Un ejemplo de comportamiento extremo del grupo de las isometrías de un espacio de Banach respecto a la dualidad

Miguel Martín

http://www.ugr.es/local/mmartins

Universidad de Valencia – 19 de Septiembre de 2011

Introducción: notación, objetivos y motivación

Notación básica y principales objetivos

Notación

X espacio de Banach real o complejo.

- S_X esfera unidad, B_X bola unidad cerrada.
- X^* espacio dual, $L(X)$ operadores lineales acotados.
- $W(X)$ operadores lineales débilmente compactos.
- $\mathrm{Iso}(X)$ grupo de las isometrías sobreyectivas.

Objetivo

Construir espacios X tal que $\mathrm{Iso}(X)$ es pequeño pero $\mathrm{Iso}(X^*)$ es grande.

Motivación

X espacio de Banach.

Sistema dinámico autónomo

$$(\diamondsuit) \qquad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \qquad x_0 \in X,\ A \text{ lineal cerrado densamente definido.}$$

Semigrupo uniparamétrico de operadores

$\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow L(X)$ tal que $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s)\ \forall t, s \in \mathbb{R}_0^+$, $\Phi(0) = \mathrm{Id}$.

- *Uniformemente continuo*: $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow (L(X), \|\cdot\|)$ continuo.
- *Fuertemente continuo*: $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow (L(X), \mathrm{SOT})$ continuo.

Relación (Hille-Yoshida, 1950's)

- *Caso acotado:*
  - Si $A \in L(X) \Longrightarrow \Phi(t) = \exp(tA)$ solución de $(\diamondsuit)$ uniformemente continuo.
  - Φ uniformemente continuo $\Longrightarrow A = \Phi'(0) \in L(X)$ y Φ solución de $(\diamondsuit)$.
- *Caso no acotado:*
  - Φ fuertemente continuo $\Longrightarrow A = \Phi'(0)$ cerrado y Φ solución de $(\diamondsuit)$.
  - Si $(\diamondsuit)$ tiene solución Φ fuertemente continua $\Longrightarrow A = \Phi'(0)$ y $\Phi(t) =$ "$\exp(tA)$".

Motivación

- En espacios concretos no reflexivos, es fácil dar ejemplos de isometrías en X^* que no provienen de isometrías en X.
- Pero, ¿puede ser el comportamiento del grupo de las isometrías muy diferente en X y en X^*?

Probaremos la existencia de espacios de Banach X tales que

- **Caso 1:** $\mathrm{Iso}(X)$ no tiene semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos pero $\mathrm{Iso}(X^*) \supset \mathrm{Iso}(\ell_2)$.
- **Caso 2:** $\mathrm{Iso}(X) = \{\pm \mathrm{Id}\}$ pero $\mathrm{Iso}(X^*) \supset \mathrm{Iso}(\ell_2)$.

Esquema de la charla

Caso acotado o uniformemente continuo

Espacios de Hilbert

Rango numérico en espacios de Hilbert (Toeplitz, 1918)

- A matriz $n \times n$ real o compleja

$$W(A) = \big\{(Ax \mid x) \ : \ x \in \mathbb{K}^n, \ (x \mid x) = 1\big\}.$$

- H espacio de Hilbert real o complejo, $T \in L(H)$,

$$W(T) = \big\{(Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1\big\}.$$

Algunas propiedades

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$:

- $W(T)$ es convexo.
- En caso complejo, $\overline{W(T)}$ contiene al espectro de T.
- Si T es normal, $\overline{W(T)} = \overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{Sp}(T)$.

Espacios de Banach

Rango numérico en espacios de Banach (Bauer 1962; Lumer, 1961)

X espacio de Banach, $T \in L(X)$,

$$V(T) = \left\{ x^*(Tx) \ : \ x^* \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ x^*(x) = 1 \right\}$$

Algunas propiedades

X espacio de Banach, $T \in L(X)$:

- $V(T)$ es conexo (aunque no necesariamente convexo).
- En caso complejo, $\overline{V(T)}$ contiene al espectro de T.
- De hecho,

$$\overline{\mathrm{co}}\,\mathrm{Sp}(T) = \bigcap \overline{\mathrm{co}}\, V(T),$$

  donde tomamos la intersección sobre todos los rangos numéricos correspondientes a normas equivalentes sobre X.

Radio numérico e Índice numérico

Radio numérico

X espacio de Banach real o complejo, $T \in L(X)$,

$$v(T) = \sup\left\{|\lambda| \ : \ \lambda \in V(T)\right\}.$$

- v es una seminorma con $v(T) \leqslant \|T\|$.
- $v(T) = v(T^*)$ para todo $T \in L(X)$.

Índice numérico (Lumer, 1968)

X espacio de Banach real o complejo,

$$\begin{aligned} n(X) &= \text{ínf}\left\{v(T) \ : \ T \in L(X), \ \|T\| = 1\right\} \\ &= \text{máx}\{k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \ \forall T \in L(X)\}. \end{aligned}$$

Notas

- $n(X) = 1$ sii $v(T) = \|T\|$ para todo $T \in L(X)$.
- Si hay un $T \neq 0$ con $v(T) = 0$, entonces $n(X) = 0$.
- El recíproco no es cierto.

Relación con los semigrupos de operadores. I

Un ejemplo motivador

A matriz $n \times n$ real o compleja. Equivalen:

- A es antisimétrica (i.e. $A^* = -A$).
- $\mathrm{Re}(Ax \mid x) = 0$ para todo $x \in H$.
- $B = \exp(\rho A)$ es unitaria para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $B^*B = BB^* = \mathrm{Id}$).

En términos de los espacios de Hilbert

H espacio de Hilbert (n-dimensional), $T \in L(H)$. Equivalen:

- $\mathrm{Re}\, W(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \mathrm{Iso}(H)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Para espacios de Banach generales

X espacio de Banach, $T \in L(X)$. Equivalen:

- $\mathrm{Re}\, V(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \mathrm{Iso}(X)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Relación con los semigrupos de operadores. II

Teorema

X espacio de Banach, $T \in L(X)$. Equivalen:

- $\operatorname{Re} V(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \operatorname{Iso}(X)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.
- $\|\exp(\rho T)\| \leqslant 1$ para todo $\rho \in \mathbb{R}$.

Se sigue de la "fórmula exponencial"

$$\sup \operatorname{Re} V(T) = \lim_{\beta \downarrow 0} \frac{\|\mathrm{Id} + \beta T\| - 1}{\beta} = \sup_{\alpha > 0} \frac{\log \|\exp(\alpha T)\|}{\alpha}.$$

De hecho, se puede cuantificar el toerema

- Para cada $T \in L(X)$ se tiene

$$\big\|\exp(\rho T)\big\| \leqslant e^{v(T)\,|\rho|} \qquad \big(\rho \in \mathbb{R}\big)$$

  y $v(T)$ es la menor posibilidad.
- Entonces, $n(X) = 1$ es la peor posibilidad para encontrar semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.

El ejemplo principal

Espacios $C_E(K\|L)$

K compacto, $L \subset K$ cerrado con interior vacío, $E \subset C(L)$.

$$C_E(K\|L) = \{f \in C(K) : f|_L \in E\}.$$

Teorema

$$C_E(K\|L)^* \equiv E^* \oplus_1 C_0(K\|L)^* \quad \& \quad n\big(C_E(K\|L)\big) = 1.$$

Ejemplo

Tomamos $K = [0,1]$, $L = \Delta$, $E = \ell_2 \subset C(\Delta)$.

- $C_{\ell_2}([0,1]\|\Delta)$ no admite semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.
- $C_{\ell_2}([0,1]\|\Delta)^* \equiv \ell_2 \oplus_1 C_0([0,1]\|\Delta)^*$,

$$\text{Si } S \in \mathrm{Iso}(\ell_2) \implies T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \mathrm{Id} \end{pmatrix} \in \mathrm{Iso}\big(C_{\ell_2}([0,1]\|\Delta)^*\big)$$

Por tanto, $C_{\ell_2}([0,1]\|\Delta)^*$ admite infinitos semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.

Índice numérico y dualidad

Proposición

X espacio de Banach.

- $v(T^*) = v(T)$ para todo $T \in L(X)$.
- Por tanto, $n(X^*) \leqslant n(X)$.

Pregunta (1970)

¿Es $n(X) = n(X^*)$ siempre?

Algunas respuestas parciales (positivas)

- Cuando X es reflexivo (evidente).
- Cuando X es una C^*-álgebra o el predual de un álgebra de von Neumann (1970's Huruya – 2000's Rodríguez-Palacios et al.).
- Cuando X es un L-sumando en X^{**} (2009).
- Si X RNP y $n(X) = 1$, entonces $n(X^*) = 1$ (2000's).

Respuesta (Boyko-Kadets-M.-Werner, 2007)

La respuesta es **NO**. De hecho, $C_{\ell_2}([0,1] \| \Delta)$ es un contraejemplo.

Caso no acotado o fuertemente continuo

Rango numérico de operadores no acotados. I

Rango numérico de operadores no acotados (1960's)

X espacio de Banach, $T : D(T) \longrightarrow X$ lineal,

$$V(T) = \Big\{ x^*(Tx) \ : \ x^* \in X^*, \ x \in D(T), \ x^*(x) = \|x^*\| = \|x\| = 1 \Big\}.$$

Teorema (Stone, 1932)

H espacio de Hilbert, A operador densamente definido. Equivalen:

- A genera un grupo uniparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios (isometrías sobreyectivas).
- $A^* = -A$.
- $\mathrm{Re}(Ax \mid x) = 0$ para todo $x \in D(A)$, i.e. $\mathrm{Re}\, V(A) = \{0\}$.

Rango numérico de operadores no acotados. II

Dificultades

- ¿Qué espacios de Banach tienen operadores no acotados (no nulos) con rango numérico cero?
- ¿Qué operadores cerrados generan semigrupos uniparamétricos fuertemente continuos?

Ejemplos

- En $C_0(\mathbb{R})$, $\Phi(t)(f)(s) = f(t+s)$ es un semigrupo fuertemente continuo de isometrías generado por el operador derivada.
- En $C_E([0,1]\|\Delta)$ también hay semigrupos fuertemente continuos de isometrías.

Consecuencia

Cambiamos radicalmente la forma de abordar el problema.

Estructura compleja

Definición

X tiene estructura compleja si existe $T \in L(X)$ tal que $T^2 = -\mathrm{Id}$.

Comentarios

- Da una estructura de $\mathbb{C}$ espacio vectorial: $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta T(x)$.
- $|||x||| = \max\left\{ \|e^{i\theta} x\| \ : \ \theta \in [0, 2\pi] \right\}$ es una norma equivalente compleja.
- X espacio de Banach complejo $\implies$ $T(x) = ix$ satisface $T^2 = -\mathrm{Id}$.

Algunos ejemplos

1. $\dim(X) < \infty \implies X$ tiene estructura compleja sii $\dim(X)$ es par.
2. Si $X \simeq Z \oplus Z$, entonces X tiene estructura compleja.
3. Algunos espacios de dimensión infinita sin estructura compleja:
   - **Dieudonné, 1952:** el espacio de James $\mathcal{J}$ (pues $\mathcal{J}^{**} \equiv \mathcal{J} \oplus \mathbb{R}$).
   - **Gowers-Maurey, 1993:** su espacio H.I.

Espacios extremadamente no complejos

Definición

X es extremadamente no complejo si

$$\|\mathrm{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\| \qquad \big(T \in L(X)\big)$$

Compacto de Koszmider

K tal que para todo $T \in L\big(C(K)\big)$ se tiene

$$T^* = g\,\mathrm{Id} + S \qquad \big(g \text{ función de Borel, } S \in W(X^*)\big).$$

Teorema

K perfecto y Koszmider $\implies C(K)$ es extremadamente no complejo.

Ejemplo (Koszmider, 2004)

Existen infinitos compactos de Koszmider diferentes.

Corolario

Existen infinitos espacios extremadamente no complejos no isomorfos.

Isometrías en espacios extremadamente no complejos. I

Teorema

X extremadamente no complejo.

- $T \in \mathrm{Iso}(X) \implies T^2 = \mathrm{Id}$.
- $T_1, T_2 \in \mathrm{Iso}(X) \implies T_1 T_2 = T_2 T_1 \;\;\&\;\; \|T_1 - T_2\| \in \{0, 2\}$.
- $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathrm{Iso}(X)$ semigrupo uniparamétrico $\implies \Phi(\mathbb{R}_0^+) = \{\mathrm{Id}\}$.

Demostración.

- $S = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(T - T^{-1}\right) \implies S^2 = \frac{1}{2}T^2 - \mathrm{Id} + \frac{1}{2}T^{-2}$.
- $1 + \|S^2\| = \|\mathrm{Id} + S^2\| = \left\|\frac{1}{2}T^2 + \frac{1}{2}T^{-2}\right\| \leqslant 1 \implies S^2 = 0$.
- Como Id es un punto extremo de $B_{L(X)} \implies T^2 = T^{-2} = \mathrm{Id}$.

Isometrías en espacios extremadamente no complejos. II

Teorema

K Koszmider perfecto, L cerrado con interior vacío, $E \subset C(L)$
$\implies C_E(K\|L)$ extremadamente no complejo.

Proposición

K perfecto $\implies \exists\, L \subset K$ cerrado interior vacío tal que $C[0,1] \subset C(L)$.

Ejemplo

K Koszmider perfecto, $L \subset K$ cerrado con interior no vacío,
$E = \ell_2 \subset C[0,1] \subset C(L)$:

- $C_{\ell_2}(K\|L)$ no tiene semigrupos uniparamétricos no triviales de isometrías.
- $\mathrm{Iso}\big(C_{\ell_2}(K\|L)\big) \supset \mathrm{Iso}(\ell_2)$.

Isometrías en espacios $C_E(K\|L)$ extremadamente no complejos

Teorema "tipo Banach-Stone"

$C_E(K\|L)$ extremadamente no complejo, $T \in \mathrm{Iso}(C_E(K\|L))$
$\Longrightarrow$ existe $\theta : K \setminus L \longrightarrow \{-1, 1\}$ continua tal que

$$[T(f)](x) = \theta(x) f(x) \qquad \big(x \in K \setminus L,\ f \in C_E(K\|L)\big)$$

Consecuencias: casos $E = C(L)$ y $E = 0$

- $C(K)$ extremadamente no complejo, $\varphi : K \longrightarrow K$ homeomorfismo $\Longrightarrow \quad \varphi = \mathrm{id}$
- $C_0(K \setminus L) \equiv C_0(K\|L)$ extremadamente no complejo, $\varphi : K \setminus L \longrightarrow K \setminus L$ homeomorfismo $\Longrightarrow \quad \varphi = \mathrm{id}$

Consecuencia principal: caso conexo

Si K y $K \setminus L$ son conexos, entonces

$$\mathrm{Iso}\big(C_E(K\|L)\big) = \{-\mathrm{Id}, +\mathrm{Id}\}$$

El mejor ejemplo

Koszmider, 2004

$\exists\ \mathcal{K}$ conexo Koszmider tal que $\mathcal{K} \setminus F$ es conexo si $|F| < \infty$.

Observación importante sobre la construcción anterior

Se puede encontrar $\mathcal{L} \subset \mathcal{K}$ cerrado con interior vacío tal que

- $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ conexo
- $C[0,1] \subseteq C(\mathcal{L})$

Consecuencia: el mejor ejemplo

Sea $X = C_{\ell_2}(\mathcal{K} \| \mathcal{L})$. Entonces

$$\mathrm{Iso}(X) = \{-\mathrm{Id}, +\mathrm{Id}\} \qquad \text{y} \qquad \mathrm{Iso}(X^*) \supset \mathrm{Iso}(\ell_2)$$

Demostración.

- $\mathcal{K}$ Koszmider, $\mathcal{L}$ cerrado con interior vacío, $\ell_2 \subset C[0,1] \subset C(\mathcal{L})$ $\Longrightarrow X$ está bien definido y es extremadamente no complejo.
- $\mathcal{K} \setminus \mathcal{L}$ conexo $\Longrightarrow$ $\mathrm{Iso}(X) = \{-\mathrm{Id}, +\mathrm{Id}\}$.
- $X^* \equiv \ell_2 \oplus_1 C_0(\mathcal{K} \| \mathcal{L})^* \qquad \Longrightarrow \qquad \mathrm{Iso}(\ell_2) \subset \mathrm{Iso}(X^*)$.

Créditos

Preguntas

Rafael Payá, Granada 1996; Ángel Rodríguez, Granada 1999

¿Son iguales $n(X)$ y $n(X^*)$?

Gilles Godefroy, París 2005

¿Es $\mathbb{R}$ el único espacio extremadamente no complejo?

Rafael Payá, ICM Madrid 2006

¿Existe X tal que $\mathrm{Iso}(X)$ no contiene semigrupos uniparamétricos (uniformemente continuos) no triviales pero $\mathrm{Iso}(X^*)$ sí que los contiene?

Armando Villena, Granada 2007

¿Es posible que $\mathrm{Iso}(X) = \{\pm\mathrm{Id}\}$ y que $\mathrm{Iso}(X^*)$ contenga una copia de $\mathrm{Iso}(\ell_2)$?

Respuestas

K. Boyko, V. Kadets, M. Martín, and D. Werner.
Numerical index of Banach spaces and duality.
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (2007).

V. Kadets, M. Martín, and J. Merí.
Norm equalities for operators on Banach spaces.
Indiana U. Math. J. (2007).

P. Koszmider, M. Martín, and J. Merí.
Extremely non-complex $C(K)$ spaces.
J. Math. Anal. Appl. (2009).

P. Koszmider, M. Martín, and J. Merí.
Isometries on extremely non-complex Banach spaces.
J. Inst. Math. Jussieu (2011).

M. Martín
The group of isometries of a Banach space and duality.
J. Funct. Anal. (2008).