Una versión para operadores compactos de las propiedades A y B de Lindenstrauss

Miguel Martín

http://www.ugr.es/local/mmartins

Universidad de Granada

Lanjarón, Octubre de 2014

Country Mathematical Meeting 2014

El contenido de la charla aparece en...

M. Martín
Norm-attaining compact operators
J. Funct. Anal. (2014)

M. Martín
The version for compact operators of Lindenstrauss properties A and B
(preprint)

Esquema de la charla

1. Preliminares
2. Operadores compactos: resultados negativos
3. Las propiedades A^k y B^k

Preliminares

Sección 1

El Teorema de Bishop-Phelps

Funcionales que alcanzan su norma

X espacio de Banach real o complejo

$$B_X = \{x \in X \,:\, \|x\| \leqslant 1\} \qquad S_X = \{x \in X \,:\, \|x\| = 1\} \qquad X^* \text{ dual de } X$$

$$\|x^*\| = \sup\{|x^*(x)| \,:\, x \in B_X\} \qquad (x^* \in X^*)$$

x^* alcanza su norma cuando este supremo es un máximo:

$$\exists\, x \in S_X \,:\, |x^*(x)| = \|x^*\|$$

Teorema (E. Bishop & R. Phelps, 1961)

El conjunto de los funcionales que alcanzan su norma es denso en X^* (para la topología de la norma).

Operadores que alcanzan la norma: planteamiento del problema

Operadores que alcanzan su norma

X , Y espacios de Banach, $L(X,Y)$ operadores (lineales y continuos)

$$\|T\| = \sup\{\|Tx\| \, : \, x \in B_X\} \qquad \big(T \in L(X,Y)\big)$$

T alcanza su norma cuando este supremo es un máximo:

$$T \in NA(X,Y) \iff \exists \, x \in S_X \, : \, \|Tx\| = \|T\|$$

Problema

$$¿\ \overline{NA(X,Y)} = L(X,Y)\ ?$$

- J. Lindenstrauss, *Israel J. Math.* (1963) inicia el estudio de este problema.
- En general, la respuesta es **Negativa**.
- Para el estudio del problema, Lindenstrauss introduce las propiedades A y B.

Las propiedades A y B de Lindenstrauss

Definición

- X tiene la propiedad A cuando: $\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y) \quad \forall\, Y$
- Y tiene la propiedad B cuando: $\overline{NA(X,Y)} = L(X,Y) \quad \forall\, X$

Primeros ejemplos positivos (Lindenstrauss)

- X reflexivo $\implies$ X tiene la propiedad A.
- ℓ_1 tiene la propiedad A (propiedad α).
- Si $c_0 \subset Y \subset \ell_\infty$ o Y finito-dimensional poliédrico, entonces Y tiene la propiedad B (propiedad β).

Primeros ejemplos negativos (Lindenstrauss)

- $L_1[0,1]$ y $C_0(L)$ (L infinito) no tienen la propiedad A.
- Si Y es estrictamente convexo y contiene una copia isomorfa de c_0, entonces Y no tiene la propiedad B

Relación con la propiedad de Radon-Nikodym

El Teorema de Bourgain (1977)

$$\text{RNP} \quad \Longrightarrow \quad \text{A} \qquad \text{(en toda norma equivalente)}$$

Bourgain probó también un recíproco.

R. Huff (1980)

$$X \text{ no RNP} \quad \Longrightarrow \quad \exists\, X_1 \sim X \sim X_2 \;:\; \overline{NA(X_1, X_2)} \neq L(X_1, X_2)$$

Otros contraejemplos

W. Gowers (1990)

Ningún espacio de Hilbert de dimensión infinita tiene la propiedad B

Para $1 < p < \infty$, ℓ_p y L_p no tienen la propiedad B

Apurando: Si Y es estrictamente convexo y contiene un subespacio isomorfo a ℓ_p con $1 < p < \infty$, entonces Y no tiene la propiedad B.

M. D. Acosta (1999)

Ningún espacio de Banach estrictamente convexo de dimensión infinita tiene la propiedad B

ℓ_1 y $L_1[0,1]$ no tienen la propiedad B

W. Schachermayer (1983)

$NA(L_1[0,1], C[0,1])$ no es denso en $L(L_1[0,1], C[0,1])$

Operadores compactos: resultados negativos

Sección 2

Planteamiento del problema para operadores compactos

Pregunta natural

¿Es cierto que todo operador compacto entre espacios de Banach puede aproximarse por operadores que alcanzan la norma?

Observaciones

- En todos los ejemplos negativos conocidos, se construyen operadores NO COMPACTOS que no pueden aproximarse por operadores que alcanzan la norma.
- De hecho, en la mayoría de los ejemplos se sabe que los operadores compactos que alcanzan la norma son densos.

¿Dónde aparece?

- Diestel-Uhl, *Rocky Mount. J. Math.*, 1976.
- Diestel-Uhl, *Vector measures* (monografía), 1977.
- Johnson-Wolfe, *Studia Math.*, 1979.
- Acosta, *RACSAM* (artículo expositivo), 2006.

Extendiendo un resultado de Lindenstrauss

X, Y espacios de Banach, $T \in L(X,Y)$ y $x_0 \in S_X$ con $\|T\| = \|Tx_0\| = 1$.

- Si x_0 no es extremo, existe $z \in X$ tal que $\|x_0 \pm z\| \leqslant 1$, luego $\|Tx_0 \pm Tz\| \leqslant 1$.
- Si Tx_0 es un punto extremo de B_Y, entonces $Tz = 0$.

Primera consecuencia: el resultado de Lindenstrauss

- $NA(c_0, Y) \subseteq F(c_0, Y)$ si Y es estrictamente convexo.
- Por tanto, c_0 no tiene la propiedad A.

Lema geométrico, Lindenstrauss

X, Y espacios de Banach. Supongamos que

- para cada $x_0 \in S_X$, $\mathrm{Lin}\{z \in X \,:\, \|x_0 \pm z\| \leqslant 1\}$ es de codimensión finita,
- Y es estrictamente convexo.

Entonces, $NA(X,Y) \subseteq F(X,Y)$ $\quad$ ($F(X,Y)$ operadores de rango finito).

Extendiendo un resultado de Lindenstrauss (II)

Proposición (extensión del resultado de Lindenstrauss)

$X \leqslant c_0$. Para cada $x_0 \in S_X$, $\mathrm{Lin}\{z \in X \,:\, \|x_0 \pm z\| \leqslant 1\}$ es de codimensión finita.

Demostración.

- Como $x_0 \in c_0$, existe m tal que $|x_0(n)| < 1/2$ para $n \geqslant m$.
- Sea $Z = \big\{z \in X \,:\, x_0(i) = 0 \text{ para } 1 \leqslant i \leqslant m\big\}$ (codimensión finita en X).
- Para $z \in Z$ con $\|z\| \leqslant 1/2$, se tiene $\|x \pm z\| \leqslant 1$.

Consecuencia

$X \leqslant c_0$, Y estrictamente convexo. Entonces $NA(X,Y) \subseteq F(X,Y)$.

Pregunta

¿Cómo usamos este resultado?

Un inciso sobre la propiedad de aproximación

Definición (Grothendieck, 1950's)

X tiene la propiedad de aproximación (AP) si para cada $K \subset X$ compacto y cada $\varepsilon > 0$, existe $F \in L(X,X)$ de rango finito tal que $\|Fx - x\| < \varepsilon$ para todo $x \in K$.

Notación

X e Y Banach, $F(X,Y)$ operadores de rango finito $K(X,Y)$ operadores compactos

Resultados básicos

- (Grothendieck) Y tiene AP sii $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$ para todo X.
- (Grothendieck) X^* tiene AP sii $\overline{F(X,Y)} = K(X,Y)$ para todo Y.
- (Grothendieck) Si X^* tiene AP, entonces X tiene AP.
- (Enflo, 1973) Existe $X \leqslant c_0$ sin AP.

El primer ejemplo

Teorema

Existe un operador **compacto** que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Demostración:

- Tomamos $X \leqslant c_0$ sin la propiedad de aproximación (Enflo).
- X^* tampoco tiene la propiedad de aproximación
  $\Longrightarrow$ existe Y y $T \in K(X,Y)$ con $T \notin \overline{F(X,Y)}$.
- Podemos suponer $Y = \overline{T(X)}$, que es separable y, por tanto, admite una norma equivalente estrictamente convexa (Klee).
- Aplicamos la extensión del resultado de Lindenstrauss: $NA(X,Y) \subseteq F(X,Y)$.
- Por tanto, $T \notin \overline{NA(X,Y)}$.

Otros ejemplos I. Sobre el espacio de partida

Proposición

X subespacio de c_0 tal que X^* no tiene la propiedad de aproximación. Entonces existe Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Ejemplo de Johnson y Schechtman, 2001

Existe X subespacio de c_0 **con base de Schauder** tal que X^* carece de la propiedad de aproximación.

Corolario

Existe un espacio de Banach X con base de Schauder, un espacio Y y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Otros ejemplos II. Sobre el espacio de llegada

Espacios estrictamente convexos

Y espacio estrictamente convexo sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Lema (Grothendieck)

Y tiene la propiedad de aproximación si para cualquier subespacio cerrado X de c_0, $F(X,Y)$ es denso en $K(X,Y)$.

Subespacios de $L_1(\mu)$

Y subespacio del espacio complejo $L_1(\mu)$ sin la propiedad de aproximación. Entonces existe X y un operador compacto de X en Y que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

Otros ejemplos III. Dominio=Rango

Teorema

Existe un espacio de Banach Z y un operador compacto de Z en sí mismo que no se puede aproximar por operadores que alcanzan la norma.

De hecho:

X e Y espacios de Banach.
Si todos los operadores (compactos) de $Z = X \oplus_\infty Y$ en sí mismo se pueden aproximar por operadores (compactos) que alcanzan la norma, entonces le ocurre lo mismo a todos los operadores (compactos) de X en Y.

(este resultado no era conocido)

Las propiedades A^k y B^k

Sección 3

3 Las propiedades A^k y B^k
- Definición y primeros ejemplos
- Los principales problemas abiertos
- Resultados positivos sobre la propiedad A^k
- Resultados positivos sobre la propiedad B^k

Las propiedades A^k y B^k

Definición

- X tiene la propiedad A^k cuando: $\overline{NA(X,Y)\cap K(X,Y)} = K(X,Y) \quad \forall\, Y$
- Y tiene la propiedad B^k cuando: $\overline{NA(X,Y)\cap K(X,Y)} = K(X,Y) \quad \forall\, X$

Primeros ejemplos positivos

- Todos los ejemplos expuestos de espacios con A tienen A^k (ej. RNP)
  y todos los ejemplos expuestos de espacios con B tienen B^k (ej. propiedad β).
- (Diestel-Uhl) $L_1(\mu)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) $C_0(L)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) Todo predual isométrico de $L_1(\mu)$ tiene B^k.
  En caso real, $L_1(\mu)$ tiene B^k.
- (Cascales-Guirao-Kadets) $A(\mathbb{D})$ tiene B^k (de hecho, cualquier álgebra uniforme).

Ejemplos negativos

- Para A^k: todo subespacio de c_0 cuyo dual no tenga AP.
- Para B^k: todo espacio estrictamente convexo sin AP.

Los principales problemas abiertos

Problema principal

¿Tiene todo espacio de dimensión finita la propiedad B de Lindenstrauss?

Este problema es equivalente a:

Problema

$$¿AP \implies \mathsf{B}^k?$$

Sobre el espacio dominio, tenemos el siguiente problema:

Problema

$$¿X^* \ AP \implies X \ \mathsf{A}^k?$$

Resultados positivos sobre la propiedad A^k.

Problema

$$¿X^* \ AP \implies X \ \mathsf{A}^k?$$

Una respuesta parcial es la siguiente:

(Johnson-Wolfe) Si tenemos una propiedad de aproximación más fuerte...

Supongamos que existe $(P_\alpha)_\alpha$ red de proyecciones contractivas en X con rango finito tal que $\lim_\alpha P_\alpha^* = \mathrm{Id}_{X^*}$ en SOT. Entonces, X tiene A^k.

Consecuencias

- (Diestel-Uhl) $L_1(\mu)$ tiene A^k.
- (Johnson-Wolfe) $C_0(L)$ tiene A^k.
- X con base monótona y "shrinking" $\implies$ X tiene A^k.
- $X^* \equiv \ell_1 \implies X$ tiene A^k (usando un resultado de Gasparis).
- $X \leqslant c_0$ con base monótona $\implies$ X tiene A^k (usando un resultado de Godefroy–Saphar).

Resultados positivos sobre la propiedad B^k.

Problema

$$¿AP \implies \mathrm{B}^k?$$

Una respuesta parcial positiva

- Si Y es poliédrico (real) y tiene AP $\implies$ Y tiene B^k.
- Hay un análogo complejo. . .

Ejemplo

$Y \leqslant c_0$ (real o complejo) con AP $\implies$ Y tiene B^k.

Un cierto recíproco al problema. . .

Y separable con B^kpara toda norma equivalente $\implies$ Y tiene AP.

Esquema de la charla