

Isometrías de un espacio de Banach y dualidad

Miguel Martín

<http://www.ugr.es/local/mmartins>



ugr

Universidad
de Granada



Enero 2009 – Seminario de Análisis Matemático, Granada

Introducción: notación, objetivos y motivación

Notación básica y principales objetivos

Notación

X espacio de Banach real o complejo.

- S_X esfera unidad, B_X bola unidad cerrada.
- X^* espacio dual, $L(X)$ operadores lineales acotados.
- $W(X)$ operadores lineales débilmente compactos.
- $\text{Iso}(X)$ grupo de las isometrías sobreyectivas.

Objetivo

- Construir espacios X tal que $\text{Iso}(X)$ es pequeño pero $\text{Iso}(X^*)$ es grande.
- Dos casos:
 - $\text{Iso}(X)$ no tiene semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos pero $\text{Iso}(X^*) \supset \text{Iso}(\ell_2)$.
 - $\text{Iso}(X) = \{\pm \text{Id}\}$ pero $\text{Iso}(X^*) \supset \text{Iso}(\ell_2)$.

Motivación

X espacio de Banach.

Sistema dinámico autónomo

$$(\diamond) \quad \begin{cases} x'(t) = Ax(t) \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad x_0 \in X, A \text{ lineal cerrado densamente definido.}$$

Semigrupo uniparamétrico de operadores

$\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow L(X)$ tal que $\Phi(t+s) = \Phi(t)\Phi(s) \forall t, s \in \mathbb{R}_0^+, \Phi(0) = \text{Id}$.

- *Uniformemente continuo*: $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow (L(X), \|\cdot\|)$ continuo.
- *Fuertemente continuo*: $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow (L(X), \text{SOT})$ continuo.

Relación (Hille-Yoshida, 1950's)

- *Caso acotado*:
 - Si $A \in L(X) \implies \Phi(t) = \exp(tA)$ solución de (\diamond) uniformemente continuo.
 - Φ uniformemente continuo $\implies A = \Phi'(0) \in L(X)$ y Φ solución de (\diamond) .
- *Caso no acotado*:
 - Φ fuertemente continuo $\implies A = \Phi'(0)$ cerrado y Φ solución de (\diamond) .
 - Si (\diamond) tiene solución Φ fuertemente continua $\implies A = \Phi'(0)$ y $\Phi(t) = \text{"exp}(tA)\text{"}$.

Esquema de la charla

1 Introducción

- Notación y objetivos
- Motivación

2 Caso acotado o uniformemente continuo

- El Rango Numérico
- Relación con los semigrupos de operadores
- El ejemplo
- Isometrías en espacios de dimensión finita
- Índice numérico y dualidad

3 Caso no acotado o fuertemente continuo

- Problemas con el rango numérico
- Espacios extremadamente no complejos
- Isometrías en espacios extremadamente no complejos
- El ejemplo

4 Créditos

Caso acotado o uniformemente continuo

Espacios de Hilbert

Rango numérico en espacios de Hilbert (Toeplitz, 1918)

- A matriz $n \times n$ real o compleja

$$W(A) = \{(Ax \mid x) : x \in \mathbb{K}^n, (x \mid x) = 1\}.$$

- H espacio de Hilbert real o complejo, $T \in L(H)$,

$$W(T) = \{(Tx \mid x) : x \in H, \|x\| = 1\}.$$

Algunas propiedades

H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$:

- $W(T)$ es convexo.
- En caso complejo, $\overline{W(T)}$ contiene al espectro de T .
- Si T es normal, $\overline{W(T)} = \overline{\text{co}}\text{Sp}(T)$.

Espacios de Banach

Rango numérico en espacios de Banach (Bauer 1962; Lumer, 1961)

X espacio de Banach, $T \in L(X)$,

$$V(T) = \{x^*(Tx) : x^* \in S_{X^*}, x \in S_X, x^*(x) = 1\}$$

Algunas propiedades

X espacio de Banach, $T \in L(X)$:

- $V(T)$ es conexo (aunque no necesariamente convexo).
- En caso complejo, $\overline{V(T)}$ contiene al espectro de T .
- De hecho,

$$\overline{\text{Sp}}(T) = \bigcap \overline{V(T)},$$

donde tomamos la intersección sobre todos los rangos numéricos correspondientes a normas equivalentes sobre X .

Radio numérico e Índice numérico

Radio numérico

X espacio de Banach real o complejo, $T \in L(X)$,

$$v(T) = \sup \{ |\lambda| : \lambda \in V(T) \}.$$

- v es una seminorma con $v(T) \leq \|T\|$.
- $v(T) = v(T^*)$ para todo $T \in L(X)$.

Índice numérico (Lumer, 1968)

X espacio de Banach real o complejo,

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf \{ v(T) : T \in L(X), \|T\| = 1 \} \\ &= \max \{ k \geq 0 : k\|T\| \leq v(T) \forall T \in L(X) \}. \end{aligned}$$

Notas

- $n(X) = 1$ sii $v(T) = \|T\|$ para todo $T \in L(X)$.
- Si hay un $T \neq 0$ con $v(T) = 0$, entonces $n(X) = 0$.
- El recíproco no es cierto.

Relación con los semigrupos de operadores. I

Un ejemplo motivador

A matriz $n \times n$ real o compleja. Equivalen:

- A es antisimétrica (i.e. $A^* = -A$).
- $\operatorname{Re}(Ax | x) = 0$ para todo $x \in H$.
- $B = \exp(\rho A)$ es unitaria para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$ (i.e. $B^*B = BB^* = \operatorname{Id}$).

En términos de los espacios de Hilbert

H espacio de Hilbert (n -dimensional), $T \in L(H)$. Equivalen:

- $\operatorname{Re}W(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \operatorname{Iso}(H)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Para espacios de Banach generales

X espacio de Banach, $T \in L(X)$. Equivalen:

- $\operatorname{Re}V(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \operatorname{Iso}(X)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.

Relación con los semigrupos de operadores. II

Teorema

X espacio de Banach, $T \in L(X)$. Equivalen:

- $\operatorname{Re} V(T) = \{0\}$.
- $\exp(\rho T) \in \operatorname{Iso}(X)$ para todo $\rho \in \mathbb{R}^+$.
- $\|\exp(\rho T)\| \leq 1$ para todo $\rho \in \mathbb{R}$.

Se sigue de la “fórmula exponencial”

$$\sup \operatorname{Re} V(T) = \lim_{\beta \downarrow 0} \frac{\|\operatorname{Id} + \beta T\| - 1}{\beta} = \sup_{\alpha > 0} \frac{\log \|\exp(\alpha T)\|}{\alpha}.$$

Consecuencias

- Para cada $T \in L(X)$ se tiene

$$\|\exp(\rho T)\| \leq e^{v(T)\rho} \quad (\rho \in \mathbb{R})$$

y $v(T)$ es la menor posibilidad.

- Entonces, $n(X) = 1$ es la peor posibilidad para encontrar semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.

El ejemplo principal

Espacios $C_E(K||L)$

K compacto, $L \subset K$ cerrado con interior vacío, $E \subset C(L)$.

$$C_E(K||L) = \{f \in C(K) : f|_L \in E\}.$$

Teorema

$$C_E(K||L)^* \cong E^* \oplus_1 C_0(K||L)^* \quad \& \quad n(C_E(K||L)) = 1.$$

Ejemplo

Tomamos $K = [0, 1]$, $L = \Delta$, $E = \ell_2 \subset C(\Delta)$.

- $C_{\ell_2}([0, 1]||\Delta)$ no admite semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.
- $C_{\ell_2}([0, 1]||\Delta)^* \cong \ell_2 \oplus_1 C_0([0, 1]||\Delta)^*$, $S \in \text{Iso}(\ell_2)$

$$\implies T = \begin{pmatrix} S & 0 \\ 0 & \text{Id} \end{pmatrix} \in \text{Iso}(C_{\ell_2}([0, 1]||\Delta)^*)$$

Por tanto, $C_{\ell_2}([0, 1]||\Delta)^*$ admite infinitos semigrupos uniparamétricos uniformemente continuos de isometrías.

Isometrías en espacios de dimensión finita. I

Teorema

X espacio normado real de dimensión finita. Equivalen:

- $\text{Iso}(X)$ es infinito.
- $n(X) = 0$.
- Existe $T \in L(X)$, $T \neq 0$, con $v(T) = 0$.

Teorema

X espacio normado real de dimensión finita. Equivalen:

- $n(X) = 0$.
- $X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$ donde
 - X_0 es un espacio real (que puede ser cero),
 - X_1, \dots, X_n son espacios complejos no nulos,y existen ρ_1, \dots, ρ_n números **racionales** tales que

$$\left\| x_0 + e^{i\rho_1\theta} x_1 + \cdots + e^{i\rho_n\theta} x_n \right\| = \|x_0 + x_1 + \cdots + x_n\|$$

para cualesquiera $x_i \in X_i$ y cualquier $\theta \in \mathbb{R}$.

Isometrías en espacios de dimensión finita. II

Comentarios

- El teorema anterior se debe a Rosenthal con ρ 's reales.
- El hecho de que los ρ 's pueden tomarse racionales se debe a M.–Merí–Rodríguez–Palacios.

Consecuencia

X espacio real con $n(X) = 0$.

- Si $\dim(X) = 2$, entonces $X \cong \mathbb{C}$.
- Si $\dim(X) = 3$, entonces $X \cong \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ (suma absoluta).

Ejemplo

$X = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$, $\|(a, b, c, d)\| = \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \left| \operatorname{Re} \left(e^{2it}(a+ib) + e^{it}(c+id) \right) \right| dt$.

Entonces $n(X) = 0$ pero la única descomposición posible es $X = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ con

$$\left\| e^{it}x_1 + e^{2it}x_2 \right\| = \|x_1 + x_2\|.$$

Isometrías en espacios de dimensión finita. III

Álgebra de Lie

X Banach real, $\mathcal{Z}(X) = \{T \in L(X) : v(T) = 0\}$.

- Si $\dim(X) < \infty$, $\text{Iso}(X)$ es un grupo de Lie y $\mathcal{Z}(X)$ su espacio tangente (i.e. su álgebra de Lie).

Nota

Si $\dim(X) = n \implies 0 \leq \dim(\mathcal{Z}(X)) \leq \frac{n(n-1)}{2}$.

Un problema abierto

Dado $n \geq 3$, ¿cuáles son las posibles $\dim(\mathcal{Z}(X))$ considerando todos los X n -dimensionales?

Observación (Javier Merí, PhD)

Si $\dim(X) = 3$, $\dim(\mathcal{Z}(X))$ no puede ser 2.

Índice numérico y dualidad

Proposición

X espacio de Banach.

- $v(T^*) = v(T)$ para todo $T \in L(X)$.
- Por tanto, $n(X^*) \leq n(X)$.

Pregunta (1970)

¿Es $n(X) = n(X^*)$ siempre?

Algunas respuestas parciales (positivas)

- Cuando X es reflexivo (evidente).
- Cuando X es una C^* -álgebra o el predual de un álgebra de von Neumann (1970's Huruya – 2000's Rodríguez-Palacios et al.).
- Cuando X es un L -sumando en X^{**} (2009).
- Si X RNP y $n(X) = 1$, entonces $n(X^*) = 1$ (2000's).

Respuesta (Boyko-Kadets-M.-Werner, 2007)

La respuesta es **NO**. De hecho, $C_{\ell_2}([0, 1] \parallel \Delta)$ es contraejemplo.

Caso no acotado o fuertemente continuo

Rango numérico de operadores no acotados. I

Rango numérico de operadores no acotados (1960's)

X espacio de Banach, $T : D(T) \rightarrow X$ lineal,

$$V(T) = \{x^*(Tx) : x^* \in X^*, x \in D(T), x^*(x) = \|x^*\| = \|x\| = 1\}.$$

Teorema (Stone, 1932)

H espacio de Hilbert, A operador densamente definido. Equivalen:

- A genera un grupo uniparamétrico fuertemente continuo de operadores unitarios (isometrías sobreyectivas).
- $A^* = -A$.
- $\operatorname{Re}(Ax | x) = 0$ para todo $x \in D(A)$, i.e. $\operatorname{Re} V(A) = \{0\}$.

Rango numérico de operadores no acotados. II

Dificultades

- ¿Qué espacios de Banach tienen operadores no acotados (no nulos) con rango numérico cero?
- ¿Qué operadores cerrados generan semigrupos uniparamétricos fuertemente continuos?

Ejemplos

- En $C_0(\mathbb{R})$, $\Phi(t)(f)(s) = f(t+s)$ es un semigrupo fuertemente continuo de isometrías generado por el operador derivada.
- En $C_E([0,1]||\Delta)$ también hay semigrupos fuertemente continuos de isometrías.

Consecuencia

Cambiamos radicalmente la forma de abordar el problema.

Estructura compleja

Definición

X tiene **estructura compleja** si existe $T \in L(X)$ tal que $T^2 = -\text{Id}$.

Comentarios

- Da una estructura de \mathbb{C} espacio vectorial: $(\alpha + i\beta)x = \alpha x + \beta T(x)$.
- $\|x\| = \max\{\|e^{i\theta}x\| : \theta \in [0, 2\pi]\}$ es una norma equivalente compleja.
- X espacio de Banach complejo $\implies T(x) = ix$ satisface $T^2 = -\text{Id}$.

Algunos ejemplos

- 1 $\dim(X) < \infty \implies X$ tiene estructura compleja sii $\dim(X)$ es par.
- 2 Si $X \simeq Z \oplus Z$, entonces X tiene estructura compleja.
- 3 Algunos espacios de dimensión infinita sin estructura compleja:
 - **Dieudonné, 1952:** el espacio de James \mathcal{J} (pues $\mathcal{J}^{**} \equiv \mathcal{J} \oplus \mathbb{R}$).
 - **Gowers-Maurey, 1993:** su espacio H.I.

Espacios extremadamente no complejos

Definición

X es **extremadamente no complejo** si

$$\|\text{Id} + T^2\| = 1 + \|T^2\| \quad (T \in L(X))$$

Compacto de Koszmider

K tal que para todo $T \in L(C(K))$ se tiene

$$T^* = g\text{Id} + S \quad (g \text{ función de Borel}, S \in W(X^*)).$$

Teorema

K perfecto y Koszmider $\implies C(K)$ es extremadamente no complejo.

Ejemplo (Koszmider, 2004)

Existen infinitos compactos de Koszmider diferentes.

Corolario

Existen infinitos espacios extremadamente no complejos no isomorfos.

Isometrías en espacios extremadamente no complejos. I

Teorema

X extremadamente no complejo.

- $T \in \text{Iso}(X) \implies T^2 = \text{Id}$.
- $T_1, T_2 \in \text{Iso}(X) \implies T_1 T_2 = T_2 T_1 \quad \& \quad \|T_1 - T_2\| \in \{0, 2\}$.
- $\Phi : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \text{Iso}(X)$ semigrupo uniparamétrico $\implies \Phi(\mathbb{R}_0^+) = \{\text{Id}\}$.

Demostración.

- $S = \frac{1}{\sqrt{2}} (T - T^{-1}) \implies S^2 = \frac{1}{2} T^2 - \text{Id} + \frac{1}{2} T^{-2}$.
- $1 + \|S^2\| = \|\text{Id} + S^2\| = \left\| \frac{1}{2} T^2 + \frac{1}{2} T^{-2} \right\| \leq 1 \implies S^2 = 0$.
- Como Id es un punto extremo de $B_{L(X)} \implies T^2 = T^{-2} = \text{Id}$.

Consecuencia

$C(K)$ extremadamente no complejo, K conexo $\implies K$ rígido
($\varphi : K \longrightarrow K$ homeomorfismo, entonces $\varphi = \text{id}$).

Isometrías en espacios extremadamente no complejos. II

Teorema

K Koszmider perfecto, L cerrado con interior vacío, $E \subset C(L)$
 $\implies C_E(K\|L)$ extremadamente no complejo.

Proposición

K Koszmider $\implies \exists L \subset K$ cerrado interior vacío tal que $C[0,1] \subset C(L)$.

Ejemplo

K Koszmider perfecto, $L \subset K$ cerrado con interior no vacío,
 $E = \ell_2 \subset C[0,1] \subset C(L)$:

- $C_{\ell_2}(K\|L)$ no tiene semigrupos uniparamétricos no triviales de isometrías.
- $\text{Iso}(C_{\ell_2}(K\|L)) \supset \text{Iso}(\ell_2)$.

Un ejemplo mejor

Teorema

Existe \tilde{K} Koszmider y \tilde{L} cerrado con interior vacío tales que

- $C[0,1] \subset C(\tilde{L})$.
- \tilde{K} conexo y $\tilde{K} \setminus \tilde{L}$ conexo.

El mejor ejemplo

$X(\ell_2) = C_{\ell_2}(\tilde{K} \parallel \tilde{L})$ verifica:

- $\text{Iso}(X(\ell_2)) = \{\pm \text{Id}\}$.
- $\text{Iso}(X(\ell_2)^*) \supset \text{Iso}(\ell_2)$.

Introducción
○○○

Caso acotado
○○○○○○○○○○

Caso no acotado
○○○○○○○

Créditos
○○

Créditos

Preguntas

Rafael Payá, Granada 1996; Ángel Rodríguez, Granada 1999

¿Son iguales $n(X)$ y $n(X^*)$?

Gilles Godefroy, París 2005

¿Es \mathbb{R} el único espacio extremadamente no complejo?

Rafael Payá, ICM Madrid 2006

¿Existe X tal que $\text{Iso}(X)$ no contiene semigrupos uniparamétricos (uniformemente continuos) no triviales pero $\text{Iso}(X^*)$ sí que los contiene?

Armando Villena, Granada 2007

¿Es posible que $\text{Iso}(X) = \{\pm \text{Id}\}$ pero $\text{Iso}(X^*)$ contiene una copia de $\text{Iso}(\ell_2)$?

Respuestas



K. Boyko, V. Kadets, M. Martín, and D. Werner.
Numerical index of Banach spaces and duality.
Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. (2007).



V. Kadets, M. Martín, and J. Merí.
Norm equalities for operators on Banach spaces.
Indiana U. Math. J. (2007).



P. Koszmider, M. Martín, and J. Merí.
Extremely non-complex $C(K)$ spaces.
J. Math. Anal. Appl. (2009).



P. Koszmider, M. Martín, and J. Merí.
Isometries on extremely non-complex Banach spaces.
Preprint (2008).



M. Martín
The group of isometries of a Banach space and duality.
J. Funct. Anal. (2008).



M. Martín
Positive and negative results on the numerical index of Banach spaces and duality.
Proc. Amer. Math. Soc. (200?).



M. Martín, J. Merí, and A. Rodríguez-Palacios.
Finite-dimensional spaces with numerical index zero.
Indiana U. Math. J. (2004).