UNIVERSIDAD DE GRANADA

Índice numérico de los espacios de Banach

Miguel Martín

Rango numérico de un operador

- H espacio de Hilbert, $T \in L(H)$

$$W(T) = \{(Tx \mid x) \ : \ x \in H, \ \|x\| = 1\}$$

(Toeplitz, 1918)

- X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$W(T) = \{x^*(Tx) \ : \ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\}$$

(Lumer, 1961; Bauer, 1962)

Radio numérico de un operador

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \ : \ \lambda \in W(T)\}$$

- v es una seminorma continua:

$$v(T) \leqslant \|T\|$$

- H espacio de Hilbert, $v(T)$ es la norma de la forma cuadrática asociada
  - H complejo, $\|T\| \leqslant 2\,v(T)$.
  - H real, existe $T \neq 0$ tal que $v(T) = 0$.

Índice numérico de un espacio de Banach

- X espacio de Banach,

$$\begin{aligned} n(X) &= \max\{k \geqslant 0 \ : \ k\|T\| \leqslant v(T) \quad \forall T \in L(X)\} \\ &= \inf\{v(T) \ : \ T \in L(X), \ \|T\| = 1\} \end{aligned}$$

$$0 \leqslant n(X) \leqslant 1$$

$$n(X^*) \leqslant n(X)$$

Índice numérico

- H espacio de Hilbert, $\dim(H) > 1$

$$\begin{array}{ll} n(H) = 0 & \text{si } H \text{ es real} \\ n(H) = 1/2 & \text{si } H \text{ es complejo} \end{array}$$

- X Banach complejo $\Rightarrow$ $n(X) \geqslant 1/e$

(Bohnenblust–Karlin, 1955; Glickfeld, 1970)

- $$\{n(X) \ : \ X \text{ complejo}, \ \dim(X) = 2\} = [e^{-1}, 1]$$

$$\{n(X) \ : \ X \text{ real}, \ \dim(X) = 2\} = [0, 1]$$

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

Ejemplos “Clásicos”

- H Hilbert, $\mathbf{dim}(H) > 1$, $n(H) = \begin{cases} 0 & \text{caso real} \\ 1/2 & \text{caso complejo} \end{cases}$

- $n\big(L_1(\mu)\big) = 1 \quad \mu$ medida positiva

- $X^* \equiv L_1(\mu) \quad \Rightarrow \quad n(X) = 1$

- En particular, $n\big(C(K)\big) = 1 \quad K$ espacio compacto de Hausdorff

(Duncan–McGregor–Pryce–White, 1970)

- $A(\mathbb{D})$ álgebra del disco $\Rightarrow$ $n\big(A(\mathbb{D})\big) = 1$

(Crabb–Duncan–McGregor, 1972)

- A C^*-álgebra $\Rightarrow \begin{cases} n(A) = 1 & \text{si } A \text{ es conmutativa} \\ n(A) = 1/2 & \text{si } A \text{ no es conmutativa} \end{cases}$

(Huruya, 1977; Kaidi–Morales–Rodríguez-Palacios, 2001)

- ¿ $n(l_p)$, $\quad p \neq 1, 2, \infty$?

Cálculo de algunos índices numéricos

Sumas de espacios de Banach

- $\{X_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ familia de espacios de Banach,

$$\begin{aligned} n\Big(\big[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big]_{c_0}\Big) &= n\Big(\big[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big]_{l_1}\Big) \\ &= n\Big(\big[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big]_{l_\infty}\Big) = \inf_\lambda n(X_\lambda) \end{aligned}$$

$$n\Big(\big[\oplus_{\lambda\in\Lambda} X_\lambda\big]_{l_p}\Big) \leqslant \inf_\lambda n(X_\lambda)$$

(M.–Payá, 2000)

Consecuencias

- La clase de espacios de Banach con índice numérico 1 es estable por c_0, l_1 y l_∞ sumas.

- X espacio de Banach:

$$n\big(c_0(X)\big) = n\big(l_1(X)\big) = n\big(l_\infty(X)\big) = n(X)$$

- Existe un espacio de Banach real X, tal que

$$v(T) > 0 \qquad \forall T \in L(X) \setminus \{0\},$$

pero $n(X) = 0$.

- *Caso real:*

  Para cada $t \in [0,1]$ existe X_t isomorfo a c_0 (o l_1 o l_∞) con $n(X_t) = t$

- *Caso complejo:*

  Para cada $s \in [e^{-1},1]$ existe X_s isomorfo a c_0 (o l_1 o l_∞) con $n(X_s) = s$

Espacios de funciones con valores vectoriales

- X espacio de Banach, K compacto de Hausdorff, μ medida positiva:

$$n\Big(C(K,X)\Big) = n\Big(L_1(\mu,X)\Big) = n(X)$$

(M.–Payá, 2000)

$$n\Big(L_\infty(\mu,X)\Big) = n(X)$$

(M.–Villena, 2003)

- X espacio de Banach, K compacto de Hausdorff,

$$n\Big(C_w(K,X)\Big) = n(X)$$

$$n\Big(C_{w^*}(K,X^*)\Big) \leqslant n(X)$$

- Si X es un espacio de Asplund o K tiene un conjunto denso de puntos aislados

$$n(X^*) \leqslant n\Big(C_{w^*}(K,X^*)\Big) \left(\leqslant n(X) \right)$$

(López–M.–Merí, ????)

Consecuencias

- $n\big(K(X, C(K)\big) = n(X^*)$.
- $n\big(W(X, C(K))\big) = n(X^*)$.
- $n\big(L(X, C(K))\big) \leqslant n(X)$.
- Si X es Asplund o K tiene un conjunto denso de puntos aislados:

  $n(X^*) \leqslant n\big(L(X, C(K))\big)$.

Productos tensoriales

$$C(K,X) = C(K)\widetilde{\otimes}_\varepsilon X$$

$$L_1(\mu,X) = L_1(\mu)\widetilde{\otimes}_\pi X$$

- X, Y espacios de Banach:

$$¿\ n\big(X\widetilde{\otimes}_\varepsilon Y\big) = f\big(n(X), n(Y)\big)\ ?$$

$$¿\ n\big(X\widetilde{\otimes}_\pi Y\big) = g\big(n(X), n(Y)\big)\ ?$$

- NO: Ejemplo

$$n\left(l_1^4 \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_1^4\right) < 1 = n\left(l_\infty^4 \widetilde{\otimes}_\varepsilon l_\infty^4\right)$$

$$n\left(l_\infty^4 \widetilde{\otimes}_\pi l_\infty^4\right) < 1 = n\left(l_1^4 \widetilde{\otimes}_\pi l_1^4\right)$$

$$n\left(L(l_\infty^4, l_1^4)\right) < 1 = n\left(L(l_1^4, l_\infty^4)\right)$$

(Lima, 1981)

Algunas normas poligonales

- Para $\gamma \in [0,1]$, $X_\gamma = (\mathbb{K}^2, \|.\|_\gamma)$ con

$$\|(x,y)\|_\gamma = \text{máx}\,\{|y|, |x| + (1-\gamma)|y|\} \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{K}^2.$$

$$\Longrightarrow\ n(X_\gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+2\gamma} & \text{si}\ \ 0 \leqslant \gamma \leqslant \frac{1}{2} \\[2ex] \dfrac{1}{3-2\gamma} & \text{si}\ \ \frac{1}{2} \leqslant \gamma \leqslant 1 \end{cases}$$

- Para $\xi \in [0,1]$, $X_\xi = (\mathbb{R}^2, \|\cdot\|_\xi)$ con

$$\|(x,y)\|_\xi = \max\left\{|x|,\ |y|,\ \frac{|x|+|y|}{1+\xi}\right\} \qquad \forall\ (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

$$\Longrightarrow\ n(X_\xi) = \max\left\{\xi,\ \frac{1-\xi}{1+\xi}\right\}.$$

(M.–Merí, en preparación)

Índice numérico de $L_p(\mu)$

- Si $\dim\big(L_p(\mu)\big) = \infty$, entonces $n\big(L_p(\mu)\big) = n(l_p)$.
- $\lim\limits_{k\to\infty} n(l_p^k) = \inf\limits_{k\in\mathbb{N}} n(l_p^k) = n(l_p)$.
- En dimensión 2:

$$n\big(l_p^2(\mathbb{C})\big) \sim \frac{1}{p^{1/p}\, q^{1/q}} \qquad\qquad n\big(l_p^2(\mathbb{R})\big) \sim \sup_{t\in[0,1]} \frac{t^{p-1}-t}{1+t^p}.$$

(Ed-Dari–M.–Merí, en proyecto)

Un caso extremo: espacios de Banach con índice numérico uno

(López–M.–Payá, 1999)

- X espacio de Banach:

$$\begin{aligned} n(X) = 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad \|T\| = v(T) \qquad \forall T \in L(X) \\ &\Longleftrightarrow \quad \|T\| = \sup\{|x^*(Tx)| \ : \ \|x\| = \|x^*\| = x^*(x) = 1\} \end{aligned}$$

- Si $\dim(X) < \infty$, se tiene

$$n(X) = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad |x^*(x)| = 1 \ \ \forall x \in \mathrm{ex}\,(B_X)\,, \ \forall x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*})$$

(McGregor, 1971)

- En general,

$$n(X) = 1 \ \Leftarrow \ |x^{**}(x^*)| = 1 \ \forall x^* \in \mathrm{ex}\,(B_{X^*}),\ \forall x^{**} \in \mathrm{ex}\,(B_{X^{**}})$$

$$¿\Rightarrow?$$

Lema

Si $n(X) = 1$, entonces

$$\begin{cases} |x^*(x)| = 1 \;\; \forall x^* \in \mathbf{ex}\left(B_{X^*}\right), \; \forall x \in \mathbf{dent}\left(B_X\right) \\ |x^{**}(x^*)| = 1 \;\; \forall x^{**} \in \mathbf{ex}\left(B_{X^{**}}\right), \; \forall x^* \in w^*\!-\!\mathbf{dent}\left(B_{X^*}\right) \end{cases}$$

Proposición

X Banach real tal que existe $A \subset B_X$ con $\sharp A = \infty$ y

$$|x^*(a)| = 1 \qquad \forall x^* \in \mathbf{ex}\left(B_{X^*}\right), \;\; \forall a \in A$$

Entonces $X \supset c_0$ o $X \supset l_1$

- Por tanto:
  X Banach real con $n(X) = 1$.
  - Si $\sharp\mathbf{dent}\,(B_X) = \infty \quad \Rightarrow \quad X \supset c_0$ o $X \supset l_1$
  - Si $\sharp w^*\mathbf{-dent}\,(B_{X^*}) = \infty \;\Rightarrow\; X^* \supset l_1$

CONSECUENCIAS

- X real, $\mathbf{dim}(X) = \infty$, RNP, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow\; X \supset l_1$

- X espacio de Asplund real, $\mathbf{dim}(X) = \infty$, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow\; X^* \supset l_1$

- X espacio de Asplund real, RNP, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow\; \mathbf{dim}(X) < \infty$

Consecuencias

- X real, $\mathbf{dim}(X) = \infty$, RNP, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow \; X \supset l_1$

- X espacio de Asplund real, $\mathbf{dim}(X) = \infty$, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow \; X^* \supset l_1$

- X espacio de Asplund real, RNP, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow \; \mathbf{dim}(X) < \infty$

- X reflexivo o casi-reflexivo real, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow \; \mathbf{dim}(X) < \infty$.

- X real, $\mathbf{dim}(X) = \infty$, $n(X) = 1$
  $\Rightarrow \; X^{**}/X$ no es separable

Teorema

X Banach con "sistema biortogonal largo" (en particular, X separable o reflexivo):

- X real $\Longrightarrow$ $\{n(X,|\cdot|) \ : \ |\cdot| \text{ norma equivalente } \} \supseteq [0,1)$

- X complejo $\Rightarrow$ $\{n(X,|\cdot|) \ : \ |\cdot| \text{ norma equivalente } \} \supseteq [e^{-1},1)$

(Finet–M.–Payá, 2003)

El otro caso extremo: espacios de Banach con índice numérico cero

(M.–Merí–Rodríguez-Palacios, 2004)

Algunos ejemplos:

- H espacio de Hilbert real, $\mathbf{dim}(H) > 1 \implies n(H) = 0$
- X espacio de Banach complejo $\implies n\big(X_{\mathbb{R}}\big) = 0$

$$\big(Tx = ix \;\forall x \in X,\;\; v(T) = 0\,\big)$$

- $n(Z) = 0$, Y arbitrario, $X = Y \oplus Z$ (suma absoluta)
  $\implies n(X) = 0$

Proposición

X espacio de Banach real, $Y, Z \leqslant X$, $Z \neq 0$.
Si Z tiene estructura compleja, $X = Y \oplus Z$, y

$$\left\|y + e^{i\rho} z\right\| = \|y + z\| \quad (\rho \in \mathbb{R},\ y \in Y,\ z \in Z),$$

entonces $n(X) = 0$.
De hecho, $T(y,z) = (0, i\,z)$ tiene radio numérico 0.

Ejemplo

- Existe un espacio de Banach real X que es poliédrico y tal que $n(X) = 0$.
- Obsérvese que X no contiene copias isométricas de $\mathbb{C}$.

Dimensión finita

- X espacio de Banach real, $T \in L(X)$

$$v(T) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \big\| \exp(r\,T) \big\| = 1 \quad (r \in \mathbb{R})$$

(T es "skew"-hermitiano)

(Bohnenblust–Karlin, 1955)

- Si $\mathbf{dim}(X) < \infty$, entonces

$$n(X) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \exists T \in L(X) \text{ "skew"-hermitiano}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \text{el grupo de isometrías de } X \text{ es infinito}$$

Teorema

X espacio de Banach real de dimensión finita. Equivalen:

(i) $n(X) = 0$

(ii) Existen espacios complejos no nulos $X_1, \ldots, X_n$, un espacio real X_0 y números $q_1, \ldots, q_n \in \mathbb{N}$ tales que

$$X = X_0 \oplus X_1 \oplus \cdots \oplus X_n$$

verificando que

$$\left\| x_0 + \mathrm{e}^{iq_1 r} x_1 + \cdots + \mathrm{e}^{iq_n r} x_n \right\| = \| x_0 + \cdots + x_n \|$$

para cualquier $r \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $x_j \in X_j$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$.

Boceto de la demostración

- Fijamos $T \in L(X) \setminus \{0\}$ con $v(T) = 0$
- Un Teorema de Auerbach: existe un espacio de Hilbert H con $\dim(H) = \dim(X)$ de manera que cualquier isometría sobreyectiva en $L(X)$ lo sigue siendo en $L(H)$
- Aplicamos lo anterior a $\exp(r\,T)$ para todo $r \in \mathbb{R}$
- Obtenemos que T es antisimétrico, luego T^2 nos da una descomposición de X y los autovalores de T son imaginarios puros
- Usamos el Teorema de aproximación de Kronecker para cambiar los autovalores de T por números racionales (multiplicados por i)

Corolario

X espacio de Banach real con $n(X) = 0$

- Si $\dim(X) = 2$, entonces $X \equiv \mathbb{C}$
- Si $\dim(X) = 3$, entonces $X \equiv \mathbb{R} \oplus \mathbb{C}$ (suma absoluta)

COROLARIO

X espacio de Banach real; consideremos el subespacio de $L(X)$

$$Z(X) = \{T \in L(X) \ : \ v(T) = 0\}$$

(álgebra de Lie de X).

- $\dim(X) = n \implies \dim\big(Z(X)\big) \leqslant \dfrac{n(n-1)}{2}$
- $\dim\big(Z(X)\big) = \dfrac{n(n-1)}{2} \iff X$ es un espacio de Hilbert

EJEMPLO

Existe un espacio de Banach real X con $\dim(X) = 4$, tal que $n(X) = 0$ y el número de espacios complejos del teorema no puede reducirse a uno.

- $X = (\mathbb{R}^4, \|\cdot\|)$ donde

$$\big\|(a,b,c,d)\big\| = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi} \left|\mathrm{Re}\,\left(e^{2it}(a+ib) + e^{it}(c+id)\right)\right|\,dt,$$

y se satisface que

$$\big\|e^{2ir}(a,b,0,0) + e^{ir}(0,0,c,d)\big\| = \|(a,b,c,d)\|$$

para cualquier $r \in \mathbb{R}$ y cualesquiera $a,b,c,d \in \mathbb{R}$.

- En este caso, $\dim\big(Z(X)\big) = 1$ y $Z(X)$ está generado por

$$T \equiv \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Índice numérico para polinomios homogéneos

Índice numérico para polinomios homogéneos

- X espacio de Banach, $k \in \mathbb{N}$, $P \in \mathcal{P}\left({}^k X; X\right)$ polinomio homogéneo

$$v(P) = \sup\{|x^*(P(x))| \ : \ \|x^*\| = \|x\| = x^*(x) = 1\}$$

(Harris, 1971)

- Índice numérico de orden k:

$$\begin{aligned} n^{(k)}(X) &= \inf\{v(P) \ : \ P \in \mathcal{P}\left({}^k X; X\right), \ \|P\| = 1\} \\ &= \max\{m \geqslant 0 \ : \ m\|P\| \leqslant v(P) \text{ for all } P \in \mathcal{P}\left({}^k X; X\right)\}. \end{aligned}$$

- X complejo $\quad \Rightarrow \ n^{(k)}(X) \geqslant k^{\frac{k}{1-k}}$

(Harris, 1971)

- $n^{(k)}(c_0) = n^{(k)}(l_\infty) = 1, \quad n^{(k)}(l_1) \leqslant 1/2$

  (Choi–Kim, 1996)

- $n^{(k+1)}(X) \leqslant n^{(k)}(X)$

- K compacto de Hausdorff, $n^{(k)}\big(C(K)\big) = 1$

- μ medida positiva, ¿ $n^{(k)}\big(L_1(\mu)\big)$?