La propiedad de Daugavet.

Caracterizaciones geométricas en C^*-álgebras y sus preduales

Miguel Martín Suárez

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

Marzo de 2005 / Universidad Complutense de Madrid

Chala basada en los artículos...

J. Becerra Guerrero and M. Martín,
The Daugavet Property of C^*-algebras, JB^*-triples, and of their isometric preduals.
Journal of Functional Analysis (2005)

M. Martín and T. Oikhberg,
An alternative Daugavet property.
Journal of Mathematical Analysis and applications (2004)

M. Martín,
The alternative Daugavet property of C^*-algebras and JB^*-triples.
Preprint

Esquema

La ecuación de Daugavet

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(DE)}$$

Ejemplos clásicos

1. **Daugavet, 1963:**
   Todo operador compacto en $C[0,1]$ satisface (DE).
2. **Lozanoskii, 1966:**
   Todo operador débilmente compacto en $L_1[0,1]$ satisface (DE).
3. **Abramovich, Holub y otros, años 80:**
   $X = C(K)$, K espacio topológico perfecto
   o $X = L_1(\mu)$, μ medida libre de átomos
   $\Longrightarrow$ todo operador débilmente compacto $T \in L(X)$ satisface (DE).

La propiedad de Daugavet

- Un espacio de Banach X tiene la propiedad de Daugavet si todo operador de rango-uno en X satisface (DE).
  - En este caso, todo operador débilmente compacto en X también satisface (DE).
  - Si X^* tiene la propiedad de Daugavet, lo mismo le ocurre a X. El resultado opuesto no es cierto.

(Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 1997 & 2000)

Versiones anteriores: *Chauveheid, 1982; Abramovich–Aliprantis–Burkinshaw, 1991*

Algunos ejemplos...

1. K perfecto, μ libre de átomos, X espacio de Banach arbitrario $\Longrightarrow C(K,X)$, $L_1(\mu,X)$ y $L_\infty(\mu,X)$ tienen la propiedad de Daugavet.

   (Kadets, 1996; Nazarenko, –; Shvidkoy, 2001)

2. K arbitrario. Si X tiene la propiedad de Daugavet, entonces $C(K,X)$ también la tiene.

   (M.–Payá, 2000)

Más ejemplos...

3. La c_0, ℓ_1 y ℓ_∞ suma de espacios con la propiedad de Daugavet tiene la propiedad de Daugavet.
4. $A(\mathbb{D})$ y H^∞ tienen la propiedad de Daugavet.

   (Wojtaszczyk, 1992)

5. $R \subset L_1[0,1] =: L_1$ reflexivo, entonces L_1/R tiene la propiedad de Daugavet.

   (Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 2000)

6. Una C^*-álgebra tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, carece de átomos.
7. El predual de un álgebra de von Neumann tiene la propiedad de Daugavet si, y sólo si, el álgebra carece de átomos.

   (Oikhberg, 2002)

Un poco de *propaganda*...

Sea X un espacio de Banach con la propiedad de Daugavet. Entonces:

- X no tiene la propiedad de Radon-Nikodým.

  (Wojtaszczyk, 1992)
- Las rebanadas de B_X y las w^*-rebanadas de B_{X^*} tienen diámetro 2.

  (Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 2000)
- De hecho, cualquier abierto débil de B_X tiene diámetro 2.

  (Shvidkoy, 2000)
- X contiene una copia de ℓ_1. X^* contiene una copia de $L_1[0,1]$.

  (Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 2000)

Más *propaganda*...

X espacio de Banach con la propiedad de Daugavet:

- X no tiene base incondicional.

  (Kadets, 1996)

- X no es subespacio de ningún espacio con base incondicional.
- De hecho, X no es subespacio de ninguna suma incondicional de espacios que no contengan a ℓ_1.

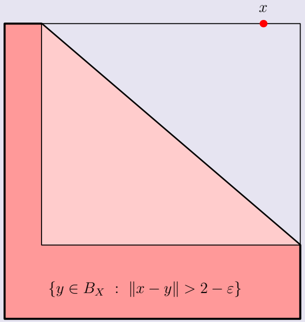
  (Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 2000; Shvidkoy, 2000)

Caracterizaciones geométricas

Teorema [KSSW]

Equivalen:

- X tiene la propiedad de Daugavet.
- Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ tal que
$$\operatorname{Re} x^*(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$
- Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que
$$\operatorname{Re} y^*(x) > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x^* - y^*\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$
- Para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene
$$B_X = \overline{\text{co}}\big(\{y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon\}\big).$$



¿Hay otras propiedades análogas a la propiedad de Daugavet?

Teorema

Sea X un espacio de Banach con $\dim(X) > 1$. Supongamos que

$$\|g(T)\| = f(\|T\|)$$

para todo operador de rango-uno $T \in L(X)$,donde

- $g : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ es analítica y
- $f : \mathbb{R}_0^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ es arbitraria.

Entonces, tres casos son posibles:

1. g es constante,
2. $g(t) = \alpha\, t$ para cierto $\alpha \in \mathbb{K}$,

   (casos triviales)
3. $g(t) = \alpha + \beta t$ para ciertos $\alpha, \beta \neq 0$.En este caso, $f(t) = |\alpha| + |\beta|\, t$ y X tiene la propiedad de Daugavet.

(M.–Merí, en preparación)

Una nueva condición suficiente

Una nueva condición suficiente

Teorema

Sea X un espacio de Banach tal que

$$X^* = Y \oplus_1 Z$$

con Y, Z subespacios normantes. Entonces, X tiene la propiedad de Daugavet.

Un subespacio cerrado $W \subseteq X^*$ es normante si

$$\|x\| = \sup\left\{|w^*(x)| \ : \ w^* \in W, \ \|w^*\| = 1\right\} \qquad \big(x \in X\big)$$

o, equivalentemente, si B_W es w^*-densa en B_{X^*}.

Demostración del teorema

Tenemos…

$$X^* = Y \oplus_1 Z,$$
B_Y, B_Z w^*-densas en B_{X^*}.

$\overset{?}{\Longrightarrow}$

Necesitamos…

fijados $x_0 \in S_X$, $x_0^* \in S_{X^*}$, $\varepsilon > 0$, encontrar $y^* \in S_{X^*}$ tal que
$$\|x_0^* + y^*\| > 2 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \operatorname{Re} y^*(x_0) > 1 - \varepsilon.$$

- Escribimos $x_0^* = y_0^* + z_0^*$ donde $y_0^* \in Y$, $z_0^* \in Z$, $\|x_0^*\| = \|y_0^*\| + \|z_0^*\|$ y consideramos
$$U = \{x^* \in B_{X^*} \ : \ \operatorname{Re} x^*(x_0) > 1 - \varepsilon\}.$$
- Tomamos $z^* \in B_Z \cap U$ y una red (y_λ^*) contenida en $B_Y \cap U$ tal que $(y_\lambda^*) \xrightarrow{w^*} z^*$.
- Como $(y_\lambda^* + y_0^*) \longrightarrow z^* + y_0^*$ y la norma es w^*-inferiormente semicontinua,
$$\liminf \|y_\lambda^* + y_0^*\| \geqslant \|z^* + y_0^*\| = \|z^*\| + \|y_0^*\| > 1 + \|y_0^*\| - \varepsilon.$$
- Entonces, podemos encontrar μ tal que $\|y_\mu^* + y_0^*\| > 1 + \|y_0^*\| - \varepsilon$.
- Finalmente, obsérvese que
$$\begin{aligned}\|x_0^* + y_\mu^*\| &= \|(y_0^* + y_\mu^*) + z_0^*\| = \\ &= \|y_0^* + y_\mu^*\| + \|z_0^*\| > 1 + \|y_0^*\| - \varepsilon + \|z_0^*\| = 2 - \varepsilon,\end{aligned}$$

  y que $\operatorname{Re} y_\mu^*(x_0) > 1 - \varepsilon$ (ya que $y_\mu^* \in U$).

Algunas consecuencias inmediatas

Corolario

Sea X un espacio L-embebido con $\operatorname{ext}(B_X) = \emptyset$. Entonces, X^* (y por tanto X) tiene la propiedad de Daugavet.

Corolario

Si Y es un espacio L-embebido que es subespacio de $L_1 \equiv L_1[0,1]$, entonces $(L_1/Y)^*$ tiene la propiedad de Daugavet.

Era conocido...

- Si Y es un subespacio reflexivo de L_1, entonces L_1/Y tiene la propiedad de Daugavet.

  (Kadets–Shvidkoy–Sirotkin–Werner, 2000)

- Si $Y \subset L_1$ está L-embebido, entonces L_1/Y no tiene la RNP.

  (Harmand–Werner–Werner, 1993)

Aplicaciones:

La propiedad de Daugavet en C^*-álgebras y sus preduales

Preduales de álgebras de von Neumann

Preduales de álgebras de von Neumann

- X es un álgebra de von Neumann si es una C^*-álgebra que además es un espacio dual.
- En este caso, X tiene un único predual X_*.
- X_* está siempre L-embebido.
- Por tanto, si $\operatorname{ext}(B_{X_*}) = \emptyset$, entonces X y X_* tienen la propiedad de Daugavet.

De hecho, podemos decir mucho más:

Teorema

Sea X_* el predual del álgebra de von Neumann X. Entonces, son equivalentes:

- X tiene la propiedad de Daugavet.
- X_* tiene la propiedad de Daugavet.
- Toda rebanada de B_{X_*} tiene diámetro 2.
- B_{X_*} no tiene puntos fuertemente expuestos.
- B_{X_*} no tiene puntos extremos.
- X está libre de átomos (esto es, X no tiene proyecciones atómicas).

Una proyección atómica es un elemento $p \in X$ no nulo tal que

$$p^2 = p^* = p \qquad \text{y} \qquad p\,X\,p = \mathbb{C}p.$$

C^*-álgebras

Si X es una C^*-álgebra, entonces X^{**} es un álgebra de von Neumann.
Podemos descomponer $X^* = \left(X^{**}\right)_* = A \oplus_1 N$, donde

- A es la parte atómica,
- N es la parte libre de átomos.

- Todo punto extremo de B_{X^*} está en B_A.
- Por tanto, A es normante.
- ¿ Qué pasa con N **?**

Teorema

Si X está libre de átomos, entonces N es normante y, por tanto, X tiene la propiedad de Daugavet.

De hecho, podemos decir mucho más:

Teorema

Sea X una C^*-álgebra. Entonces, son equivalentes:

- X tiene la propiedad de Daugavet.
- X está libre de átomos.
- La norma de X es extremadamente ruda, esto es,

$$\operatorname{lím\,sup}_{\|h\|\to 0} \frac{\|x+h\| + \|x-h\| - 2}{\|h\|} = 2$$

  para cada $x \in S_X$ (equivalentemente, toda rebanada w^*-abierta de B_{X^*} tiene diámetro 2).
- La norma de X no es Fréchet diferenciable en ningún punto.

La ecuación de Daugavet alternativa

La ecuación de Daugavet alternativa

La ecuación de Daugavet alternativa

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$\max_{|\omega|=1} \|Id + \omega\, T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(aDE)}$$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970; Holub, Abramovich..., años 80)

Dos formulaciones equivalentes:

- Existe $\omega \in \mathbb{T}$ tal que $\omega\, T$ satisface (DE).
- El radio numérico de T, $v(T)$, coincide con $\|T\|$, donde

$$v(T) := \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ x^* \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ x^*(x) = 1\}.$$

Dos posibles propiedades

Sea X un espacio de Banach.

- Decimos que X tiene la propiedad de Daugavet alternativa (ADP) sii todo operador de rango uno en X satisface (aDE).
  - Entonces, todo operador débilmente compacto en X satisface (aDE).
  - Si X^* tiene la ADP, lo mismo le pasa a X.

(Abramovich, 1991; M.–Oikhberg, 2004)

- Decimos que X tiene índice numérico 1 sii radio numérico y norma coinciden en $L(X)$. Equivalentemente, si TODOS los operadores en X satisfacen (aDE).

(Lumer, 1968; Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

Observación

No existe una propiedad análoga para la ecuación de Daugavet:

$$\|Id + (-Id)\| = 0 \neq 1 + \|-Id\|.$$

Índice numérico 1

- $C(K)$ y $L_1(\mu)$ tienen índice numérico 1.

  (Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)
- $A(\mathbb{D})$ tiene índice numérico 1.

  (Crabb–Duncan–McGregor, 1972)
- $\dim(X) < \infty$: X tiene índice numérico 1 sii

$$|x^*(x)| = 1 \qquad x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*}), \ x \in \operatorname{ext}(B_X).$$

  (McGregor, 1971)
- $\dim(X) = \infty$: si X tiene índice numérico 1 y la RNP, entonces $X \supseteq \ell_1$.

  (López–M.–Payá, 1999)
- Una C^*-álgebra tiene índice numérico 1 sii es conmutativa.

  (Huruya, 1977)

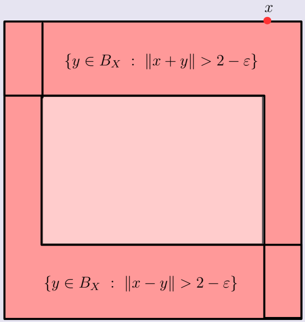
La propiedad de Daugavet alternativa

- La ADP es más débil que la propiedad de Daugavet y que el índice numérico 1.
- $c_0 \oplus_\infty C([0,1],\ell_2)$ tiene la ADP, pero no tiene ni la propiedad de Daugavet ni índice numérico 1.
- Todo espacio de Banach con la ADP admite una norma equivalente con la que sigue teniendo la ADP pero no tiene la propiedad de Daugavet.

Caracterizaciones geométricas

Theorem

- X tiene la ADP.
- Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ tal que
$$|x^*(y)| > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$
- Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que
$$|y^*(x)| > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x^* - y^*\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$
- Para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene
$$B_X = \overline{\text{co}}\big(\mathbb{T}\,\{y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon\}\big).$$



Sea V_* el predual de un álgebra de von Neumann V.

V_* tiene la propiedad de Daugavet sii:

- V no tiene proyecciones atómicas, o
- la bola unidad de V_* no tiene puntos extremos.

V_* tiene índice numérico 1 sii:

- V es conmutativa, o
- $|v^*(v)| = 1$ para $v \in \operatorname{ext}(B_V)$ y $v^* \in \operatorname{ext}(B_{V^*})$.

V_* tiene la propiedad de Daugavet alternativa sii:

- las proyecciones atómicas de V son centrales, o
- $|v(v_*)| = 1$ para $v \in \operatorname{ext}(B_V)$ y $v_* \in \operatorname{ext}(B_{V_*})$, o
- $V = C \oplus_\infty N$, donde C is conmutativa y N no tiene proyecciones atómicas.

Sea X una C^*-álgebra.

X tiene la propiedad de Daugavet sii:

- X no tiene proyecciones atómicas, o
- la bola unidad de X^* no tiene ningún punto fuertemente w^*-expuesto.

X tiene índice numérico 1 sii:

- X es conmutativa, o
- $|x^{**}(x^*)| = 1$ para $x^{**} \in \operatorname{ext}(B_{X^{**}})$ y $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$.

X tiene la propiedad de Daugavet alternativa sii:

- las proyecciones atómicas de X son centrales, o
- $|x^{**}(x^*)| = 1$, para cada $x^{**} \in \operatorname{ext}(B_{X^{**}})$ y cada $x^* \in B_{X^*}$ fuertemente w^*-expuesto, o
- $\exists$ un ideal conmutativo Y tal que X/Y tiene la propiedad de Daugavet.

Lecturas recomendadas...

Y. Abramovich, and C. Aliprantis,
An invitation to operator theory.
Graduate Studies in Math. **50**, AMS, 2002.

Y. Abramovich, and C. Aliprantis,
Problems in operator theory.
Graduate Studies in Math. **51**, AMS, 2002.

V. Kadets, R. Shvidkoy, G. Sirotkin, and D. Werner,
Banach spaces with the Daugavet property.
Trans. Amer. Math. Soc. (2000).

R. Shvidkoy,
Geometric aspects of the Daugavet property.
J. Funct. Anal. (2000).

D. Werner,
Recent progress on the Daugavet property.
Irish Math. Soc. Bulletin (2001).