Operadores compactos que alcanzan su norma

Miguel Martín
http://www.ugr.es/local/mmartins

Universidad
de Granada

Valencia, 18 de Julio 2014

Seminario de Análisis Matemático
Universidad de Valencia

El contenido de la charla aparece en...

M. Martín
Norm-attaining compact operators
J. Funct. Anal. (2014)

M. Martín
The version for compact operators of Lindenstrauss properties A and B
(en preparación)

Esquema de la charla

1. Preliminares
2. Operadores compactos: resultados negativos
3. Las propiedades A y B de Lindenstrauss
4. Las propiedades A^k y B^k

Preliminares

Sección 1

1. Preliminares
   - El Teorema de Bishop-Phelps
   - Operadores que alcanzan la norma
   - Planteamiento del problema para operadores compactos

El Teorema de Bishop-Phelps

Funcionales que alcanzan su norma

X espacio de Banach real o complejo

$$B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant 1\} \qquad S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\} \qquad X^* \text{ dual de } X$$

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| \,:\, x \in B_X\} \qquad (x^* \in X^*)$$

x^* alcanza su norma cuando este supremo es un máximo:

$$\exists\, x \in S_X \,:\, |x^*(x)| = \|x^*\|$$

Teorema (E. Bishop & R. Phelps, 1961)

El conjunto de los funcionales que alcanzan su norma es denso en X^* (para la topología de la norma).

Operadores que alcanzan la norma: planteamiento del problema

Operadores que alcanzan su norma

X , Y espacios de Banach, $L(X,Y)$ operadores (lineales y continuos)

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| : x \in B_X\} \qquad \big(T \in L(X,Y)\big)$$

T alcanza su norma cuando este supremo es un máximo:

$$T \in NA(X,Y) \iff \exists\, x \in S_X : \|Tx\| = \|T\|$$

Problema

$$¿\ \overline{NA(X,Y)} = L(X,Y)\ ?$$

J. Lindenstrauss, Israel J. Math. (1963) inicia el estudio de este problema

En general, la respuesta es negativa

Contraejemplo de Lindenstrauss

- Tomamos $X = c_0$

Sea $T \in NA(c_0, Y)$, $1 = \|T\| = \|Tx\|$ con $x \in S_{c_0}$
Fijado $0 < \delta < 1$, para $n \geqslant m$ será $x \pm \delta e_n \in B_{c_0}$ luego $\|Tx \pm \delta Te_n\| = 1$

- Supongamos que Y es estrictamente convexo

Entonces $Te_n = 0$ para $n \geqslant m$, luego $\dim T(c_0) < \infty$

- Supongamos que existe un operador no compacto de c_0 en Y

$$\overline{NA(c_0, Y)} \neq L(c_0, Y)$$

Por ejemplo, puede ser Y estrictamente convexo e isomorfo a c_0.

Observaciones

- En este ejemplo, los operadores compactos que alcanzan la norma son densos.

- En los demás contraejemplos conocidos (Bourgain, Gowers, Acosta...) se encuentran operadores no compactos que no se pueden aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Planteamiento del problema para operadores compactos

Pregunta natural

¿Es cierto que todo operador compacto entre espacios de Banach puede aproximarse por operadores que alcanzan la norma?

¿Dónde aparece?

- Diestel-Uhl, *Rocky Mount. J. Math.*, 1976.
- Diestel-Uhl, *Vector measures* (monografía), 1977.
- Johnson-Wolfe, *Studia Math.*, 1979.
- Acosta, *RACSAM* (artículo expositivo), 2006.

Solución

La respuesta es negativa

Operadores compactos: resultados negativos

Sección 2

2. Operadores compactos: resultados negativos
   - La primera respuesta negativa
   - Sobre el espacio de partida
   - Sobre el espacio de llegada
   - Dominio=Rango

Extendiendo el resultado de Lindenstrauss

Lema (extensión del resultado de Lindenstrauss)

$$X \leqslant c_0,\ Y \text{ estrictamente convexo},\ T \in NA(X,Y) \implies \dim T(X) < \infty.$$

Demostración.

- $x \in X$ tal que $1 = \|T\| = \|Tx\|$.
- Como $x \in c_0$, existe m tal que $|x(n)| < 1/2$ para $n \geqslant m$.
- Sea $Z = \big\{z \in X \ : \ x(i) = 0 \text{ for } 1 \leqslant i \leqslant m\big\}$ (codimensión finita en X).
- Para $z \in Z$ con $\|z\| \leqslant 1/2$, se tiene $\|x \pm z\| \leqslant 1$.
- Por tanto, $\|Tx \pm Tz\| \leqslant 1$. Como Y es estrictamente convexo, $Tz = 0$.

Un inciso sobre la propiedad de aproximación

Definición (Grothendieck, 1950's)

X tiene la propiedad de aproximación (AP) si para cada $K \subset X$ compacto y cada $\varepsilon > 0$, existe $F \in L(X, X)$ de rango finito tal que $\|Fx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Notación

X e Y Banach, $F(X, Y)$ operadores de rango finito $K(X, Y)$ operadores compactos

Resultados básicos

- (Grothendieck) Y tiene AP sii $\overline{F(X, Y)} = K(X, Y)$ para todo X.
- (Grothendieck) X^* tiene AP sii $\overline{F(X, Y)} = K(X, Y)$ para todo Y.
- (Grothendieck) Si X^* tiene AP, entonces X tiene AP.
- (Enflo, 1973) Existe $X \leqslant c_0$ sin AP.

El primer ejemplo

Teorema

Existen espacios de Banach X e Y y un operador compacto de X a Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Demostración:

- Tomamos $X \leqslant c_0$ sin la propiedad de aproximación (Enflo).
- X^* tampoco tiene la propiedad de aproximación
  $\Longrightarrow$ existe Y y $T \in K(X,Y)$ con $T \notin \overline{F(X,Y)}$.
- Podemos suponer $Y = \overline{T(X)}$, que es separable y, por tanto, admite una norma equivalente estrictamente convexa (Klee).
- Aplicamos la extensión del resultado de Lindenstrauss: $NA(X,Y) \subseteq F(X,Y)$.
- Por tanto, $T \notin \overline{NA(X,Y)}$.

Otros ejemplos I. Sobre el espacio de partida

Proposición

X subespacio de c_0 tal que X^* no tiene la propiedad de aproximación. Entonces existe Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Ejemplo de Johnson y Schechtman, 2001

Existe X subespacio de c_0 **con base de Schauder** tal que X^* carece de la propiedad de aproximación.

Corolario

Existe un espacio de Banach X con base de Schauder, un espacio Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Otros ejemplos II. Sobre el espacio de llegada

Espacios estrictamente convexos

Y espacio estrictamente convexo sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Lema (Grothendieck)

Y tiene la propiedad de aproximación si para cualquier subespacio cerrado X de c_0, $F(X,Y)$ es denso en $K(X,Y)$.

Subespacios de $L_1(\mu)$

Y subespacio del espacio complejo $L_1(\mu)$ sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Otros ejemplos III. Dominio=Rango

Teorema

Existe un espacio de Banach Z y un operador compacto de Z en sí mismo que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

De hecho:

X e Y espacios de Banach.
Si todos los operadores (compactos) de $Z = X \oplus_\infty Y$ en sí mismo se pueden aproximar por operadores (compactos) que alcanzan la norma, entonces le ocurre lo mismo a todos los operadores (compactos) de X en Y.

(este resultado no era conocido)

Las propiedades A y B de Lindenstrauss

Sección 3

3 Las propiedades A y B de Lindenstrauss

Las propiedades A y B de Lindenstrauss

Definición

- X tiene la propiedad A cuando: $\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y) \quad \forall\, Y$
- Y tiene la propiedad B cuando: $\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y) \quad \forall\, X$

Primeros ejemplos positivos (Lindenstrauss)

- X reflexivo $\implies$ X tiene la propiedad A.
- ℓ_1 tiene la propiedad A (propiedad α).
- Si $c_0 \subset Y \subset \ell_\infty$ o Y finito-dimensional poliédrico, entonces Y tiene la propiedad B (propiedad β).

Primeros ejemplos negativos (Lindenstrauss)

- $L_1[0,1]$ y $C_0(L)$ (L infinito) no tienen la propiedad A.
- Si Y es estrictamente convexo y contiene una copia isomorfa de c_0, entonces Y no tiene la propiedad B

Relación con la propiedad de Radon-Nikodym

El Teorema de Bourgain (1977)

$$\text{RNP} \quad \Longrightarrow \quad \text{A} \quad \text{(en toda norma equivalente)}$$

Bourgain probó también un recíproco.

R. Huff (1980)

$$X \text{ no RNP} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, X_1 \sim X \sim X_2 \ : \ \overline{NA(X_1, X_2)} \neq L(X_1, X_2)$$

Otros contraejemplos

W. Gowers (1990)

Ningún espacio de Hilbert de dimensión infinita tiene la propiedad B

Para $1 < p < \infty$, ℓ_p y L_p no tienen la propiedad B

Apurando: Si Y es estrictamente convexo y contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p con $1 < p < \infty$, entonces Y no tiene la propiedad B.

M. D. Acosta (1999)

Ningún espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión infinita tiene la propiedad B

ℓ_1 y $L_1[0,1]$ no tienen la propiedad B

Las propiedades A^k y B^k

Sección 4

4 Las propiedades A^k y B^k
- Definición y primeros ejemplos
- Los principales problemas abiertos
- Resultados positivos sobre la propiedad A^k
- Resultados positivos sobre la propiedad B^k

Las propiedades A^k y B^k

Definición

- X tiene la propiedad A^k cuando: $\overline{NA(X,Y) \cap K(X,Y)} = K(X,Y) \quad \forall\, Y$
- Y tiene la propiedad B^k cuando: $\overline{NA(X,Y) \cap K(X,Y)} = K(X,Y) \quad \forall\, X$

Primeros ejemplos positivos

- Todos los ejemplos expuestos de espacios con A tienen A^k
  y todos los ejemplos expuestos de espacios con B tienen B^k.
- (Diestel-Uhl) $L_1(\mu)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) $C_0(L)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) Todo predual isométrico de $L_1(\mu)$ tiene B^k.
  En caso real, $L_1(\mu)$ tiene B^k.
- (Cascales-Guirao-Kadets) $A(\mathbb{D})$ tiene B^k (de hecho, cualquier álgebra uniforme).

Ejemplos negativos

- Para A^k: todo subespacio de c_0 cuyo dual no tenga AP.
- Para B^k: todo espacio estrictamente convexo sin AP.

Los principales problemas abiertos

Problema principal

¿Tiene todo espacio de dimensión finita la propiedad B de Lindenstrauss?

Este problema es equivalente a:

Problema

$$¿AP \implies \mathsf{B}^k?$$

Sobre el espacio dominio, tenemos el siguiente problema:

Problema

$$¿X^* \ AP \implies X \ \mathsf{A}^k?$$

Resultados positivos sobre la propiedad A^k.

Problema

$$¿X^* \ AP \implies X \ \mathsf{A}^k?$$

Una respuesta parcial es la siguiente:

(Johnson-Wolfe) Si tenemos una propiedad de aproximación más fuerte...

Supongamos que existe $(P_\alpha)_\alpha$ red de proyecciones contractivas en X con rango finito tal que $\lim_\alpha P_\alpha^* = \mathrm{Id}_{X^*}$ en SOT. Entonces, X tiene A^k.

Demostración:

Fijamos $T \in K(X,Y)$.

- $TP_\alpha(B_X) = T(B_{P_\alpha(X)})$ (usamos que P_α es proyección y que $\|P_\alpha\| = 1$).
- Luego, TP_α alcanza la norma.
- Como T^* es compacto, $P_\alpha^* T^* \longrightarrow T^*$ en norma, luego $TP_\alpha \longrightarrow T$ en norma.

Resultados positivos sobre la propiedad A^k.

Problema

$$¿X^* \ AP \implies X \ \mathrm{A}^k?$$

Una respuesta parcial es la siguiente:

(Johnson-Wolfe) Si tenemos una propiedad de aproximación más fuerte...

Supongamos que existe $(P_\alpha)_\alpha$ red de proyecciones contractivas en X con rango finito tal que $\lim_\alpha P_\alpha^* = \mathrm{Id}_{X^*}$ en SOT. Entonces, X tiene A^k.

Consecuencias

- (Diestel-Uhl) $L_1(\mu)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) $C_0(L)$ tiene A^k.
- X con base monótona y "shrinking" $\implies$ X tiene A^k.
- $X^* \equiv \ell_1 \implies X$ tiene A^k (usando un resultado de Gasparis).
- $X \leqslant c_0$ con base monótona $\implies$ X tiene A^k (usando un resultado de Godefroy–Saphar).

Resultados positivos sobre la propiedad B^k.

Problema

$$¿AP \implies \mathsf{B}^k?$$

Una respuesta parcial positiva

- Si Y es poliédrico (real) y tiene AP $\implies$ Y tiene B^k.
- Hay un análogo complejo...

Ejemplo

$$Y \leqslant c_0 \text{ con AP} \implies Y \text{ tiene } \mathsf{B}^k.$$

Un cierto recíproco al problema...

$$Y \text{ separable con } \mathsf{B}^k \text{para toda norma equivalente} \implies Y \text{ tiene AP.}$$

Esquema de la charla

1. Preliminares
2. Operadores compactos: resultados negativos
3. Las propiedades A y B de Lindenstrauss
4. Las propiedades A^k y B^k