# Índice numérico y subespacios*

Miguel Martín

**Resumen**

En este trabajo se discute la relación entre el índice numérico de un espacio de Banach y el de sus subespacios. Partiendo de que no puede establecerse una desigualdad válida en general, ni siquiera válida para subespacios 1-complementados, probamos que el índice numérico de un espacio de Banach es siempre menor o igual que el de sus sumandos absolutos (concepto que generaliza los de $L$-sumando y $M$-sumando). Por último, demostramos un cierto "carácter hereditario" del índice numérico: Sea $X$ un espacio de Asplund determinado de forma débilmente numerable y con índice numérico 1; entonces, todo subespacio separable de $X$ está contenido en otro subespacio separable con índice numérico 1.

**Palabras clave:** RANGO NUMÉRICO, ÍNDICE NUMÉRICO, PROYECCIÓN ABSOLUTA.

El concepto de índice numérico de un espacio de Banach aparece al extender al ambiente general de los operadores lineales y continuos, una noción originariamente definida para matrices cuadradas: el rango numérico. Presentamos a continuación todos estos conceptos, aunque sólo en el ambiente en el que los usaremos.

Dado un espacio de Banach real o complejo $X$, notaremos por $B_X$ a la bola unidad cerrada del espacio y por $S_X$ a la esfera unidad. El *rango numérico* de un operador lineal y continuo $T$ en $X$, se define (Lumer, 1961; Bauer, 1962) de la siguiente forma:

$$V(T) = \{x^*(Tx) \ : \ x \in S_X,\ x^* \in S_{X^*},\ x^*(x) = 1\},$$

donde $X^*$ representa al espacio dual de $X$. El *radio numérico* de $T$ será

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in V(T)\},$$

y $v$ es claramente una seminorma continua en $L(X)$, el álgebra de los operadores lineales y continuos en $X$. Muchas veces el radio numérico es una norma equivalente a la norma usual de operadores, y para cuantificar este hecho definimos el *índice numérico* de $X$ (Lumer, 1968) como el número real

$$n(X) = \max\{k \geq 0 \ : \ k\|T\| \leq v(T) \ \ \forall T \in L(X)\}.$$

*Investigación financiada parcialmente por el Proyecto de Investigación no. PB96-1406 de la D.G.E.S. (Ministerio de Educación y Cultura) y por el Programa F.P.D. de la D.G.U.I. (Junta de Andalucía).

2000 Mathematics Subject Classification: 46B20, 47A12.

Es claro que siempre se tendrá $0 \leq n(X) \leq 1$; el valor $n(X) = 1$ significa que radio numérico y norma coinciden en $L(X)$, mientras que se tiene $n(X) = 0$ cuando $v$ no es una norma equivalente a la usual de operadores. Comentemos algunos ejemplos de espacios de Banach cuyo índice numérico es conocido: para un espacio de Hilbert $H$, de dimensión mayor que 1, se tiene $n(H) = 0$ en caso real y $n(H) = 1/2$ si $H$ es complejo; para cualquier medida $\mu$, el espacio $L_1(\mu)$ y todos sus preduales isométricos, tienen índice numérico 1; por tanto, $n(C(K)) = 1$ para cualquier compacto de Hausdorff $K$. Referencias obligadas sobre este tema son las monografías de F. Bonsall y J. Duncan [1, 2] que estudian sistemáticamente el concepto de rango numérico y algunas conexiones con la teoría de operadores. Una visión más actualizada puede encontrarse en [7] y en las referencias que allí se dan.

En la primera sección de este trabajo se prueba que el índice numérico de un espacio de Banach es siempre menor o igual que el de sus sumandos absolutos, desigualdad que no es cierta para subespacios 1-complementados arbitrarios.

La segunda sección se dedica a establecer un cierto "carácter hereditario" del índice numérico: dado un espacio de Asplund determinado de forma débilmente numerable y con índice numérico 1, para cada subespacio separable suyo, existe otro subespacio separable que lo contiene y "hereda" el índice numérico del espacio total.

# 1 Proyecciones absolutas e índice numérico

Dado un subespacio cerrado $Y$ de un espacio de Banach $X$, ¿podemos esperar alguna relación entre los índices numéricos de $X$ e $Y$? Basta considerar el caso trivial de que $Y$ tenga dimensión 1 (y con ello $n(Y) = 1$) para concluir que la única relación esperable sería $n(X) \leq n(Y)$. Pero también esta desigualdad está muy lejos de ser cierta en general: cualquier espacio de Banach $Y$ es isométrico a un subespacio de $C(K)$ para conveniente compacto $K$, sabemos que $n(C(K)) = 1$ y no podemos esperar que ello implique $n(Y) = 1$. No obstante, si somos capaces de extender cada operador en $Y$ a un operador en $X$, conservando norma y radio numérico, sí tendremos, claramente, la desigualdad $n(X) \leq n(Y)$. Para extender conservando la norma es suficiente que $Y$ esté 1-complementado en $X$; conservar también el radio numérico parece más complicado. Antes de continuar conviene quizá precisar nuestra terminología, aunque sea bastante usual. Una *proyección* en un espacio de Banach $X$ es un operador $P \in L(X)$ tal que $P^2 = P$. Una proyección $P$ es *contractiva* si $\|P\| = 1$, y es *incondicional* cuando $\|Id - 2P\| = 1$. Decimos que un subespacio $Y$ de $X$ está *1-complementado* en $X$ si existe una proyección contractiva de $X$ sobre $Y$.

Retomando nuestros comentarios anteriores, hay cierta esperanza de que un subespacio 1-complementado $Y$ de un espacio de Banach $X$ deba verificar $n(Y) \geq n(X)$, pues cada operador $S \in L(Y)$ tiene una extensión $T = S \circ P \in L(X)$ con $\|T\| = \|S\|$, donde $P$ es una proyección contractiva de $X$ sobre $Y$. Por ejemplo, volviendo al caso antes comentado, los subespacios 1-complementados de espacios $C(K)$ son preduales de espacios $L_1(\mu)$ [4] y, por tanto, tienen índice numérico 1. Sin embargo, la 1-complementación no es suficiente en general para conseguir la deseada desigualdad entre índices numéricos: en un trabajo publicado en 1991, S. Reisner muestra un CL-espacio real de dimensión 5 conteniendo un subespacio 1-complementado (de hecho, complementado por una proyección incondicional) que no es CL-espacio [10, Example 3.4]; este espacio es contraejemplo a nuestra conjetura ya que, en dimensión finita, ser CL-espacio equivale a tener índice numérico 1 (ver [9, Theorem 3.1] y [5, Theorem 2.3]). A la vista de este ejemplo, para que una proyección $P$ en un espacio de Banach $X$ verifique la esperada desigualdad $n(P(X)) \geq n(X)$, no es suficiente que $P$ sea incondicional. No obstante, fortaleciendo convenientemente esta incondicionalidad, hallaremos por fin una condición suficiente.

Se dice que una norma $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ es *absoluta* cuando verifica $|(\alpha,\beta)| = |(|\alpha|,|\beta|)|$ para cualesquiera $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$, y $|(1,0)| = |(0,1)| = 1$. Se dice que una proyección $P$ en un espacio de Banach $X$ es una *proyección absoluta* cuando existe una norma absoluta $|\cdot|$ en $\mathbb{R}^2$ verificando que $\|x\| = |(\|Px\|, \|x-Px\|)|$ para todo $x \in X$. En tal caso, se dice también que $P(X)$ es un *sumando absoluto* de $X$. Cuando $|\cdot|$ es la norma de la suma (resp. la del máximo) se habla de *$L$-proyecciones* y *$L$-sumandos* (resp. *$M$-proyecciones* y *$M$-sumandos*). Es claro que toda proyección absoluta es incondicional, pero el recíproco está muy lejos de ser cierto. Se puede encontrar más información sobre proyecciones absolutas en [2, §21].

Veamos ya que la desigualdad $n(P(X)) \geq n(X)$ es cierta para proyecciones absolutas:

**Proposición 1** *Si $Y$ es un sumando absoluto de un espacio de Banach $X$, entonces $n(X) \leq n(Y)$.*

*Demostración:* Llamando $Z$ al núcleo de la proyección absoluta cuya imagen es $Y$, proyección que, por definición, lleva asociada una norma absoluta $|\cdot|$, identificamos $X$ con el producto $Y \times Z$ dotado de la norma $\|(y,z)\| = |(\|y\|,\|z\|)|$ para $y \in Y$, $z \in Z$. Entonces, no es difícil comprobar que $X^*$ se identifica de manera natural con $Y^* \times Z^*$ cuya norma es $\|(y^*,z^*)\| = |(\|y^*\|,\|z^*\|)|'$ para $y^* \in Y^*$, $z^* \in Z^*$, siendo $|\cdot|'$ la norma dual de $|\cdot|$.

Dado ahora $S \in L(Y)$, definimos $T \in L(X)$ por $T(y,z) = (Sy, 0)$ $(y \in Y,\ z \in Z)$. Es inmediato que la norma de $T$ y la de $S$ coinciden y, gracias a que tenemos una proyección absoluta, los radios numéricos también coincidirán. En efecto, tomemos $x = (y,z) \in S_X$, $x^* = (y^*,z^*) \in S_{X^*}$ con $x^*(x) = y^*(y) + z^*(z) = 1$ y observemos que

$$\begin{aligned} 1 = \operatorname{Re}\,(y^*(y) + z^*(z)) &\leq \|y^*\|\,\|y\| + \|z^*\|\,\|z\| \\ &\leq |(\|y^*\|,\|z^*\|)|'\ |(\|y\|,\|z\|)| = \|x^*\|\,\|x\| \leq 1, \end{aligned}$$

luego todas las desigualdades anteriores se convierten en igualdades, y por tanto $y^*(y) = \|y^*\|\|y\|$. Entonces, si $y \neq 0$ e $y^* \neq 0$, tenemos

$$v(S) \geq \frac{y^*}{\|y^*\|}\left(S\left(\frac{y}{\|y\|}\right)\right) \geq |y^*(Sy)| = |x^*(Tx)|,$$

desigualdad que es obviamente cierta si $y = 0$ o $y^* = 0$. Tomando entonces supremo con $(x,x^*) \in S_X \times S_{X^*},\ x^*(x) = 1$, se tiene $v(S) \geq v(T)$, y con ello

$$v(S) \geq v(T) \geq n(X)\|T\| = n(X)\|S\|.$$

La arbitrariedad de $S \in L(Y)$ nos permite concluir $n(X) \leq n(Y)$. ■

Obviamente, si $P$ es una proyección absoluta en un espacio de Banach $X$, la proyección $Id - P$ también es absoluta, luego la proposición anterior nos permite de hecho afirmar que

$$n(X) \leq \min \{n(P(X)), n(\ker P)\}.$$

En general, esta desigualdad puede ser estricta (tómese $X = \mathbb{R}^2$ con la norma euclídea) pero se tiene la igualdad para $L$-proyecciones y $M$-proyecciones [8, Proposition 1].

## 2 Cierto carácter hereditario del índice numérico

Pretendemos probar en esta sección que, en el ambiente de los espacios de Asplund determinados de forma débilmente numerable, todo subespacio separable de un espacio con índice numérico 1 está contenido en otro subespacio separable que "hereda" el índice numérico 1.

Podría pensarse que nuestro resultado es consecuencia del hecho bien conocido de que, en ese ambiente, todo subespacio separable está contenido en otro subespacio separable y 1-complementado. Por lo visto en la sección anterior, eso no sería suficiente, ya que no podemos asegurar que dicho subespacio 1-complementado sea un sumando absoluto. No obstante, para obtener el deseado "carácter hereditario" usaremos las mismas técnicas que se emplean para demostrar dicho resultado conocido. Damos previamente las definiciones de todos estos conceptos, que tomamos de [3]. Se dice que un espacio de Banach $X$ está *determinado de forma débilmente numerable* (*WCD* para abreviar) si existe una sucesión $\{K_n\}$ de subconjuntos $w^*$-compactos de $X^{**}$ verificando que dados $x \in X$ y $u \in X^{**} \setminus X$ arbitrarios, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $x \in K_n$ y $u \notin K_n$. En un tal espacio, para una sucesión finita de números naturales $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$, escribiremos $L_s = \overline{[X \cap K_{s_1} \cap \cdots \cap K_{s_n}]}^{w^*}$ y denotaremos por $S$ al conjunto de todas las sucesiones finitas de números naturales. Decimos que un espacio de Banach $X$ es un *espacio de Asplund* si toda función real, convexa y continua, definida en un subconjunto abierto y convexo del espacio, es Fréchet diferenciable en un subconjunto denso de su dominio. Todo espacio de Asplund admite una *selección de Jayne-Rogers* (ver [3, Theorems I.4.2 and I.5.2]), esto es, una aplicación $\mathcal{D} : X \to (X^*)^{\mathbb{N}}$ dada por

$$\mathcal{D}(x) = \{D_n(x) \ : \ n \in \mathbb{N}\} \cup \{D_\infty(x)\} \qquad (x \in X),$$

donde

$(i)$ $D_n : X \to X^*$ es norma-norma continua para todo $n$.

$(ii)$ $\lim\limits_{n\to\infty} \|D_\infty(x) - D_n(x)\| = 0$, $\forall x \in X$.

$(iii)$ $\|x\|^2 = \|D_\infty(x)\|^2 =< D_\infty(x), x >$, para todo $x$ en $X$.

De la demostración de [3, Lemma VI.4.2] obtenemos el siguiente resultado, que necesitaremos más adelante.

**Lema 2** *Sea $X$ un espacio de Asplund WCD y $A$ un subespacio suyo. Si para cualesquiera $f \in B = \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(A))$ y $s \in S$ se verifica que*

$$\sup_{L_s} |f| = \sup_{L_s \cap A} |f|,$$

*entonces existe una proyección de norma uno $p : X \to X$ tal que $p(X) = A$ y $p^*(X^*) = B$. Además $B$ es isométricamente isomorfo a $A^*$.*

Podemos ya enunciar el resultado principal de esta sección:

**Teorema 3** *Sea $X$ un espacio de Asplund WCD con $n(X) = 1$. Entonces, para cada subespacio separable $Y$ de $X$ existe otro subespacio separable $Z$ tal que $Y \subset Z$ y $n(Z) = 1$.*

*Demostración:* Construiremos una sucesión $\{Z_n\}$ de subespacios separables de $X$ y una sucesión $\{p_n\}$ de proyecciones de norma uno en $X$, satisfaciendo:

$(i)$ $Y \subset Z_1$ y $Z_n \subset Z_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(ii)$ $p_n(X) = Z_n$ y $p_n^*(X^*) = \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z_n))$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

$(iii)$ Dados $n \in \mathbb{N}$ y $s \in S$, se tiene que

$$\sup_{L_s} |f| = \sup_{L_s \cap Z_n} |f|$$

para todo $f \in p_n^*(X^*) = \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z_n))$.

$(iv)$ Para cualquier $n \in \mathbb{N}$, dados $z \in S_{Z_n}$, $z^* \in S_{Z_n^*}$ y $\varepsilon > 0$, existen $x \in S_{Z_{n+1}}$, $x^* \in S_{Z_{n+1}^*}$ con $x^*(x) = 1$ y

$$|z^*(p_n x)| > 1 - \frac{\varepsilon}{2} \qquad\qquad |x^*(z)| > 1 - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Supongamos construidas ambas sucesiones y sea $Z = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n}$. Es claro que $Z$ es un subespacio separable de $X$ que contiene a $Y$, y acabaremos la demostración si probamos que $n(Z) = 1$. Para ello, necesitamos unos comentarios previos:

1. Para cualesquiera $f \in \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z))$ y $s \in S$, se tiene que

$$\sup_{L_s} |f| = \sup_{L_s \cap Z} |f|.$$

Para probar esto, fijemos $s \in S$ y escribamos $\mathcal{A} = \{f \in X^* \ : \ \sup_{L_s} |f| = \sup_{L_s \cap Z} |f|\}$ que es un subconjunto cerrado. Usando [3, Lemma VI.3.1], tenemos que

$$\mathcal{D}(Z) = \mathcal{D}\left(\overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n}\right) \subseteq \overline{\mathcal{D}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} Z_n\right)} = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(Z_n)},$$

y por ser $\{Z_n\}$ creciente,

$$\overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z)) \subseteq \overline{\text{lin}}\left(\cup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{D}(Z_n)\right) = \overline{\cup_{n \in \mathbb{N}} \left(\overline{\text{lin}} \mathcal{D}(Z_n)\right)}.$$

Acabamos sin más que recordar que $\mathcal{A}$ es cerrado y que $\overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z_n)) \subset \mathcal{A}$ por $(iii)$.

2. Aplicando el Lema 2 con $A = Z$ obtenemos una proyección de norma uno, $p_\infty : X \to X$ verificando que $p_\infty(X) = Z$ y $p_\infty^*(X^*) = \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z)) \equiv Z^*$.
3. Para todo $z \in Z$ se tiene que $\|p_n(z) - z\| \to 0$ para todo $z \in Z$, ya que $Z = \overline{\cup Z_n}$ y la sucesión $\{Z_n\}$ es creciente.
4. Para todo $x^* \in X^*$, $\|p_n^*(x^*) - p_\infty^*(x^*)\| \to 0$. Para probar esto, como $\{p_n^*(X^*)\}$ es una sucesión creciente, basta ver que $p_\infty^*(X^*) = \overline{\cup p_n^*(X^*)}$ y razonar como en 1. Esta última igualdad se sigue fácilmente del crecimiento de la sucesión $\{p_n^*(X^*)\}$ y de [3, Lemma VI.3.1].

Ya podemos probar que $n(Z) = 1$, para lo cual, en virtud de [6, Remark 6], basta ver que los operadores de rango uno tienen radio numérico igual a la norma, esto es, basta probar que para cualesquiera $z \in S_Z$ y $z^* \in S_{Z^*}$, el operador $T \in L(Z)$ definido por $Tx = z^*(x)z$ para todo $x \in Z$, verifica $v(T) = 1$. Fijemos pues $z \in S_Z$, $z^* \in S_{Z^*}$ y $\varepsilon > 0$, encontremos $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$\begin{cases} \|p_n(z) - z\| < \dfrac{\varepsilon^2}{4} \\ \|p_n^*(z^*) - z^*\| < \dfrac{\varepsilon^2}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \|p_n(z)\| > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ \|p_n^*(z^*)\| > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases}$$

y escribamos $y = \dfrac{p_n(z)}{\|p_n(z)\|} \in S_{Z_n}$, $y^* = \dfrac{p_n^*(z^*)}{\|p_n^*(z^*)\|} \in S_{Z_n^*}$, donde hemos identificado $Z_n^*$ con $p_n^*(X^*)$. Usando $(iv)$, obtenemos $x \in S_{Z_{n+1}}$ (en particular $x \in S_Z$) y $x^* \in S_{X^*}$ verificando que $x^*(x) = 1$ y

$$\begin{cases} |y^*(p_n(x))| > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \\ |x^*(y)| > 1 - \dfrac{\varepsilon}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |[p_n^*(z^*)](p_n(x))| > \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2 \\ |x^*(p_n(z))| > \left(1 - \dfrac{\varepsilon}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} |z^*(x)| &\geq |[p_n^*(z^*)](x)| - |[p_n^*(z^*)](x) - z^*(x)| \\ &\geq |[p_n^*(z^*)](p_n(x))| - \|p_n^*(z^*) - z^*\| > 1 - \varepsilon, \end{aligned}$$

y análogamente $|x^*(z)| > 1 - \varepsilon$. Identificando $x^*$ con $x^*|_{Z^*} \in S_{Z^*}$ tenemos que $x^*(x) = 1$ y con ello

$$v(T) \geq |x^*(Tx)| = |z^*(x)|\,|x^*(z)| > (1 - \varepsilon)^2.$$

Por ser $\varepsilon$ arbitrario, se tiene $v(T) = 1$, como se quería.

Construcción de las sucesiones $\{Z_n\}$ y $\{p_n\}$.
Aplicando [3, Lemmas VI.4.1 and VI.4.2] al subespacio $Y$, obtenemos un subespacio separable $Z_1$ de $X$ con $Y \subset Z_1$ y una proyección de norma uno $p_1 : X \to X$, tales que $p_1(X) = Z_1$, $p_1^*(X^*) = \overline{\text{lin}}(\mathcal{D}(Z_1))$ y se verifica $(iii)$ para $n = 1$. Procedamos ahora por inducción y, para $n \in \mathbb{N}$ fijo, supongamos construidos $Z_n$ y $p_n$ verificando

las propiedades $(i)$ a $(iii)$. Por ser $Z_n$ separable, podemos encontrar un subconjunto numerable y denso $B_n \subset S_{Z_n}$ y, por ser $X$ un espacio de Asplund (y por tanto $Z_n^*$ separable), lo mismo ocurre para $S_{Z_n^*}$, esto es, existe $B_n^* \subset S_{Z_n^*}$ denso y numerable. Para $y \in B_n$, $y^* \in B_k^*$ definimos un operador $T \in L(X)$ dado por $Tx = y^*(p_n x)y$ para todo $x \in X$, que por ser $n(X) = 1$ tendrá radio numérico 1. De esta forma, para cada $k \in \mathbb{N}$ existirán $x_k^{y,y^*} \in S_X$, $f_k^{y,y^*} \in S_{X^*}$ tales que $f_k(x_k) = 1$ y $|f_k(Tx_k)| > 1 - \dfrac{1}{k}$, esto es,

$$|y^*(p_n x_k)| > 1 - \frac{1}{k} \qquad \text{y} \qquad |f_k(y)| > 1 - \frac{1}{k}.$$

Ahora, aplicamos [3, Lemmas VI.4.1 and VI.4.2] al subconjunto separable

$$A = Z_n \cup \{x_k^{y,y^*} \ : \ y \in B_n,\ y^* \in B_n^*,\ k \in \mathbb{N}\},$$

con lo que obtenemos un subespacio separable $Z_{n+1}$ de $X$ que contiene a $Z_n$ —esto es, $(i)$— y una proyección de norma uno $p_{n+1} \in L(X)$ tal que $p_{n+1}(X) = Z_{n+1}$, $p_{n+1}^*(X^*) = \overline{\mathrm{lin}}(\mathcal{D}(Z_{n+1}))$ —esto es, $(ii)$— y $(iii)$ es cierto para $n+1$. Esto prueba que $\{Z_n\}$ y $\{p_n\}$ verifican $(i)$, $(ii)$ y $(iii)$; acabaremos la demostración probando que también satisfacen $(iv)$. Fijemos pues $n \in \mathbb{N}$, $z \in S_{Z_n}$, $z^* \in S_{Z_n^*}$ y $\varepsilon > 0$. Como $B_n$ (resp. $B_n^*$) es denso en $S_{Z_n}$ (resp. $S_{Z_n^*}$), podemos encontrar $y \in B_n$, $y^* \in B_n^*$ tales que

$$\|y - z\| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y} \qquad \|y^* - z^*\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Si ahora $k \in \mathbb{N}$ es tal que $\dfrac{1}{k} < \dfrac{\varepsilon}{4}$, tendremos que

$$|y^*(p_n(x_k^{y,y^*}))| > 1 - \frac{\varepsilon}{4} \qquad \text{y} \qquad |f_k^{y,y^*}(y)| > 1 - \frac{\varepsilon}{4}.$$

Llamando $x = x_k^{y,y^*} \in S_{Z_n}$ y $x^* = f_k^{y,y^*} \in S_{X^*}$, se tiene que $x^*(x) = 1$,

$$|z^*(p_n x)| \geq |y^*(p_n x)| - |z^*(p_n x) - y^*(p_n x)| > 1 - \frac{\varepsilon}{4} - \frac{\varepsilon}{4} = 1 - \frac{\varepsilon}{2}$$

y, análogamente,

$$|x^*(z)| \geq |x^*(y)| - |x^*(y) - x^*(z)| > 1 - \frac{\varepsilon}{2},$$

lo que prueba $(iv)$. ■

## Referencias


[1] F. F. Bonsall y J. Duncan. *Numerical Ranges of Operators on Normed Spaces and of Elements of Normed Algebras.* London Math. Soc. Lecture Note Series **2**, Cambridge 1971.

[2] F. F. Bonsall y J. Duncan. *Numerical Ranges II.* London Math. Soc. Lecture Note Series **10**, Cambridge (1973).

[3] R. Deville, G. Godefroy y V. Zizler. *Smoothness and Renormings in Banach spaces.* Pitman Monographs **64**, New York 1993.

[4] H. E. Lacey. *The isometric theory of classical Banach spaces.* Springer-Verlag, Berlin 1972.

[5] Å. Lima. *On extreme operators on finite-dimensional Banach spaces whose unit balls are polytopes.* Ark. Mat. **19** (1981), 97–116.

[6] G. López, M. Martín y R. Payá. *Real Banach spaces with numerical index 1.* Bull. London Math. Soc. **31** (1999), 207–212.

[7] M. Martín. *A survey on the numerical index of a Banach space.* Aparecerá en Extracta Math.

[8] M. Martín y R. Payá. *Numerical index of vector-valued function spaces.* Aparecerá en Studia Math.

[9] C. M. McGregor. *Finite dimensional normed linear spaces with numerical index* 1. J. London Math. Soc. **3** (1971), 717–721.

[10] S. Reisner. *Certain Banach spaces associated with graphs and CL-spaces with* 1*-unconditonal bases.* J. London Math. Soc. **43** (1991), 137–148.

Departamento de Análisis Matemático. Facultad de Ciencias.
Universidad de Granada. 18071-Granada (España).

*E-mail:* **mmartins@ugr.es**