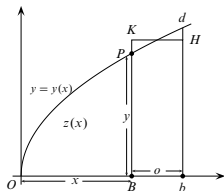
Newton y la cuadratura del círculo

- **Isaac Newton** (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).



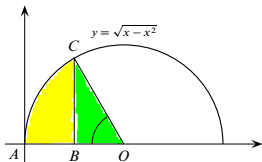
Newton y la cuadratura del círculo

- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.



Newton y la cuadratura del círculo

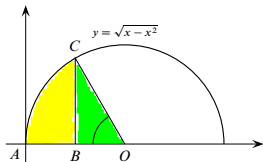
- Isaac Newton (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el Teorema Fundamental del Cálculo, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región amarilla escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma infinita (binomio de Newton).



Newton y la cuadratura del círculo

- **Isaac Newton** (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región **amarilla** escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma infinita (**binomio de Newton**).

$$(x - x^2)^{1/2} = x^{1/2} - \frac{1}{2}x^{3/2} - \frac{1}{8}x^{5/2} - \frac{1}{16}x^{7/2} - \dots$$

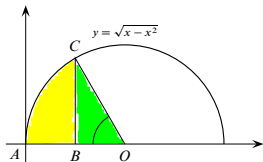


Newton y la cuadratura del círculo

- **Isaac Newton** (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región **amarilla** escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma infinita (**binomio de Newton**).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} + \dots \right)$$

y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de π .



Newton y la cuadratura del círculo

- **Isaac Newton** (1643–1727) resolvió la cuadratura del círculo (aunque no en el sentido de la Grecia clásica).
- Probó el **Teorema Fundamental del Cálculo**, que relaciona el cálculo de áreas con el cálculo de tangentes.
- Para cuadrar el círculo, se calcula el área de la región **amarilla** escribiendo la función $y = \sqrt{x - x^2}$ como una suma infinita (**binomio de Newton**).
- Se deduce que

$$\pi = \frac{3\sqrt{3}}{4} + 24 \left(\frac{2}{3 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \frac{1}{28 \cdot 2^7} - \frac{1}{72 \cdot 2^9} + \dots \right)$$

y con veintidós términos del desarrollo se obtienen dieciséis cifras decimales de π .

- En 1882, **Ferdinand Lindemann** (1852–1939) prueba la **imposibilidad de la cuadratura del círculo** en el sentido de la Grecia clásica.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○●○○○

Para saber más
○

¿Cómo se mide en la actualidad?

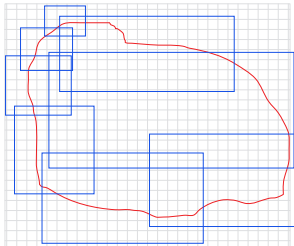
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a [Henri Lebesgue](#) (1875 – 1941).



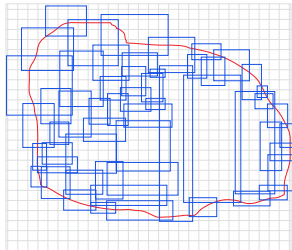
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;



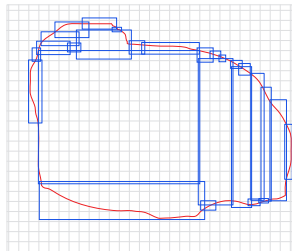
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;



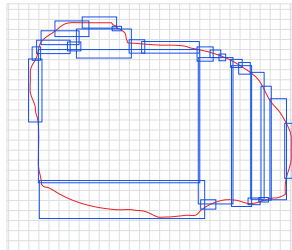
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;



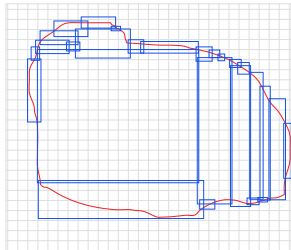
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);



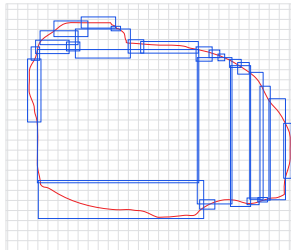
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.



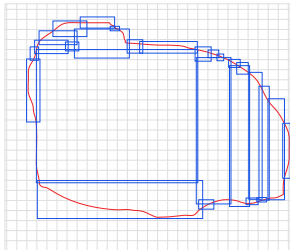
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.
- Es un proceso **doblemente infinito**:



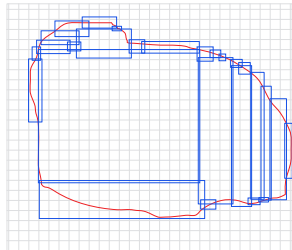
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.
- Es un proceso **doblemente infinito**:
 - cada recubrimiento tiene **infinitos** rectángulos,



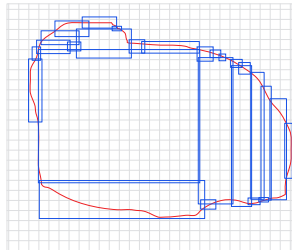
¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.
- Es un proceso **doblemente infinito**:
 - cada recubrimiento tiene **infinitos** rectángulos,
 - hay **infinitos** recubrimientos, por lo que



¿Cómo se mide en la actualidad?

- La teoría actual sobre medición de áreas se debe a **Henri Lebesgue** (1875 – 1941).
- En pocas palabras, consiste en recubrir con una cantidad **infinita** de rectángulos;
- sumamos las áreas de los rectángulos (**suma infinita**);
- nos quedamos con **la mejor** de las mediciones.
- Es un proceso **doblemente infinito**:
 - cada recubrimiento tiene **infinitos** rectángulos,
 - hay **infinitos** recubrimientos, por lo que
 - tomar la mejor medición requiere un **proceso infinito**



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

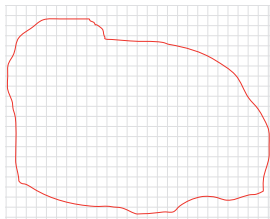
¿Cómo se miden áreas?
○○○○●○○

Para saber más
○

¿Podemos medir aproximando por dentro?

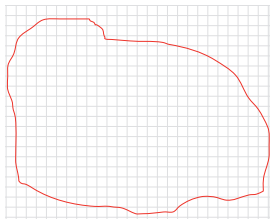
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.



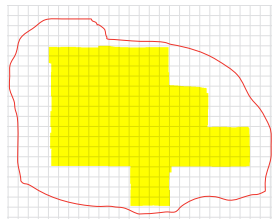
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:



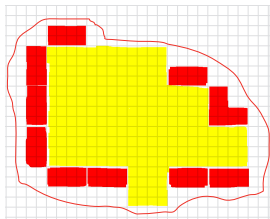
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:
 - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;



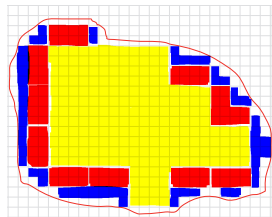
¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:
 - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
 - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;



¿Podemos medir aproximando por dentro?

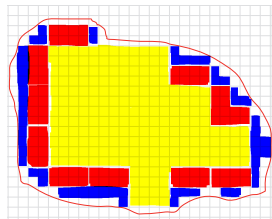
- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:
 - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
 - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
 - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;



¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:
 - marcamos los cuadrados de lado 1 contenidos en la figura: **13**;
 - marcamos los cuadrados de lado $1/2$ contenidos en el resto: **21**;
 - marcamos los cuadrados de lado $1/4$ contenidos en el resto: **54**;
 - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \simeq 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37u^2.$$

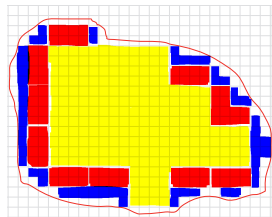


¿Podemos medir aproximando por dentro?

- Para los “conjuntos razonables”, podemos medir su area contando los rectángulos que contienen.
- En pocas palabras, consiste en “medir con un papel milimetrado” cada vez más preciso:
 - marcamos los **cuadrados de lado 1** contenidos en la figura: **13**;
 - marcamos los **cuadrados de lado 1/2** contenidos en el resto: **21**;
 - marcamos los **cuadrados de lado 1/4** contenidos en el resto: **54**;
 - obtenemos una aproximación del área

$$\text{Área} \simeq 13 + 21 \cdot \frac{1}{2} + 54 \cdot \frac{1}{4} = 37u^2.$$

- Podemos seguir el proceso hasta el infinito... obteniendo, en los casos razonables, una suma infinita que es el área de la figura.



Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○●○

Para saber más
○

La Teoría de la Medida de Lebesgue

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de [Lebesgue](#) revolucionaron la Matemática.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de [Lebesgue](#) revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar **recubrimientos infinitos** y es la clave para obtener una teoría sólida.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de [Lebesgue](#) revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar **recubrimientos infinitos** y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el [Análisis Matemático](#) de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de **Lebesgue** revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar **recubrimientos infinitos** y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el **Análisis Matemático** de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la **Física Cuántica** no se entienden sin este lenguaje.

La Teoría de la Medida de Lebesgue

- Las ideas de **Lebesgue** revolucionaron la Matemática.
- Lo novedoso es la idea de tomar **recubrimientos infinitos** y es la clave para obtener una teoría sólida.
- Todo el **Análisis Matemático** de los siglos XX y XXI se fundamenta en las ideas de Lebesgue.
- Otros campos científicos como la **Física Cuántica** no se entienden sin este lenguaje.
- Aunque la **Teoría de la Medida de Lebesgue** es completa, **no permite medir todos los conjuntos**. Esto **no** podría resolverlo ninguna otra forma de medir.

Preliminares
○○○○○○○

Los procesos infinitos y sus paradojas
○○○○○○○○○○○

¿Cuántos infinitos hay?
○○○○○○○

¿Cómo se miden áreas?
○○○○○○●

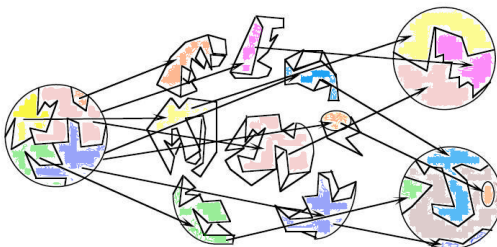
Para saber más
○

La paradoja de Banach-Tarski

La paradoja de Banach-Tarski

Banach-Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

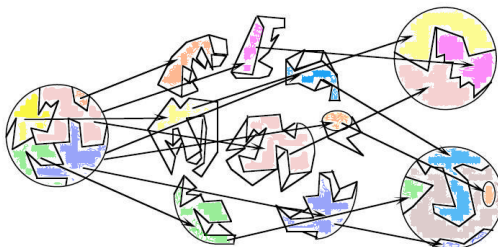


La paradoja de Banach-Tarski

Banach-Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.

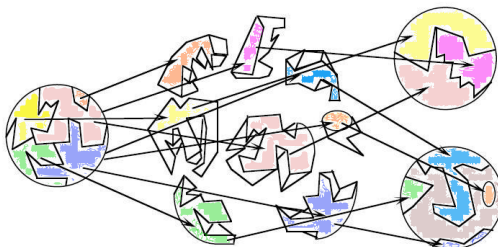


La paradoja de Banach-Tarski

Banach-Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo dos esferas de idéntico tamaño, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.

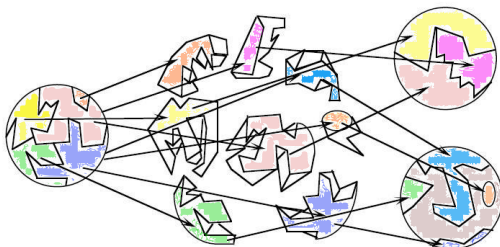


La paradoja de Banach-Tarski

Banach-Tarski (1924)

Una esfera puede ser partida en una cantidad finita de piezas de tal forma que éstas pueden ser movidas para ser reagrupadas produciendo **dos esferas de idéntico tamaño**, cada una de ellas, a la esfera original.

- Las piezas no son deformadas en absoluto.
- Al reagrupar las piezas no se producen solapamientos ni tampoco se dejan huecos vacíos.
- Es **imposible** que **el volumen de todas las piezas pueda ser medido**.



Para saber más...



Página web–blog sobre Matemáticas en general

Gaussianos

<http://gaussianos.com/>



Página web sobre historia de las Matemáticas

The MacTutor History of Mathematics archive

<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>



Página web personal de

Javier Pérez González (Universidad de Granada)

<http://www.ugr.es/local/fjperez>



Página web personal de

Carlos Ivorra (Universidad de Valencia)

<http://www.uv.es/ivorra/>



Hans Enzensberger

El diablo de los números

Ediciones Siruela, 1998