UNIVERSIDAD DE GRANADA

La propiedad de Daugavet

Miguel Martín

Ecuación de Daugavet

X espacio de Banach, $T \in L(X)$

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(ED)}$$

- **Daugavet, 1963:** $T \in K\big(C[0,1]\big)$ satisface (ED).
- **Lozanoskii, 1966:** $T \in K\big(L_1[0,1]\big)$ satisface (ED).
- **Abramovich, Holub y otros, años 80:**
  $X = C(K)$ con K perfecto o $X = L_1(\mu)$ con μ libre de átomos, todo $T \in L(X)$ débilmente compacto satisface (ED).

Propiedad de Daugavet

Un espacio de Banach X verifica la **propiedad de Daugavet** si todo operador de rango uno $T \in L(X)$ satisface (ED).

(Kadets-Shvidkoy-Sirotkin-Werner, 1997)

- K perfecto, μ libre de átomos, X Banach cualquiera
$\Longrightarrow C(K, X)$, $L_1(\mu, X)$ y $L_\infty(\mu, X)$ verifican la propiedad de Daugavet.

(Kadets, 1997; Nazarenko, –; Martín-Villena, 2003)

- K compacto. Si X verifica la propiedad de Daugavet, entonces $C(K, X)$ también.

(Martín-Payá, 2000)

- $A(\mathbb{D})$ y H^∞ verifican la propiedad de Daugavet.

(Werner, 1997)

- Una C^*-álgebra verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, carece de átomos.

- El predual de un álgebra de von Neumann verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, el álgebra carece de átomos.

(Oikhberg, 2002)

- Un JB^*-triple verifica la propiedad de Daugavet si, y sólo si, carece de tripotentes minimales.

(Martín-Oikhberg, preprint)

Proposición

X espacio de Banach. Son equivalentes:

(*i*) X verifica la propiedad de Daugavet.

(*ii*) Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ tal que

$$\mathrm{Re}\, x^*(y) > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x + y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(*iii*) Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que

$$\mathrm{Re}\, y^*(x) > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x^* + y^*\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(*iv*) Para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene

$$B_X = \overline{\mathrm{co}}\big(\{y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon\}\big).$$

TEOREMA (KSSW, 2000)
Si X verifica la propiedad de Daugavet, todo operador débilmente compacto $T : X \longrightarrow X$ satisface (ED).

DEMOSTRACIÓN: Fijamos $T \in L(X)$ débilmente compacto con $\|T\| = 1$. Entonces, el conjunto $K = \overline{T(B_X)}$ es débilmente compacto, luego es la envolvente convexo-cerrada de sus puntos dientes. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos un punto diente $y_0 \in K$ con $\|y_0\| > 1 - \varepsilon$. Entonces, para algún $0 < \delta < \varepsilon$ hay una rebanada

$$S = \{y \in K \ : \ \mathrm{Re}\ y_0^*(y) \geqslant 1 - \delta\}$$

de K que contiene a y_0 y tiene diámetro menor que ε; $y_0^* \in X^*$ y $\sup_{y \in K} y_0^*(y) = 1$. Esto es, si escribimos $x_0^* = T^* y_0^*$, entonces $\|x_0^*\| = 1$ y

$$x \in B_X, \ \mathrm{Re}\ x_0^*(x) > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Tx - y_0\| < \varepsilon.$$

$x_0^* = T^* y_0^*$, $\|x_0^*\| = 1$ y

$$x \in B_X,\ \mathrm{Re}\ x_0^*(x) > 1 - \delta \quad \Longrightarrow \quad \|Tx - y_0\| < \varepsilon.$$

La caracterización anterior (para $y_0/\|y_0\|$ y x_0^*) nos da $x \in S_X$ tal que

$$\mathrm{Re}\ x_0^*(x) > 1 - \delta \qquad \text{y} \qquad \big\|x + y_0/\|y_0\|\big\| > 2 - \varepsilon.$$

Entonces, $\|Tx - y_0\| < \varepsilon$ y $\|x + y_0\| > 1 - 2\varepsilon$, luego

$$\|Id + T\| \geqslant \|x + Tx\| \geqslant \|x + y_0\| - \|y_0 - Tx\| > 2 - 3\varepsilon.$$

Ejemplo

Si μ es una medida positiva libre de átomos, todo operador débilmente compacto $T : L_1(\mu) \longrightarrow L_1(\mu)$ satisface (ED).

En efecto, dados $x \in L_1(\mu)$, $x^* \in L_\infty(\mu)$ y $\varepsilon > 0$, como μ está libre de átomos, podemos encontrar un conjunto medible B con $\mu(B) > 0$ tal que

$$\|\chi_B\, x\|_1 \leqslant \varepsilon/2 \qquad \text{y} \qquad \|\chi_B\, x^*\|_\infty \geqslant 1 - \varepsilon/2.$$

Tomamos entonces $y \in S_{L_1(\mu)}$ tal que

$$\chi_B\, y = y \qquad \text{y} \qquad \langle x^*, y\rangle > 1 - \varepsilon.$$

Basta observar que

$$\begin{aligned} \|x + y\|_1 &= \|\chi_B\,(x+y)\|_1 + \|\chi_{B^c}\,(x+y)\|_1 \\ &\geqslant (\|\chi_B\, y\|_1 - \varepsilon/2) + \|\chi_{B^c}\, x\|_1 \geqslant 2 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Corolario (Kadets, 1996)
Si X verifica la propiedad de Daugavet, entonces X no tiene base incondicional.

Demostración: Si $\{(e_n, e_n^*)\}$ es una base incondicional, para cada $A \subset \mathbb{N}$ finito, definimos

$$P_A(x) = \sum_{n \in A} e_n^*(x)\, e_n \qquad (x \in X),$$

y se tiene que $K = \sup\left\{\|P_A\| \ : \ A \subset \mathbb{N} \text{ finito } \right\} < +\infty$. Dado $\varepsilon > 0$, tomamos $A_0 \subset \mathbb{N}$ finito tal que $\|P_{A_0}\| \geqslant K - \varepsilon$. Por una parte,

$$\|Id - P_{A_0}\| \geqslant 1 + K - \varepsilon.$$

Por otra parte,

$$\|Id - P_{A_0}\| \leqslant \sup\left\{\|P_A\| \ : \ A \subset N \setminus A_0 \text{ finito } \right\} \leqslant K.$$

Haciendo $\varepsilon \downarrow 0$, obtenemos $1 + K \leqslant K$, una contradicción.

Otras consecuencias

X espacio de Banach verificando la propiedad de Daugavet. Entonces:

- $X \supset \ell_1$.
- X no está contenido en ningún espacio con base incondicional.

(Kadets-Shvidkoy-Sirotkin-Werner, 2000)

- Si $T \in L(X)$ no fija una copia de ℓ_1, entonces T satisface (ED).
- X no está contenido en una suma incondicional de espacios que no contienen a ℓ_1.

(Shvidkoy, 2000)

Algunos problemas abiertos

- ¿Existe X tal que X^{**} verifica la propiedad de Daugavet?
- Caracterizar los espacios de Banach que pueden renormarse verificando la propiedad de Daugavet.

Relación con el rango numérico

X espacio de Banach, $T \in L(X)$. El **rango numérico** de T es

$$V(T) = \{x^*(Tx) \,:\, x^* \in S_{X^*},\ x \in S_X,\ x^*(x) = 1\}$$

y el **radio numérico** de T:

$$v(T) = \sup\{|\lambda| \,:\, \lambda \in V(T)\}.$$

(Lumer, 1961; Bauer, 1962)

El **índice numérico** de X es

$$\begin{aligned} n(X) &= \inf\{v(T)\ :\ T \in L(X),\ \|T\| = 1\} \\ &= \max\{k \geqslant 0\ : k\|T\| \leqslant v(T)\ \forall T \in L(X)\} \end{aligned}$$

(Lumer, 1968)

Sea $T \in L(X)$. Se tiene que $\sup \operatorname{Re} V(T) = \lim\limits_{\alpha \to 0^+} \dfrac{\|Id + \alpha T\| - 1}{\alpha}$.

(Lumer, 1961)

- $\sup \operatorname{Re} V(T) = \|T\|$ si, y sólo si, $\|Id + T\| = 1 + \|T\|$.
- Obsérvese que $v(T) = \max\limits_{|\omega|=1} \sup \operatorname{Re} \omega V(T) = \max\limits_{|\omega|=1} \sup \operatorname{Re} V(\omega T)$.
- Por tanto, $v(T) = \|T\|$ si, y sólo si, $\max\limits_{|\omega|=1} \sup \operatorname{Re} V(\omega T) = \|T\|$.
- Equivalentemente, $v(T) = \|T\|$ si, y sólo si, existe $\omega \in \mathbb{C}$ con $|\omega| = 1$ tal que ωT satisface (ED).

☐ Índice numérico 1:

$$\max_{|\omega|=1} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \in L(X)$$

☐ Propiedad de Daugavet:

$$\|Id + T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \text{ compacto}$$

☐ *Propiedad de Daugavet alternativa*:

$$\max_{|\omega|=1} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\| \qquad \forall\ T \text{ compacto}$$

Propiedad de Daugavet alternativa

Un espacio de Banach X verifica la **propiedad de Daugavet alternativa (PDA)** si todo operador de rango uno satisface

$$\max_{|\omega|=1} \|Id + \omega T\| = 1 + \|T\| \qquad \text{(EDa)}.$$

(Martín-Oikhberg, preprint)

- Si $n(X) = 1$ o X verifica la propiedad de Daugavet, entonces X verifica la PDA.

- $c_0 \oplus_1 L_1([0,1], \ell_2)$ verifica la PDA, pero no verifica la propiedad de Daugavet y tampoco tiene índice numérico 1.

- Si X verifica la PDA, entonces todo operador débilmente compacto satisface (EDa).

Proposición

Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:

(i) X verifica la PDA.

(ii) Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y \in S_X$ tal que

$$|x^*(y)| > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x + y\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(iii) Dados $x \in S_X$, $x^* \in S_{X^*}$ y $\varepsilon > 0$, existe $y^* \in S_{X^*}$ tal que

$$|y^*(x)| > 1 - \varepsilon \quad \text{y} \quad \|x^* + y^*\| \geqslant 2 - \varepsilon.$$

(iv) Para cada $x \in S_X$ y cada $\varepsilon > 0$, se tiene

$$B_X = \overline{\mathrm{co}}\big(\mathbb{T}\{y \in B_X \ : \ \|x - y\| \geqslant 2 - \varepsilon\}\big).$$

(v) $B_{X^*\oplus_\infty X^{**}} = \overline{\text{co}}^{w^*}(\Gamma)$, donde

$$\Gamma = \left\{(x^*, x^{**}) \;:\; x^* \in \mathrm{ex}\left(B_{X^*}\right),\; x^{**} \in \mathrm{ex}\left(B_{X^{**}}\right),\; |x^{**}(x^*)| = 1\right\}.$$

PROPOSICIÓN

Sea X un espacio de Banach. Son equivalentes:

(i) X verifica la propiedad de Daugavet.

(ii) $B_{X^*\oplus_\infty X^{**}} = \overline{\text{co}}^{w^*}(\Lambda)$, donde

$$\Lambda = \left\{(x^*, x^{**}) \;:\; x^* \in \mathrm{ex}\left(B_{X^*}\right),\; x^{**} \in \mathrm{ex}\left(B_{X^{**}}\right),\; x^{**}(x^*) = 1\right\}.$$

Proposición

- Si X es un espacio de Asplund o X verifica la RNP, entonces la PDA implica tener índice numérico 1.
- Sea X un espacio de Banach verificando la PDA. Entonces, existe Y isomorfo a X que sigue verificando la PDA pero no verifica la propiedad de Daugavet.
- Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita verificando la PDA, entonces X^{**}/X no es separable. Más aún:
    - Si el conjunto de puntos dientes de B_X es infinito, entonces $X \supset c_0$ o $X \supset \ell_1$.
    - Si el conjunto de puntos w^*-dientes de B_{X^*} es infinito, entonces $X^* \supset \ell_1$.

Más ejemplos

- Una C^*-álgebra verifica la PDA si, y sólo si, sus proyecciones atómicas son centrales.
- El predual A_* de un álgebra de von Neumann A verifica la PDA si, y sólo si, el álgebra la verifica.
- Sea A un álgebra de von Neumann verificando la PDA. Entonces, existe un álgebra de von Neumann commutativa C y un álgebra de von Neumann libre de átomos N tales que $A = C \oplus_\infty N$. Obsérvese que $n(C) = 1$ y N verifica la propiedad de Daugavet.
- La descomposición anterior no es posible para C^*-álgebras generales:

$$\Big[c_0 \oplus_\infty L_\infty\big([0,1], K(\ell_2)\big)\Big]_1.$$

Algunos problemas abiertos

- X verificando la PDA, ¿se tiene $X \supset c_0$ o $X \supset \ell_1$?
- X verificando la PDA, ¿$X^* \supset \ell_1$?
- Caracterizar los espacios de Banach que pueden renormarse verificando la PDA.